

# 基于Toeplitz矩阵初值的协方差估计方法

张波, 罗丰, 张林让, 黄庆东, 刘高高

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**【摘要】**随着雷达分辨率的提高海杂波分布已经不符合高斯分布, 传统的检测器在非高斯环境下的性能也大幅下降。通过非高斯海杂波概率密度函数的似然函数推导出一个海杂波协方差矩阵的原始构型, 通过解该协方差矩阵, 提出了在非高斯海杂波环境下采用初值为Toeplitz矩阵的固定点协方差矩阵估计方法(T-FP), 经过实测海杂波数据下的性能仿真结果表明, 采用该方法的检测器检测性能得到了提高。

**关键词** 协方差; 检测器; 归一化匹配滤波器; Toeplitz矩阵

**中图分类号** TN95

**文献标识码** A

**doi:**10.3969/j.issn.1001-0548.2011.06.011

## Covariance Estimation Method Based on Toeplitz Initialization

ZHANG Bo, LUO Feng, ZHANG Lin-rang, HUANG Qing-dong, and LIU Gao-gao

(National Key Lab of Radar Signal Processing, Xidian University Xi'an 710071)

**Abstract** As the increasing of radar resolution, the statistics of the clutter appear no longer to be Gaussian. This paper derives a covariance matrix structure of sea-clutter from maximal likelihood function of probability density function of no-Gaussian sea clutter. Initialization of a Toeplitz matrix of fixed point covariance matrix in no-Gaussian sea clutter is proposed by solve the covariance matrix. The simulation result shows that the proposed method can enhance the detector performance in real sea clutter.

**Key words** covariance; detector; normalized matched filter(NMF); Toeplitz matrix

近些年来, 在高斯噪声环境下的信号检测问题已经被广泛关注, 自适应检测器需要采用不含目标的辅助数据(又称二级数据)来估计噪声协方差矩阵<sup>[1-3]</sup>。如文献[2, 4]基于高斯杂波假设, 其协方差矩阵是基于最大似然估计方法得到的。但是这些检测器在附加噪声不是高斯分布时, 检测性能会下降。随着现代雷达分辨力的不断提高, 许多文献及实验数据验证了在高分辨力和低入射角情况下, 雷达海杂波已经不符合高斯分布, 而可以看作是一个复合高斯过程<sup>[5-6]</sup>。

本文在基于非高斯杂波环境下, 固定点协方差矩阵的似然估计, 提出了用Toeplitz矩阵作为初始值的固定点协方差似然估计法的T-FP方法, 并对该方法实测非高斯海杂波数据的检测性能进行研究。

### 1 高分辨雷达回波模型及归一化自适应匹配滤波检测器

杂波环境中的雷达信号检测可以用下面的二元假设检验表示:

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{r} = \mathbf{c} & \mathbf{r}_i = \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, K \\ H_1: \mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{c} & \mathbf{r}_i = \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, K \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{r}$  表示从基带信号采样得到的 $N$ 维复向量接收信号;  $\mathbf{u}$  表示希望的目标回波信号;  $\mathbf{c}$  表示被测单元的杂波;  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_K$  表示 $N$ 维的没有目标和干扰的训练数据。有用信号可以表示为 $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{p}$ , 文中,  $\mathbf{p}$  表示目标的导向矢量,  $\alpha$  是有关信道传播影响以及目标雷达截面积的未知参数。在 $H_0$ 假设下, 回波只包含杂波数据 $\mathbf{c}$ 。当杂波的概率密度函数(pdf)属于复合高斯函数族<sup>[7]</sup>时,  $\mathbf{c}$  可以看作是两个独立的随机变量之积, 它是一个慢变化的非负的随机过程(称作纹理分量)调制的零均值复高斯信号(称作亮斑分量):

$$\begin{cases} \mathbf{c} = \sqrt{\tau} \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_i = \sqrt{\tau_i} \mathbf{x}_i \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K\}$  (亮斑)是一串独立同分布复的零均值复高斯、圆对称的随机向量, 具有单位功率, 其协方差矩阵为正定的 $\mathbf{M}$ , 即  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_i \in cN(0, \mathbf{M})$ ;  $\tau$

收稿日期: 2010-09-06; 修回日期: 2010-11-11

基金项目: 部级基金

作者简介: 张波(1975-), 男, 博士生, 主要从事海杂波处理及目标检测等方面的研究。

和  $\tau_i$  (纹理) 是实的非负的随机变量且独立于  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}_i$ , 服从伽马分布。

文献[8]中提出的归一化匹配滤波器(NMF)对不同杂波分布(复合高斯模型)保持恒虚警特性。于是, 为了构造在复合高斯杂波背景下完全自适应的检测器, 可将NMF中的杂波协方差矩阵用一个合适的估计矩阵来代替, 得到的检测器称作归一化自适应匹配滤波器<sup>[9]</sup>(NAMF)。用检测单元周围距离单元的不含目标的训练数据构造几种不同的协方差矩阵。该类协方差矩阵的估计都基于如下假设, 即:

所有训练数据不包含干扰和目标, 并且和被测单元的数据具有同样的协方差矩阵。

假定已知杂波的协方差矩阵  $\mathbf{M}$ , 则归一化的自适应匹配滤波检测器可表述为:

$$\frac{|p^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}|^2}{(p^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P})(\mathbf{r}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r})} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{T} \quad (3)$$

实际情况中,  $\mathbf{M}$  是用训练数据的估计值  $\hat{\mathbf{M}}$  代替,  $T$  为门限。

## 2 基于Toeplitz初值的固定点最大似然估计协方差矩阵T-FP法

固定点估计矩阵(FPE)来自于一个似然估计的近似。对于  $K$  个独立同分布的二级数据, 联合概率分布为:

$$p_R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_K; \mathbf{M}) = \prod_{k=1}^K p_R(\mathbf{r}_k; \mathbf{M}) = \prod_{k=1}^K \int_0^\infty p_R(\mathbf{r}_k | \tau_k; \mathbf{M}) p_\tau(\tau_k) d\tau_k = \prod_{k=1}^K \int_0^\infty \frac{1}{(\pi \tau_k)^m |\mathbf{M}|} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_k^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_k}{\tau_k}\right) p_\tau(\tau_k) d\tau_k \quad (4)$$

其中,  $p_\tau(\tau_1) = p_\tau(\tau_2) = \dots = p_\tau(\tau_K)$  为纹理的概率密度函数。定义非线性无记忆函数:

$$h_m(q) \triangleq \int_0^{+\infty} \tau^{-m} \exp(-q/\tau) p_\tau(\tau) d\tau \quad (5)$$

则式(4)可以写成:

$$p_R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_K; \mathbf{M}) = \pi^{-Km} |\mathbf{M}|^{-K} \prod_{k=1}^K h_m(\mathbf{r}_k^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_k) \quad (6)$$

为了得到协方差矩阵的似然估计, 通过对式(6)构造最大似然函数:

$$\frac{\partial \ln p_R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_K | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K; \mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} = 0 \quad (7)$$

可得:

$$-K \frac{\partial \ln |\mathbf{M}|}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{k=1}^K \frac{\partial h_m(\mathbf{r}_k^H \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{r}_k) / \partial x}{h_m(\mathbf{r}_k^H \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{r}_k)} \frac{\partial \mathbf{r}_k^H \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{M}} = 0 \quad (8)$$

得到协方差矩阵的最大似然估计值:

$$\hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{h_{m+1}(\mathbf{r}_k^H \hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}}^{-1} \mathbf{r}_k)}{h_m(\mathbf{r}_k^H \hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}}^{-1} \mathbf{r}_k)} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K c_m(\mathbf{r}_k^H \hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}}^{-1} \mathbf{r}_k) \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H \quad (9)$$

式中,  $c_m(x) = h_{m+1}(x)/h_m(x)$ 。运用文献[10]提出的迭代算法可以求得近似解:

$$\hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}}(i+1) = \frac{N}{K} \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{\mathbf{r}_k^H \hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}}^{-1}(i) \mathbf{r}_k} \right) \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H = \frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H}{\mathbf{x}_i^H \hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}}^{-1}(i) \mathbf{x}_i} \quad (10)$$

该迭代的初始值将影响最终结果。由式(10)可知, 检测器对纹理是恒虚警的, 只与高斯的亮斑分量有关, 由前知亮斑分量为复高斯分布, 协方差矩阵应为Toeplitz形式, 置初始矩阵为  $\mathbf{M}_{ij} = \rho^{|i-j|}$ ,  $\rho$  为一阶相关系数, 有:

$$[\hat{\mathbf{M}}_{\text{ML}}(0)]_{ij} = \mathbf{M}_{ij} = \rho^{|i-j|} \quad (11)$$

$$1 < i, j < N \quad 0 < \rho < 1$$

利用文献[10]的方法迭代求解式(9), 会有迭代误差的问题存在, 即:

$$\varepsilon \triangleq E \left\{ \left\| \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M} \right\|_F \right\} / \left\| \mathbf{M} \right\|_F \quad (12)$$

在迭代次数不超过3时, 可根据最小误差准则找到一个  $\rho$ 。

将式(11)代入式(3)的检测器中检验检测性能, 经验证可知, 式(10)的迭代收敛率与训练数据  $K$  的个数和脉冲数  $N$  有关, 随着  $\rho$  的增大, 收敛率加快, 且保证收敛率的迭代次数  $N_{it}$  很小(2或3)。与常用的另外两种协方差矩阵比较, 分别用  $\hat{\mathbf{M}}_{\text{SCM}}$  和  $\hat{\mathbf{M}}_{\text{NSCM}}$  替代式(3)中的协方差矩阵, 有:

$$\hat{\mathbf{M}}_{\text{SCM}} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{M}_c = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^H = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \tau_i (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H) \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{\text{NSCM}} = \frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^H}{\mathbf{r}_i^H \mathbf{r}_i} = \frac{N}{K} \sum_{i=1}^K \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H}{\mathbf{x}_i^H \mathbf{x}_i} \quad (14)$$

## 3 仿真分析

本文采用某X波段搜索雷达海杂波实测数据对前述算法作性能仿真。雷达架高10 m, 脉冲重频PRF为1 kHz, 波束宽度0.9°。由于数据长度有限, 所以设定虚警概率  $P_{fa} = 1.0 \times 10^{-2}$ , 该组数据经验证幅度分布属于  $K$  分布。试验中设置辅助数据长度  $K=24$ ,

脉冲累积个数 $N=8$ 。图1为一个距离单元上的海杂波时域图形。

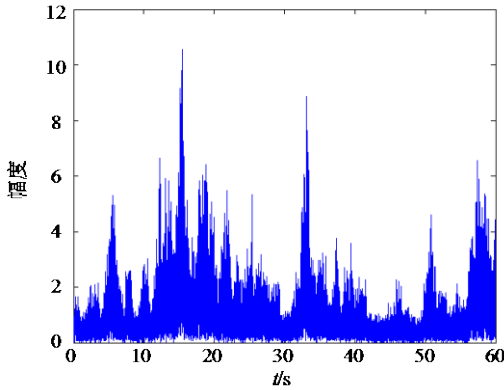


图1 一个距离单元上的杂波时域图

图2为分别使用T-FP法、SCM、NSCM协方差矩阵时的检测器检测性能。从图2可以看到,在中低信杂比时,采用T-FP方法比采用其他两种协方差矩阵的检测性能明显要高,可以提高大约0.2~1 dB的CFAR损失。在高信杂比的情况下,3种方法的性能基本一致。图3为采用T-FP方法时,迭代初始矩阵分别采用Toeplitz矩阵、SCM、NSCM时的性能对比。由图3可看出,使用Toeplitz矩阵作为初值的检测器性能明显高于其他两种初始矩阵时的检测性能。图4为采用T-FP法时不同 $\rho$ 值对检测性能的影响。由图4可看出,当 $\rho$ 由小变大时,检测性能逐渐降低,经过试验发现在本实验数据下 $\rho > 0.7$ 之后, T-FP法的性能会有较大下降。

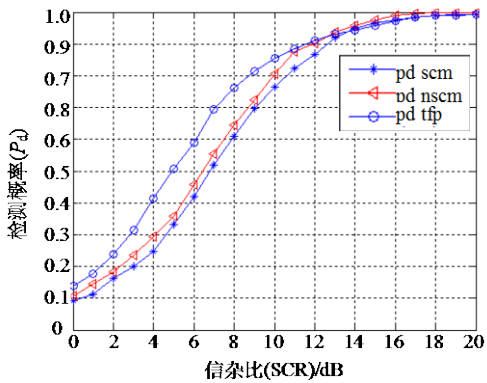


图2 检测器协方差矩阵分别采用T-FP法,  $\hat{M}_{SCM}$  和  $\hat{M}_{NSCM}$  的性能对比

由文献[11]可知,似然比的检验性能依赖于 $K$ 、 $N$ 、SNR和信号强度。而CFAR的损失则随着 $K$ 的增加而减小,大致与 $K/N$ 的比率有关。可知, $K$ 和 $N$ 的改变对3种检测算法的影响是一致的。通过实验可知,当 $K=48$ 时,其性能和 $K=32$ 的性能很相近,再大已不能提高性能了。

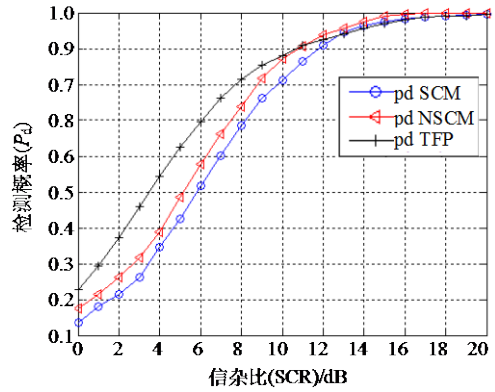


图3 T-FP法采用不同初始矩阵的检测性能比较

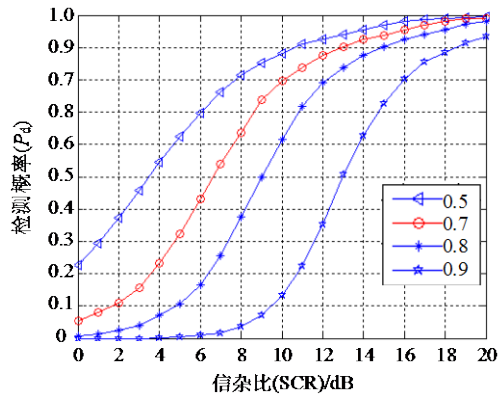


图4  $\rho = 0.5, 0.7, 0.8, 0.9$  时的检测性能对比

### 4 结束语

本文通过推导非高斯杂波中的固定点协方差矩阵似然估计方法,提出了以Toeplitz矩阵为初值的协方差矩阵构造法的T-FP法,并在实际非高斯海杂波背景下对该方法进行了检测性能的分析 and 讨论。仿真结果表明,采用Toeplitz初始矩阵时,固定点协方差矩阵检测器在杂波相关性不大的情况下可以得到更好的检测性能。

### 参考文献

- [1] FUHRMANN D R. Application of Toeplitz covariance estimation to adaptive beamforming and detection[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1991, 39(10): 2194-2198.
- [2] KELLY E J. An adaptive detection algorithm[J]. IEEE Trans Aerospace Electron Systems, 1986, 22(1): 115-127.
- [3] REED I S, MALLET J D, BRENNAN L E. Rapid convergence rate in adaptive arrays[J]. IEEE Trans Aerospace Electron Systems, 1974, 10(6): 853-863.
- [4] ROBEY F C, FUHRMANN D R, KELLY E J, et al. A CFAR adaptive matched filter detector[J]. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1992, 23(1): 208-216.
- [5] 秦国栋, 陈伯孝, 陈多芳. 大入射余角下海杂波仿真及其时空相关性分析[J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(4): 600-604.

QIN Guo-dong, CHEN Buo-xiao, CHEN Duo-fang.

- Simulation of the sea clutter and an analysis of temporal and spatial correlation at a high grazing angle[J]. Journal of Xidian University, 2008, 35(4): 600-604.
- [6] CONTE E, DE MAIO A, RICCI G. Covariance matrix estimation for adaptive CFAR detection in compound-Gaussian clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(2): 415-426.
- [7] RANGASWAMY M, WEINER D D, OZTURK A. Non-Gaussian vector identification using spherically invariant random processes[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(1): 111-124.
- [8] CONTE E, LOPS M, RICCI G. Asymptotically optimum radar detection in compound Gaussian clutter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1995, 31(2): 617-625.
- [9] RANGASWAMY M. Statistical analysis of the non-homogeneity detector for non-Gaussian interference backgrounds[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(6): 2101-2111.
- [10] PASCAL F, CHITOUR Y. Covariance structure maximum likelihood estimates in compound Gaussian noise: existence and algorithm analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(1): 34-48.
- [11] KELLY E J. An adaptive detection algorithm[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1986, 22(1): 116-127.

编辑 税红

-----

(上接第859页)

- [3] RIMOLDI B, URBANKE R. A rate-splitting approach to the Gaussian multiple-access channel[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1996, 42(2): 364-375.
- [4] HAN T S, KOBAYASHI K. A new achievable rate region for the interference channel[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1981, 27(1): 49-60.
- [5] SASON I. On achievable rate regions for the Gaussian interference channel[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2004, 50(6): 1345-1356.
- [6] CHONG H F, MOTANI M, GARG H K, et al. On the Han-Hobayashi region for the interference channel[C]//The IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT '08). Toronto: IEEE, 2008: 240-244.
- [7] JAFAR S A. The ergodic capacity of interference networks[EB/OL]. [2009-05-21]. <http://arxiv.org/abs/0902.0838>.
- [8] BRESLER G, TSE D. The two-user Gaussian interference channel: a deterministic view[J]. European Trans on Telecommunications, 2008, 19: 333-354.
- [9] CADAMBE V R, JAFAR S A, SHAMAI S. Interference alignment on the deterministic channel and application to fully connected Gaussian interference networks[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2009, 55(1): 269-274.
- [10] YU W, GINIS G, CIOFFI J M. Distributed multiuser power control for digital subscriber lines[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2002, 20(5): 1105-1115.
- [11] SCUTARI G, PALOMAR D P, BARBAROSSA S. Simultaneous iterative water-filling for Gaussian frequency-selective interference channels[C]//IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT '06), Seattle: IEEE, 2006: 600-604.
- [12] LESHEM A, ZEHAVI E. Cooperative game theory and the Gaussian interference channel[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2008, 26(7): 1078-1088.
- [13] KRAMER G. Review of rate regions for interference channels[C]//International Zurich Seminar on Communications. Zurich: IEEE, 2006: 162-165.
- [14] PALOMAR D P, FONOLLOSA J R. Practical algorithms for a family of waterfilling solutions[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2005, 53(2): 686-695.

编辑 黄莘