

# 在 $G_{p,q}^\beta$ 空间收缩的图像复原方法

文乔农<sup>1</sup>, 万遂人<sup>1</sup>, 刘增力<sup>2</sup>

(1. 东南大学医学电子学实验室 南京 210096; 2. 昆明理工大学信息工程与自动化学院 昆明 650051)

**【摘要】**在DT模型、Jiang模型和LHLLAV模型等图像复原方法的基础上,提出了在新的光滑空间上的图像复原模型。首先剖析了新模型的参数含义和物理意义,阐述了Besov空间和 $G_{p,q}^\beta$ 空间的定义、性质和范数。根据 $G_{p,q}^\beta$ 空间和Besov空间的关系,把模型在 $G_{p,q}^\beta$ 空间中重新描述。引入替代函数,消除 $\mathbf{K}^* \mathbf{K}u$ 对求解带来的困难,推导了新模型在第二代Curvelet变换域的求解,得到了一个关键性的Curvelet域收缩求解公式。最后,对图像复原模型给出了算法步骤和实验,验证了复原效果和计算复杂度,模型收敛快,比LHLLAV模型省时近一半,图像的SNR也比LHLLAV模型的高。

**关键词** 替代函数; Besov空间; Curvelet域收缩;  $G_{p,q}^\beta$ 空间; 图像复原

中图分类号 TP391

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.01.023

## Image Restoration in $G_{p,q}^\beta$ Space Shrinking

WEN Qiao-nong<sup>1</sup>, WAN Sui-ren<sup>1</sup>, and LIU Zeng-li<sup>2</sup>

(1. Medical Electronics Laboratory, Southeast University Nanjing 210096;

2. Faculty of Information Engineering and Automation, Kunming University of Science and Technology Kunming 650051)

**Abstract** A new smooth space image restoration model based on DT model, Jiang model, and LHLLAV model is considered. The meanings of the parameters of the new model is discussed. The definition, nature, and norm of Besov space and  $G_{p,q}^\beta$  space are described. The model in  $G_{p,q}^\beta$  space is re-described according to the relationship between  $G_{p,q}^\beta$  space and Besov space. By constructing a surrogate functional that removes the influence of  $\mathbf{K}^* \mathbf{K}u$ , the model solution in the second generation curvelet transform domain is derived and an elegant curvelet shrinkage schemes is obtained. The experiment study shows that the new method has better restoration effect, faster convergence, and lower computational complexity than LHLLAV model.

**Key words** alternative functions; Besov space; Curvelet domain shrinking;  $G_{p,q}^\beta$  space; image restoration

### 1 变换空间上的图像复原模型简介

图像复原问题本质上是解第一类Fredholm方程,是一个病态问题。通常采用规整化约束建立一个变分泛函逼近问题的解,最有名的是BV模型和TV模型,最终是解由Euler方程得到的偏微分方程,但偏微分方程多数是高阶的,求解很复杂。文献[1]引入 $H^{-1}(Q)$ 空间,改进了BV模型和TV模型,得出:

$$\inf_{u \in \text{BV}(\Omega)} \{ \lambda \int_{\Omega} |\text{Du}| + |u_0 - u|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \} \quad (1)$$

式中,  $\text{Du}$  为某种规整化算子;  $\text{BV}$ 是有界变差函数空间;  $H^{-1}$ 为负的希尔伯特空间;  $\Omega$ 为图像作用域;  $\lambda$

为大于0的权值系数,其作用在于调节泛函中两项的值的比重,一般在实验中通过多次调节选取而得到;  $u$ 为复原后图像,  $u_0$ 为降质图像。

近几年人们把图像分解技术引入图像复原,文献[2]提出了在Besov空间基于分解的图像复原方法<sup>[2]</sup>,即DT模型:

$$\inf_{(u,v) \in X_1 \times X_2} \{ \mathbf{K}(u,v) = \|f - \mathbf{K}(u+v)\|_{L^2(Q)}^2 + \gamma \|v\|_{H^{-1}(Q)}^2 + 2\alpha |u|_{B_{1,1}^1(Q)} \} \quad (2)$$

式中,  $f$ 为降质图像;  $v$ 为噪声部分;  $\gamma$ 、 $\alpha$ 都是大于0的调节系数;  $Q$ 是图像的作用域,  $L^2(Q)$ 是 $Q$ 上的平方可积函数组成的空间;  $\mathbf{K}$ 为降质矩阵,是由

收稿日期: 2010-05-12; 修回日期: 2010-11-19

基金项目: 国家973计划(2010CB933903), 国家自然科学基金(60872157)

作者简介: 文乔农(1974-), 男, 博士生, 主要从事图像处理等方面的研究。

模糊核函数(也叫点扩散函数)得到的一个循环与循环块的块矩阵;  $B_{1,1}^1(Q)$  是Besov空间的范数。该变分泛函的解是在小波域中通过阈值收缩求得, 大大降低了求解的复杂性。文献[3]提出的基于Besov空间的图像盲复原算法, 是正则化方法在Besov空间的扩展。文献[4]提出了在  $G_{p,q}^\beta$  空间的图像分解, 称为Jiang模型:

$$\inf_{u,v} F_f(u,v) = \|f - \mathbf{K}(u+v)\|_{L_2(Q)}^2 + \gamma \|v\|_{G_{2,2}^{-s-\frac{1}{4}}(Q)}^2 + 2\alpha \|u\|_{G_{2,2}^{\frac{1}{2}}(Q)}^2 \quad (3)$$

Jiang模型使用了文献[5]提出新光滑空间  $G_{p,q}^\beta$  的范数。文献[6]在文献[1]的基础上提出新的变分模型, 称为LHLLAV模型:

$$\inf_{u \in \text{BV}(Q)} F(u) = \lambda \|u\|_{\text{BV}(Q)} + \|u_0 - \mathbf{K}u\|_{-s}^2 \quad (4)$$

式中,  $\|f - \mathbf{K}u\|_{-s}^2$  为  $\|f - \mathbf{K}u\|_{H^{-s}(Q)}^2$  的简写; BV是有界变差函数空间。

## 2 新模型的提出

对于LHLLAV模型, 本文从合成和真实图像的数值实验结果表明该模型有很好的图像复原效果, 但是模型的偏微分方程求解计算量非常大。因为在变换域里可以稀疏地表示图像, 求解是一个阈值收缩过程, 计算复杂性比求解偏微分方程大大降低, 所以本文希望能够类似式(1)在变换域求解。另外, 高阶偏微分方程在离散化过程中的大量差分运算使解的误差较大, 而在变换域, 特别是在  $G_{p,q}^\beta$  空间对图像分解很精细, 误差小。BV空间可以用  $B_{1,1}^1$  逼近, 综合上述几种模型, 可以得到:

$$\inf_u F(u) = \lambda \|u\|_{B_{1,1}^1} + \|\mathbf{K}u - f\|_{H^{-s}(Q)}^2 \quad (5)$$

由泛函空间知识和文献[7]有  $H^{-s} = B_{2,2}^{-s}$ , 式(5)可在Besov空间表示为:

$$\inf_u F(u) = \|\mathbf{K}u - f\|_{B_{2,2}^{-s}}^2 + \lambda \|u\|_{B_{1,1}^1} \quad (6)$$

式(6)是本文提出的新的图像复原模型, 是一个Besov空间域的变分泛函。本文中,  $f$  为降质图像;  $u$  为复原后图像;  $\mathbf{K}$  为降质矩阵, 它是由模糊核函数(也叫点扩散函数)得到的矩阵, 是一个循环与循环块的块矩阵。简单地说, 图像复原问题就是已知降质图像  $f$  和降质矩阵  $\mathbf{K}$ , 求图像  $u$ 。由于复原问题的病态性, 本文引入数据项和规整项, 保证解  $u$  尽可能地逼近原始的未降质图像。

## 3 第二代Curvelet和光滑空间 $G_{p,q}^\beta$

式(6)是在小波域中求解变分的问题。但是,

利用小波对图像进行分解, 是用小波逼近奇异曲线, 最终表现为用“点”逼近“线”的过程, 二维小波基是“各向同性”的, 因此无法精确地表达图像边缘的方向。解决该问题的途径之一是寻找更适合图像分析的多分辨率分解与重构方法, 方法之一是第二代Curvelet框架。文献[5]对第二代Curvelet做了详细的介绍, 设  $\{\phi_\mu\}_\mu$  为  $L^2(\mathbb{R}^2)$  上的第二代Curvelet系统, 由文献[4]知  $\{\phi_\mu\}_\mu$  是  $L^2(\mathbb{R}^2)$  上的一个紧框架, 有:

$$\sum_\mu |\langle f, \phi_\mu \rangle|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (7)$$

$$f = \sum_\mu \langle f, \phi_\mu \rangle \phi_\mu \quad (8)$$

Besov空间的光滑性可以用小波系数的稀疏性度量, 但第二代Curvelet变换的频域铺贴与小波变换不一样, Besov空间的光滑性不能用波系数的稀疏性度量。文献[5]根据Curvelet变换构造了一类新的光滑空间  $G_{p,q}^\beta$ , 频率的分解关联Curvelet的每个二进带序列  $\{x \in \mathbb{R}^d : 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$ , 再把每个二进带细分为  $2^{\frac{j}{2}}$  个不同方向的楔子, 当  $d=2$  时, 只需把  $\mathbb{R}^2$  等分  $2^{\frac{j}{2}}$  得到这些楔子。Besov空间可使用统一的定义, 分区适应二进频段  $\{x \in \mathbb{R}^d : 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$  和曲波分裂的频率空间, 可以认为  $G_{p,q}^\beta$  是一个精致的Besov空间, 用第二代Curvelet变换的系数的稀疏性描述其范数为:

$$\|f\|_{G_{p,q}^\beta} \approx \left( \sum_{(j,l)} 2^{jq(\beta + \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}))} \left( \sum_k |\langle f, \phi_{j,l,k} \rangle|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (9)$$

## 4 新模型及其在 $G_{p,q}^\beta$ 空间Curvelet收缩求解

由于小波描述轮廓不够精确, 本文在空间  $G_{p,q}^\beta$  建立新的复原模型, 用Curvelet收缩求解。为了方便叙述, 采用  $f_\mu$  和  $u_\mu$  分别表示  $f$  和  $u$  的第二代Curvelet变换的  $\mu$  系数, 采用文献[4]的记号有:

$$\begin{cases} \mu = (j, l, k) \\ |\mu| = j & j \geq 0; l = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1; k \in \mathbb{Z}^2 \\ \mu' = (j, l, k) \\ |\mu'| = j & j > 0; l = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1; k \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

由文献[5]有:

$$B_{1,1}^1(\mathbb{R}^2) \mapsto G_{1,1}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2) B_{2,2}^{-s}(\mathbb{R}^2) \mapsto G_{2,2}^{-s-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^2) \quad (10)$$

考虑到  $B_{p,q}^\beta$  空间的半范数与范数的差别在于小波尺度项, 文献[4]从Besov空间的图像分解泛函模型出发给出的式(3)是不严格的, 因此本文在之后的计

算中把式(6)在  $G_{p,q}^\beta$  空间改写, 得到图像复原新模型:

$$\inf_u F(u) = \lambda \left( \|u\|_{G_{11}^1(R^2)}^{\frac{1}{2}} - \sum_{0,0,k} |\langle u, \phi_{0,0,k} \rangle| \right) + \|Ku - f\|_{G_{2,2}^{-s-\frac{1}{4}}(R^2)}^2 \quad (11)$$

求解变分问题式(11)将导致一个关于  $u$  耦合的非线性方程, 其中的  $K^*Ku$  项对求解带来困难。本文引入替代函数消除  $K^*Ku$  对求解带来的影响, 因为  $K$  可以被正则化, 所以不失一般性, 限制  $\|K^*K\| < 1$ 。受文献[8]的启示, 变分函数式(10)的替代函数定义为:

$$\inf_u F^{\text{new}}(u, a) = \lambda \left( \|u\|_{G_{11}^1(R^2)}^{\frac{1}{2}} - \sum_{0,0,k} |\langle u, \phi_{0,0,k} \rangle| \right) + \|Ku - f\|_{G_{2,2}^{-s-\frac{1}{4}}(R^2)}^2 + \|u - a\|_{G_{2,2}^{-s-\frac{1}{4}}(R^2)}^2 - \|K(u - a)\|_{G_{2,2}^{-s-\frac{1}{4}}(R^2)}^2 \quad (12)$$

式(12)的解可用迭代算法逼近为:

$$\begin{cases} a_0 = u_0 \\ u_0 = f \end{cases} \quad (13-1)$$

$$\begin{cases} a_n = u_n \\ u_n = \arg \inf_u F^{\text{new}}(u, a_{n-1}) \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (13-2)$$

由式(9)可得:

$$\|u\|_{G_{11}^1(R^2)}^{\frac{1}{2}} - \sum_{0,0,k} |\langle u, \phi_{0,0,k} \rangle| \approx \sum_{\mu'} 2^{-|\mu'|/4} |u_{\mu'}|$$

同样地, 可用Curvelet系数表示式(12)中的其他几项。在  $G_{p,q}^\beta$  空间, 替代函数在Curvelet域的变分泛函为:

$$\begin{aligned} \inf_{\mu} F^{\text{new}}(u_{\mu}, a) &= \lambda \sum_{\mu'} 2^{-|\mu'|/4} |u_{\mu'}| + \\ &\sum_{\mu} 2^{|\mu|(-2s-\frac{1}{2})} |(Ku - f)_{\mu}|^2 + \\ &\sum_{\mu} 2^{|\mu|(-2s-\frac{1}{2})} |(u - a)_{\mu}|^2 - \\ &\sum_{\mu} 2^{|\mu|(-2s-\frac{1}{2})} |(K(u - a))_{\mu}|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

借鉴和发展文献[4]和[8]的方法, 式(14)的极小化可以分别由求每一项的最小化得到, 有:

$$\begin{aligned} (u_n)_{\mu} &= \arg \min_{\mu} \left( \lambda \sum_{\mu'} 2^{-|\mu'|/4} |u_{\mu'}| + \right. \\ &\sum_{\mu} 2^{|\mu|(-2s-\frac{1}{2})} |(Ku - f)_{\mu}|^2 + \\ &\sum_{\mu} 2^{|\mu|(-2s-\frac{1}{2})} |(u - a_{n-1})_{\mu}|^2 - \\ &\left. \sum_{\mu} 2^{|\mu|(-2s-\frac{1}{2})} |(K(u - a_{n-1}))_{\mu}|^2 \right) \end{aligned} \quad (15)$$

1) 当  $j=0$  时, 式(15)的解为:

$$(u_n)_{\mu} = (a_{n-1} + K^*f - K^*Ka_{n-1})_{\mu} \quad (16)$$

式(16)是第二代Curvelet变换中图像大致轮廓部分的系数,  $K^*$  是  $K$  的共轭矩阵。

2) 当  $j \neq 0$  时,  $\mu = \mu'$ , 记  $T_{\mu} = \frac{\lambda 2^{\frac{-|\mu|}{4}}}{2^{|\mu|(-2s-\frac{1}{2})+1}}$ ,

$r_{n-1} = K^*f + a_{n-1} - K^*Ka_{n-1}$ , 则式(14)的解为:

$$(u_n)_{\mu} = P_{T_{\mu}}((r_{n-1})_{\mu}) = \begin{cases} (r_{n-1})_{\mu} - T_{\mu} & (r_{n-1})_{\mu} > T_{\mu} \\ 0 & -T_{\mu} \leq (r_{n-1})_{\mu} \leq T_{\mu} \\ (r_{n-1})_{\mu} + T_{\mu} & (r_{n-1})_{\mu} < -T_{\mu} \end{cases} \quad (17)$$

可以看出, 式(17)是一个阈值为  $T_{\mu} > 0$  的软阈值函数, 是第二代Curvelet变换中图像细节部分的系数, 与文献[11]中的Curvelet阈值很相似。

下面证明迭代解的收敛性。

证明 为了方便, 分别  $j=0$  和  $j \neq 0$  两种情况。

1)  $j=0$  时,  $(u_n)_{\mu} = (a_{n-1} + K^*f - K^*Ka_{n-1})_{\mu}$ ,

由式(13)有:

$$(u_n)_{\mu} = (u_{n-1} + K^*f - K^*Ku_{n-1})_{\mu} \quad (18)$$

取  $m > 1$ , 有:

$$(u_{n+m})_{\mu} = (u_{n+m-1} + K^*f - K^*Ku_{n+m-1})_{\mu} \quad (19)$$

式(19)减去式(18), 整理得:

$$(u_{n+m} - u_n)_{\mu} = [(I - K^*K)(u_{n+m-1} - u_{n-1})]_{\mu} \quad (20)$$

令  $g_N = u_{n+m} - u_n$ ,  $\rho = I - K^*K$ , 因为  $\|K^*K\| < 1$ , 则  $\|\rho\| < 1$ , 式(20)可简化为:

$$(g_N)_{\mu} = (\rho g_{N-1})_{\mu} \quad (21)$$

式(21)中的  $\{(g_N)_{\mu}\}$  列收敛于0, 所以当  $N$  较大时有  $(u_{n+m})_{\mu} - (u_n)_{\mu} \rightarrow 0$ , 从而  $(u_n)_{\mu}$  收敛。

2)  $j \neq 0$ ,  $r_{n-1} = K^*f + a_{n-1} - K^*Ka_{n-1}$ , 与情况1)类似, 可证  $\{r_n\}$  列收敛, 在  $s$  取定值(实验中取  $s=1$ ) 的情况下,  $T_{\mu}$  为常值, 则阈值函数  $P_{T_{\mu}}((s_{n-1})_{\mu})$  也收敛。证毕。

由式(9)、式(16)和式(17), 可把解在时域写为:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{(0,0,k)} \langle a_{n-1} + K^*f - K^*Ka_{n-1}, \phi_{0,0,k} \rangle \phi_{0,0,k} + \\ &\sum_{(j,l,k), j \geq 1} P_{T_{\mu}}(\langle a_{n-1} + K^*f - K^*Ka_{n-1}, \phi_{j,l,k} \rangle) \phi_{j,l,k} \end{aligned} \quad (22)$$

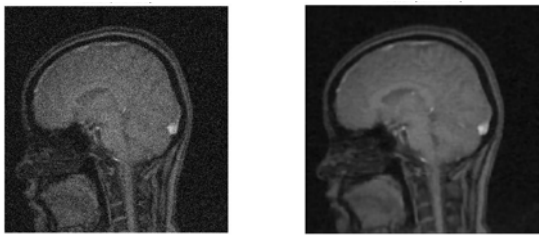
式(22)是本文推导出的一个关键公式, 可以发现, 求解  $u$  实质是一个二代Curvelet变换域的阈值收缩过程, 与文献[9]和文献[10]的阈值收缩不同。文献[9]和文献[10]的阈值收缩是先进行第一代

Curvelet或Shearlet全局阈值收缩, 但最终还是需要解高阶偏微分方程。文献[13]提出的Besov空间的小波块阈值方法不容易计算阈值。

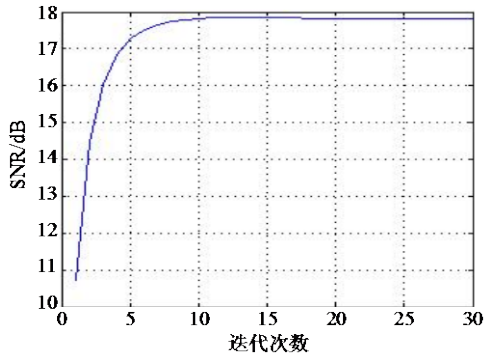
### 5 算法步骤与验证

为了验证本文提出模型的图像复原效果, 选用国际标准图像和医学人脑核磁共振图像做实验。算法步骤如下:

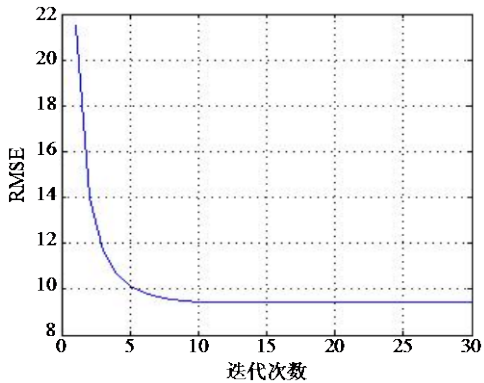
- 1) 对原始图像和高斯模糊核函数 $h$ 进行卷积并添加随机噪声, 获得降质图像  $f$ ;
- 2) 对图像采用周期边界条件, 并由高斯模糊核函数 $h$ 得到矩阵 $K$ , 此时 $K$ 是一个循环与循环块的块矩阵, 即BCCB矩阵(详细计算参见文献[12]);
- 3) 先初始化  $a_0 = u_0, u_0 = f$ , 按第二代Curvelet变换域局部阈值收缩公式(13)和式(22)求解,  $K^*$ 和 $K$ 是阶数很大的矩阵, 在计算  $K^* f$  和  $K^* K a_{n-1}$  时由文献[12]知, 可不存储  $K^*$  和  $K$ , 由第一列用傅里叶变换可计算;



a. 降质磁共振图像      b. 本文方法的复原图像



c. 图像迭代过程中的SNR



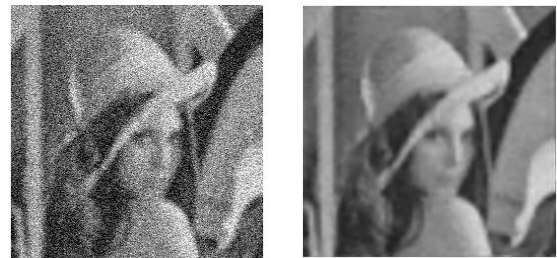
d. 图像迭代过程中的RMSE

图1 人脑核磁共振图像的复原及其算法收敛曲线

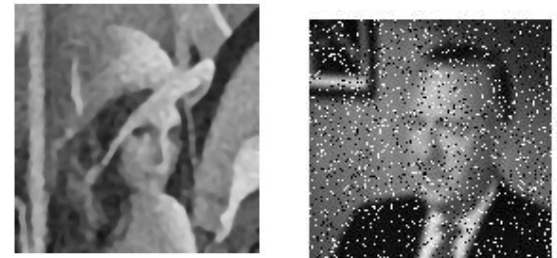
4)  $a_n = u_n, (n=1, 2, \dots)$ , 按步骤3)中的方法迭代。

实验用Dell optiplex 755(内存1G、Windows XP)的PC机在matlab7.04环境下完成的。经多次试验取  $\lambda = 1.75, s = 1$ 。

人脑核磁共振图像用模糊核函数半径为7、方差为5的高斯函数模糊, 再添加方差为25的白噪声获得降质图像, 降质图像的SNR为2.78 dB, 如图1a所示; 用本文算法复原图像的SNR为17.93 dB, 图1b为迭代25次的图像, 耗时17.56 s; 从图1 c和图1 d可以看出, 迭代11次算法就收敛了, 在1~11次的迭代过程中SNR逐渐增大, 均方差逐渐减小, 11次以后SNR和均方差都趋于稳定不变, 即迭代算法已经收敛了。



a. 降质的LENNa图像      b. 本文方法的复原图像



c. LHLAV模型复原的图2a图像      d. 降质的SIR图像



e. 本文方法复原图2d图像      f. LHLAV模型复原的图2d图像

图2 国际标准图像LENNa和SIR的复原

大小为 $256 \times 256$ 的LENNa图像用半径为7、方差为9的高斯函数模糊, 再添加方差为35的白噪声获得的降质图像, 用本文提出的模型复原图像, 降质图像的信噪比为1.78 dB, 已经是非常严重的降质图像, 如图2a所示, 本文模型复原信噪比为15.50 dB, 如图2b所示, 耗时17.39 s; LHLAV模型复原的SNR为14.46 dB, 如图2c所示, 耗时27.96 s。大小为 $128 \times 128$ 的SIR图像用模糊核函数半径为7, 方差为5的高斯函数模糊, 再添加强度为0.12椒盐噪声获得

降质图像, 降质比较严重, 如图2d所示; 本文算法复原的SNR为12.83 dB, 图2e为迭代30次的图像, 耗时11.25 s; LHLLAV模型复原的SNR为11 dB, 如图2f所示, 耗时19.89 s。

分析实验结果, 可得出以下结论: 同等情况下本文算法都要比LHLLAV模型的信噪比高, 且算法复杂度低于LHLLAV模型。但是本文模型不能用于盲复原, 要求点扩散函数 $h$ 已知(即 $\mathbf{K}$ 已知), 在实际应用中首先要辨识出 $h$ 。本文模型对椒盐噪声的复原不是很有效。

## 6 结束语

在回顾和总结TV模型、DT模型、Jiang模型和LHLLAV模型图像复原方法的基础上, 提出了在 $G_{p,q}^\beta$ 光滑空间上的图像复原模型, 详细推导了新模型在 $G_{p,q}^\beta$ 空间通过第二代Curvelet收缩求解过程, 并得到了一个关键性的收缩求解公式, 避免了求复杂的高阶偏微分方程, 从本文实验中可以看出良好的复原效果。

图象复原最初是维纳滤波和小波域等一系列频域方法, 近几年是偏微分方程为主线的以TV模型为代表的正则化时域方法。最近人们又把超小波(edgelets, wedgelets, Ridgelet, curvelets和contourlets等)引入到图像复原中, 可以预见变分泛函和超小波相结合, 在Besov,  $G_{p,q}^\beta$ 等新型空间建立赋予新含义的图像复原方法成为即将到来的又一个主流方法。

### 参 考 文 献

- [1] OSHER S, SOLÉ A, VESE L. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm[J]. Multiscale Model Simul, 2004, 1(3): 349-370.
- [2] DAUBECHIES I, TESCHKE G. Wavelet based image decomposition by variational functionals[J]. Wavelet Applications in Industrial Proceedings of SPIE, 2004, 5266: 94-105.
- [3] 江玲玲, 冯象初, 殷海青. 基于Besov空间的图像盲复原算法[J]. 数据采集与处理, 2008, 6: 678-682.  
JIANG Ling-ling, FENG Xiang-chu, YIN Hai-qing. Blind image restoration algorithm based on besov spaces[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2008, 6: 678-682.
- [4] JIANG Ling-ling, FENG Xiang-chu, YIN Hai-qing. Variational image restoration and decomposition with curvelet shrinkage[J]. Math Imaging, 2008, 30: 125-132.
- [5] BORUP L, NIELSEN M. Frame decomposition of decomposition spaces[J]. The Journal of Fourier Analysis and Applications, 2007, 13(1): 39-70.
- [6] LINH H L, LUMINITA A. Vese Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative hilbert-sobolev spaces[J]. Appl Math Optim, 2008, 58: 167-193.
- [7] GUSTAVO G, TABACCO A. Wavelet decompositions of anisotropic besov spaces[J]. Math Nachr, 2002, 239(1): 80-102.
- [8] DAUBECHIES I, DEFRISE M, MOL C D. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [9] MA Jian-wei, PLONKA G. Combined curvelet shrinkage and nonlinear anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(9): 2198-2206.
- [10] GLENN R, EASLEY D L, COLONNA F. Shearlet-based total variation diffusion for denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(2): 260-268.
- [11] MA Jian-wei, PLONKA G. Computing with curvelets from image processing to turbulent flows[J]. Computing in Science & Engineering, 2009, 48(18): 1457-146.
- [12] HANSEN P C, NAGY J G. Deblurring images matrices, spectra, and filtering[M]. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [13] CHESNEAU C, FADILIB M J, Starck J L. Image deconvolution by stein block thresholding[C]//16th IEEE International Conference on Image Processing. Cairo, Egypt: IEEE, 2009: 1329-1332.

编辑 张俊