

# 不确定非线性系统高精度自适应模糊控制

潘永平, 黄道平, 孙宗海

(华南理工大学自动化科学与工程学院 广州 510641)

**【摘要】**针对一类未知边界函数的不确定仿射非线性系统, 提出一种高跟踪精度特性的自适应模糊控制器。基于变论域模糊系统理论证明了最优逼近误差在特定条件下具有局部收敛特性。通过以跟踪误差作为输入并选择适当的自适应参数, 设计出逼近误差局部收敛的自适应模糊控制器。以最优逼近误差存在未知上确界为主要假设, 证明了闭环系统在所有信号一致有界意义下的稳定性和跟踪误差收敛性。该控制器无需附加补偿器即可在理论上消除逼近误差对跟踪误差的影响, 从而实现平滑控制输入下的高精度跟踪性能。单力臂机械手控制的仿真结果表明了该方法的有效性。

**关键词** 自适应模糊控制; 逼近误差收敛; 高精度跟踪; 变论域模糊系统

**中图分类号** TP273

**文献标识码** A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.01.011

## Adaptive Fuzzy Control with High Accuracy for Uncertain Nonlinear Systems

PAN Yong-ping, HUANG Dao-ping, and SUN Zong-hai

(School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology Guangzhou 510641)

**Abstract** For a class of uncertain affine nonlinear systems with unknown boundary functions, an adaptive fuzzy controller (AFC) with the characteristic of high tracking accuracy is proposed in this paper. Based on the theory of variable universe fuzzy system, it is proved that the optimal fuzzy approximation error (FAE) has local convergence property under certain conditions. By using the tracking errors as inputs and selecting suitable adaptive parameters, an AFC with optimal FAE local convergence is developed. Under the key assumption that the optimal FAE is bounded, it is proved that the closed-loop system is stable in the sense that all involving variables are bounded and the tracking errors converge to zero. This approach can theoretically eliminate the effect of the FAE on the tracking errors without additional compensator, thus it can achieve high tracking accuracy with smooth control input. Simulated application of a single-link manipulator demonstrates the effectiveness of this approach.

**Key words** adaptive fuzzy control; approximation error convergence; high tracking accuracy; variable universe fuzzy systems

针对一类单输入单输出(SISO)仿射非线性系统, 文献[1]首次提出基于模糊逼近的自适应模糊控制器。在该类控制器的设计过程中, 为了得到闭环系统稳定性和跟踪误差收敛性, 最优逼近误差通常被假设为足够小或者零<sup>[1-3]</sup>。然而根据模糊系统的非线性逼近特性<sup>[1]</sup>, 这种处理方式并不总具有合理性。针对该问题, 学者们提出关于逼近误差的各种估计和补偿方法。基于间接型自适应模糊控制器, 文献[4]设计了不确定项边界参数自适应律, 文献[5]则引入了逼近误差上确界估计器。基于直接型自适应模糊控制器, 文献[6]在滑模控制框架下引入逼近误差自适应补偿器。然而文献[4-6]的控制器设计需要

已知部分边界函数, 且文献[4]还需已知最优逼近误差的上确界。此外, 文献[6]中的补偿器采用了误差绝对值积分的无界形式。由于跟踪误差无法完全消除, 文献[6]中补偿器的输出将会随着时间推移而无限增大, 因此并不能符合实际应用的要求。

变论域模糊系统其实是一种动态逐点收敛的插值器, 在规则不变的前提下, 其论域能够随着输入变量减小而收缩, 即相当于可增加模糊规则数量<sup>[7]</sup>。增加模糊规则数量能够显著增强模糊系统的非线性逼近能力<sup>[1]</sup>, 从而提高模糊系统的输出精度。并且, 变论域模糊系统还具有最优逼近误差局部收敛的特性, 即在特定条件下其对非线性函数的逼近误差最

收稿日期: 2010-06-12; 修回日期: 2011-10-14

基金项目: 国家自然科学基金(60704012); 中央高校科研业务费(2009zm0161)

作者简介: 潘永平(1982-), 男, 博士生, 主要从事逼近自适应控制、模糊控制、神经网络控制等方面的研究。

优值可以随着输入变量的收敛以更快的速度收敛至零。基于变论域理论的自适应模糊控制器已经在混沌系统<sup>[3,8]</sup>、四级倒立摆<sup>[9]</sup>、航机发电机组<sup>[10]</sup>等的控制问题中获得了成功应用。然而,文献[8]中控制器的高性能是与其监督控制项带来的巨大控制能量为代价的。另外,根据模糊系统的逼近特性,文献[8-10]中的模糊系统采用单个自适应参数会导致其非线性逼近能力受到限制;文献[3]中的模糊系统则没有以跟踪误差作为输入,因此并不能满足最优逼近误差局部收敛的充分条件。

本文针对一类未知边界函数且控制增益为未知函数的不确定仿射非线性系统,基于变论域模糊系统理论提出一种高跟踪精度的自适应模糊控制方法。首先,本文证明变论域模糊系统在特定条件下具有最优逼近误差局部收敛的特性;然后,通过以跟踪误差作为输入并选择模糊规则后件中心值作为自适应参数,构建最优逼近误差收敛的自适应模糊控制器;接着,以最优逼近误差存在未知上确界为主要假设,证明闭环系统在所有信号一致有界意义下的稳定性和跟踪误差收敛性;最后,本文将提出的控制器应用于单力臂机械手的控制问题中,以验证其有效性及控制性能。

### 1 控制问题描述

考虑如下 $n$ 阶SISO非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x) + g(x)u \\ y = x \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T \in R^n$  为系统可测状态向量;  $u \in R$  和  $y \in R$  分别为系统输入和输出信号;  $f(x)$  和  $g(x)$  为未知的连续非线性函数。不失一般性,假设对于能控域  $U_c \subset R^n$  内的  $\mathbf{x}$ , 存在未知边界  $f_U$ 、 $g_L$  和  $g_U$ , 使得  $|f(\mathbf{x})| \leq f_U$  并且  $0 < g_L \leq g(\mathbf{x}) \leq g_U$ 。

定义跟踪误差  $e_i = y_m - y$  以及误差向量  $\mathbf{E} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T$ , 其中  $y_m$  为存在  $n$  阶导数的有界参考输入信号。选取实向量  $\mathbf{k} = [k_n, k_{n-1}, \dots, k_1]^T$  使得  $s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n$  为Hurwitz多项式, 并选取式(1)系统的理想控制器为:

$$u^* = (-f(\mathbf{x}) + y_m^{(n)} + \mathbf{k}^T \mathbf{E}) / g(\mathbf{x}) \quad (2)$$

则可得到系统误差动态方程为:

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_n e = 0 \quad (3)$$

由  $\mathbf{k}$  的选取方法可知, 式(3)的所有根都在复平面左半开平面内, 因此有  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$ 。然而, 由于  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$  未知, 式(2)的理想控制器无法实现。

本文的设计目标为: 在未知任何边界函数的情况下, 设计模糊控制器及其参数自适应律, 保证闭环系统在所有信号一致有界意义下具有稳定性和跟踪误差收敛性。

## 2 变论域模糊系统及其特性

### 2.1 变论域模糊系统描述

考虑以误差及其各阶导数为输入的  $n$  输入单输出模糊系统。假设  $X_i = [-U_i, U_i]$  和  $Y = [-V, V]$  分别为系统输入  $e_i$  和输出  $u$  的论域,  $\mathbf{A}_i = \{A_i^l\}_{(l=1,2,\dots,m)}$  为  $e_i$  的元组模糊划分<sup>[8]</sup>,  $\mathbf{B} = \{B^j\}_{(j=1,2,\dots,M)}$  为  $u$  的一般模糊划分,  $\bar{e}_i^l$  和  $\bar{u}^j$  分别为  $A_i^l$  和  $B^j$  的峰点。视  $\mathbf{A}_i$  和  $\mathbf{B}$  为语言变量集合, 则可形成如下  $M = m^n$  条模糊推理规则:

$$R^j: \text{If } x_1 \text{ is } A_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^{l_n}, \text{ then } y \text{ is } B^{l_1 l_2 \dots l_n} \quad (4)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;  $l_i = 1, 2, \dots, m$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $l_1 l_2 \dots l_n$  表示元素  $l_1, l_2, \dots, l_n$  的排列。记  $\mu_{A_i^l}$  为  $A_i^l$  的隶属度函数, 则采用乘机推理机、单值模糊器和中心平均解模糊器的模糊系统可表示为:

$$u = \hat{F}(\mathbf{E}) = \frac{\sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m \dots \sum_{l_n=1}^m \bar{u}^{l_1 l_2 \dots l_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(e_i) \right)}{\sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m \dots \sum_{l_n=1}^m \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(e_i) \right)} \quad (5)$$

其中,  $\sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m \dots \sum_{l_n=1}^m \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(e_i) \right) = 1$ 。

模糊系统的变论域即论域  $X_i$  和  $Y$  可以随着  $e_i$  和  $y$  的变化而调整, 记为:

$$\begin{cases} X_i(e_i) = [-\alpha_i(e_i)U_i, \alpha_i(e_i)U_i] \\ Y(u) = [-\beta(u)V, \beta(u)V] \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\alpha_i(e_i)$  和  $\beta(u)$  分别为输入和输出论域伸缩因子,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。通常可设计为如下形式<sup>[8]</sup>:

$$\alpha_i(e_i) = 1 - \lambda \exp(-\kappa_i e_i^2) \quad (7)$$

其中,  $\lambda \in (0, 1]$  为伸缩精度参数;  $\kappa_i > 0$  为伸缩区域参数。如此, 式(5)的变论域形式可表示为<sup>[7]</sup>:

$$u = \hat{F}(\mathbf{E}) = \beta(u) \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m \dots \sum_{l_n=1}^m \bar{u}^{l_1 l_2 \dots l_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(e_i / \alpha_i(e_i)) \right) \quad (8)$$

定义第  $l_1 l_2 \dots l_n$  个模糊基函数为:

$$\xi_{l_1 l_2 \dots l_n}(\mathbf{E}) = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(e_i / \alpha_i(e_i)) \quad (9)$$

则式(8)可记为如下紧凑形式:

$$u(\mathbf{E} | \boldsymbol{\theta}) = \hat{F}(\mathbf{E} | \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{E}) \quad (10)$$

其中,  $\theta = [\beta\bar{u}^1, \beta\bar{u}^2, \dots, \beta\bar{u}^M] \in R^M$ ;  $\xi(\mathbf{E}) = [\xi_1(\mathbf{E}), \xi_2(\mathbf{E}), \dots, \xi_M(\mathbf{E})] \in R^M$ 。如此,  $\xi(\mathbf{E})$  可以通过  $\alpha_i(e_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  在线修改,  $\beta(y)$  的设计则通过  $\theta$  融入到自适应律中<sup>[11]</sup>。

### 2.1 最优逼近误差收敛特性

定义紧集  $\Omega_e = [-U_1, U_1] \times [-U_2, U_2] \times \dots \times [-U_n, U_n]$ ,  $\Omega_\theta = \{\theta: \|\theta\| \leq M_\theta\}$ , 其中  $M_\theta \in R^+$ 。因此,  $\exists M_e \in R^+$  使得  $\|\mathbf{E}\| \leq M_e$ 。定义式(10)对未知连续函数  $F(\mathbf{E})$  的最优逼近误差为:

$$w \square F(\mathbf{E}) - \hat{F}(\mathbf{E} | \theta^*) \quad (11)$$

其中,  $\theta^*$  为如下定义的最优参数向量:

$$\theta^* \square \arg \min_{\theta \in \Omega_\theta} (\sup_{e \in \Omega_e} |F(\mathbf{E}) - \hat{F}(\mathbf{E} | \theta)|) \quad (12)$$

以下根据文献[1]给出本文的第一个主要结果。

**定理 1** 假设未知但有界的连续函数  $F(e)$  在  $\Omega_e$  内二阶可导, 式(10)中变论域模糊系统的输入伸缩因子为式(7),  $\mathbf{A}_i$  是正规、一致和完备的模糊划分。如果式(7)中  $\lambda = 1$  且  $\|\mathbf{E}\| \rightarrow 0$ , 则式(11)的最优逼近误差  $w$  以比  $\|\mathbf{E}\|$  更快的速度收敛于0, 即  $w$  在  $\|\mathbf{e}\|=0$  的小邻域内具有局部收敛性。

证明 由模糊系统的二阶逼近特性<sup>[11]</sup>即有:

$$w \leq \|F(\mathbf{E}) - \hat{F}(\mathbf{E} | \theta)\|_\infty \leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n (\|\partial^2 F(e_i) / \partial e_i^2\|_\infty \alpha_i^2(e_i) h_i^2) \quad (13)$$

式中,  $h_i = \max_{l_i=1, 2, \dots, m-1} |\bar{e}_i^{l_i+1} - \bar{e}_i^{l_i}|$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ 。根据式(7)和  $\lambda = 1$  可得:

$$\lim_{e_i \rightarrow 0} \frac{\alpha_i^2(e_i)}{e_i} = \lim_{e_i \rightarrow 0} \frac{(1 - \exp(-\kappa_i e_i^2))^2}{e_i} = 0 \quad (14)$$

当  $\|\mathbf{E}\| \rightarrow 0$  时, 即有  $e_i \rightarrow 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ 。由式(13),  $w$  的上界可表示为:

$$w_{\text{up}} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n (\|\partial^2 F(e_i) / \partial e_i^2\|_\infty \alpha_i^2(e_i) h_i^2) \quad (15)$$

对  $w_{\text{up}}$  和  $\|\mathbf{E}\|$  作无穷小比较有:

$$\lim_{\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0} \frac{w_{\text{up}}}{\|\mathbf{E}\|} = \lim_{\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0} \left( \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n (\|\partial^2 F(e_i) / \partial e_i^2\|_\infty \alpha_i^2(e_i) h_i^2) / \|\mathbf{E}\| \right) =$$

$$\lim_{e_i \rightarrow 0, i=1, 2, \dots, n} \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \frac{\|\partial^2 F(e_i) / \partial e_i^2\|_\infty \alpha_i^2(e_i) h_i^2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2}} =$$

$$\lim_{e_i \rightarrow 0, i=1, 2, \dots, n} \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \frac{\|\partial^2 F(e_i) / \partial e_i^2\|_\infty h_i^2 \alpha_i^2(e_i) / e_i}{\text{sign}(e_i) \sqrt{(e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2) / e_i^2}}$$

如此, 根据式(14)、 $\lim_{e_i \rightarrow 0, i=1, 2, \dots, n} ((e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2) / e_i^2)^{1/2} \geq 1$  和  $w \leq w_{\text{up}}$ , 可得出:

$$\lim_{\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0} (w / \|\mathbf{E}\|) = 0 \quad (16)$$

因此,  $w$  是比  $\|\mathbf{E}\|$  高阶的无穷小, 也即如果  $\|\mathbf{E}\| \rightarrow 0$ , 则  $w$  以比  $\|\mathbf{E}\|$  更快的速度收敛于0。证毕

## 3 自适应模糊控制器设计

选取式(10)的变论域模糊系统逼近式(2)的理想控制器, 则最优逼近误差重新写为:

$$w \square u^* - u(\mathbf{E} | \theta^*) \quad (17)$$

其中,  $\theta^*$  重新表示为:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Omega_\theta} (\sup_{e \in \Omega_e} |u^* - u(\mathbf{E} | \theta)|) \quad (18)$$

对式(1)~式(3)进行适当变换处理, 可得:

$$e^{(n)} = -\mathbf{k}^T \mathbf{E} + g(u^* - u(\mathbf{E} | \theta)) \quad (19)$$

根据文献[12], 可以得出如下引理。

**引理 1** 对于式(10)的模糊系统  $u(\mathbf{E} | \theta)$ , 一定存在式(18)定义的  $\theta^*$  使得:

$$g(u^* - u(\mathbf{e} | \theta)) = \sum_{j=1}^M c_j (\theta_j^* - \theta_j) \xi_j(\mathbf{E}) + c_0 w \quad (20)$$

式中,  $c_0, c_j \in R^+$ ;  $\theta_j^*$  和  $\theta_j$  分别为向量  $\theta^*$  和  $\theta$  中的第  $j$  个元素,  $j=1, 2, \dots, M$ 。

令  $\tilde{\theta} = \theta^* - \theta$ ,  $\tilde{\theta}_j = \theta_j^* - \theta_j$ ,  $j=1, 2, \dots, M$ 。把式(20)代入式(19), 即有:

$$e^{(n)} = -\mathbf{k}^T \mathbf{E} + \sum_{j=1}^M c_j \tilde{\theta}_j \xi_j(\mathbf{E}) + c_0 w \quad (21)$$

也即等价于:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A} \mathbf{E} + \mathbf{B} \left( \sum_{j=1}^M c_j \tilde{\theta}_j \xi_j(\mathbf{E}) + c_0 w \right) \quad (22)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \dots & -k_1 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

由  $\mathbf{k}$  的选择方法可知  $\mathbf{A}$  为稳定矩阵, 因此给定一个正定对称矩阵  $\mathbf{Q}$ , 一定存在唯一正定对称矩阵  $\mathbf{P}$  满足如下Lyapunov方程:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (23)$$

如此可得出本文第二个主要结果。

**定理 2** 对于式(1)表示的能控域  $U_c$  内的系统, 选取式(10)为控制器, 式(17)最优逼近误差  $w$  的上界  $w_{\text{up}}$  由式(15)给出。则如果设计参数自适应律为:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \gamma \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \xi(\mathbf{E}) \\ \text{if } \|\theta\| < M_\theta \\ \text{or } (\|\theta\| = M_\theta \text{ and } \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \theta^T \xi(\mathbf{E}) \leq 0) \\ \gamma \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\xi(\mathbf{E}) - \theta \theta^T \xi(\mathbf{E}) / \|\theta\|^2) \\ \text{if } \|\theta\| = M_\theta \text{ and } \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \theta^T \xi(\mathbf{E}) > 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中,  $\gamma \in R^+$  为学习律。那么在式(7)中一定存在适当的  $\kappa_i$  值,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 使得闭环系统: 1) 具有所有变量一致有界意义下的稳定性, 即对于  $\theta(0) \in \Omega_\theta$ ,  $\exists M_x, M_\theta, M_u \in R^+$ , 使得  $\|x\| \leq M_x$ ,  $\|\theta\| \leq M_\theta$ ,  $|u| \leq M_u$ ; 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|E(t)\| = 0$ 。

证明 构造候选Lyapunov函数为:

$$V = \frac{1}{2} E^T P E + \frac{1}{2\gamma} \sum_{j=1}^M c_j \tilde{\theta}_j^2 \quad (25)$$

$V$  对时间  $t$  求导并结合式(22)和式(23), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2} E^T Q E - \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^M c_j \tilde{\theta}_j \dot{\theta}_j + \\ & E^T P B \left( \sum_{j=1}^M c_j \tilde{\theta}_j \xi_j(E) + c_0 w \right) = \\ & -\frac{1}{2} E^T Q E + E^T P B c_0 w + \\ & \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^M c_j \tilde{\theta}_j (\gamma E^T P B \xi_j(E) - \dot{\theta}_j) \end{aligned}$$

把式(24)代入上式并由文献[1]中的结果, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2} E^T Q E + E^T P B c_0 w \leq \\ & -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) \|E\|^2 + p_{\max} c_0 \|E\| \|w\| \quad (26) \end{aligned}$$

式中,  $\lambda_{\min}(Q)$  为  $Q$  的最小特征值;  $p_{\max}$  表示  $p_n$  中最大的元素,  $p_n$  为  $P$  的第  $n$  列。

由定理1中  $w$  是比  $\|E\|$  高阶的无穷小以及式(13)可得, 对于给定的  $\|E(0)\| \in M_e$ , 在式(7)中一定存在适当的  $\kappa_i$  值,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 使得:

$$|w| < \lambda_{\min}(Q) \|E\| / 2p_{\max} c_0 \quad (27)$$

对于  $\|E\| \neq 0$  总是成立。把式(5)代入式(4), 可知  $\dot{V} < 0$ ,  $\forall \|E\| \neq 0$ , 即闭环系统是渐近稳定的。如此可得  $E, x, \theta \in L_\infty$ , 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|E(t)\| = 0$ 。又因为  $\theta(0) \in \Omega_\theta$ , 故  $\exists M_e, M_x, M_\theta \in R^+$ , 使得  $\|E\| \leq M_e$ ,  $\|x\| \leq M_x$ ,  $\|\theta\| \leq M_\theta$ 。再根据式(9)和式(10), 可得  $u \in L_\infty$ , 即  $\exists M_u \in R^+$ , 使得  $|u| \leq M_u$ 。证毕

注: 对于  $p$  的多输入多输出(MIMO)仿射非线性系统, 通过文献[13]附录D的方法可转化为  $p$  个如式(1)所示的SISO系统。因此, 本文的结论可以直观地拓展到MIMO系统中。

### 4 仿真实例

考虑如下单力臂机械手模型<sup>[14]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(v x_2 + m_f g_v l_f \cos(x_1) + \tau_d) / J + (1/J) u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (28)$$

式中,  $x_1$  为机械手角位置;  $x_2$  为机械手角速度;  $m_f$  为机械手质量;  $l_f$  为机械手长度;  $J$  为惯性系数;  $v$  为动态摩擦系数;  $y$  为被控变量;  $u$  为控制输入;  $\tau_d$  为如下包含库仑摩擦和黏性摩擦的摩擦模型:

$$\tau_d = \text{sgn}(x_2(t))(K_1 |x_2(t)| + K_2) \quad (29)$$

其中,  $K_1 \in R^+$  和  $K_2 \in R^+$  为常数。选择参数  $m_f = 1 \text{ kg}$ ,  $l_f = 0.25 \text{ m}$ ,  $v = 2$ ,  $J = 1.33 m_f l_f^2$ ,  $K_1 = 0.3$ ,  $K_2 = 1.5$ 。设置状态初值  $x(0) = [0.15, 0]$ , 参考输入信号  $y_m = \sin(t)$ 。

选取  $E_1 = 5$ ,  $E_2 = 5$ ,  $m = 2$ , 由  $M = m^2$ , 可得到4条模糊规则。设计隶属度函数为:

$$\begin{cases} \mu_{A_1^i} = 1 / (1 + \exp(1.5e_1)) \\ \mu_{A_2^i} = 1 / (1 + \exp(-1.5e_1)) \end{cases} \quad i = 1, 2$$

令  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ ,  $Q = \text{diag}(10, 10)$ , 则可得出  $P = [15, 5; 5, 5]$ 。令  $\theta(0) = [0, 1, \dots, 0]^T$ ,  $M_\theta = 50$ ,  $\gamma = 300$ ,  $\lambda = 0.99$ ,  $\kappa_1 = 5$ ,  $\kappa_2 = 1$ 。

表1 不同控制器的控制性能比较

性能指标	本文控制器	传统自适应模糊控制器
$e_{s1}\%$	3.000	6.667
$e_{s2}\%$	0.850 0	11.200 0
$J(\text{ITAE})$	1.219	2.058
$J(\text{IAE})$	0.307 4	0.381 1
$E_c$	274.6	274.2

定义跟踪指标  $J(\text{ITAE}) = \int_0^t \tau \|E(\tau)\| d\tau$ ,

$J(\text{IAE}) = \int_0^t \|E(\tau)\| d\tau$  以及控制能量  $E_c = \int_0^t u^2(\tau) d\tau$ 。

令  $e_{s1}\%$  和  $e_{s2}\%$  分别表示  $e_1$  和  $e_2$  的稳态误差百分比。设置运行时间  $t = 20 \text{ s}$ , 仿真结果如图1~图6所示。

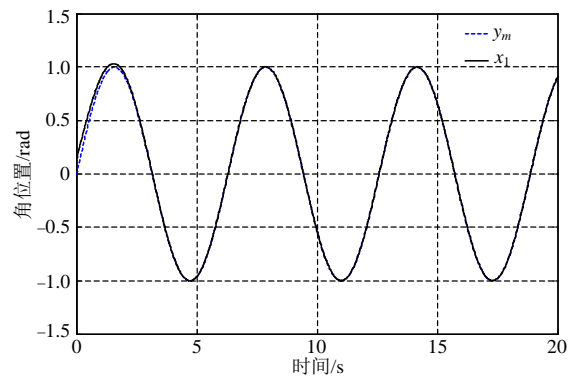


图1 输出y跟踪 $y_m$ 曲线

可见，本文控制器无需任何边界函数的信息即可在保证控制输入平滑的前提下(见图6)实现对机械臂角位置  $x_1$  和角速度  $x_2$  的理想跟踪(见图1、图2)。归因于模糊系统在变论域下能够大量增加模糊控制规则，本文控制器在跟踪精度方面相比传统自适应模糊控制器<sup>[1]</sup>具有明显优势(见图3~图5)。表1为本文控制器与传统自适应模糊控制器的控制性能比较结果。可见，在控制能量相当的情况下，本文控制器获得的  $e_{s1}\%$ 、 $e_{s2}\%$ 、 $J(ITAE)$ 和 $J(IAE)$ 分别可以降低到传统自适应模糊控制器的45.00%、7.589%、59.23%和80.66%。

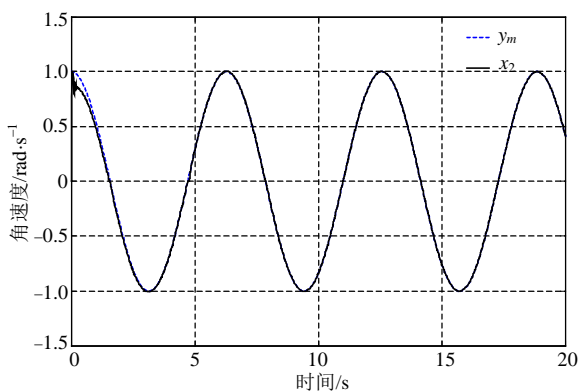


图2 状态  $x_2$  跟踪  $y'_m$  曲线

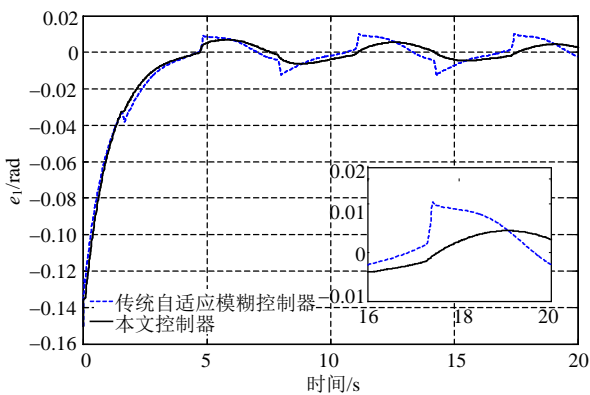


图3 输出跟踪误差  $e_1$  比较图

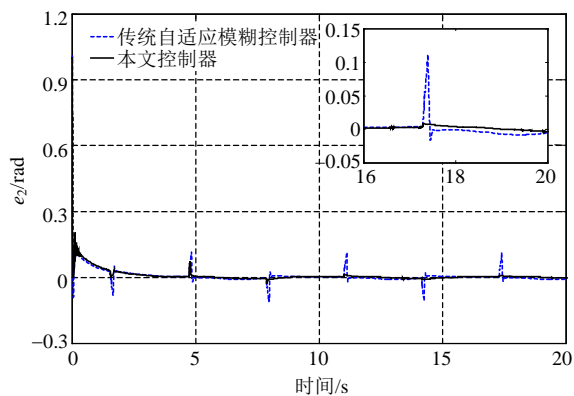


图4 状态跟踪误差  $e_2$  比较图

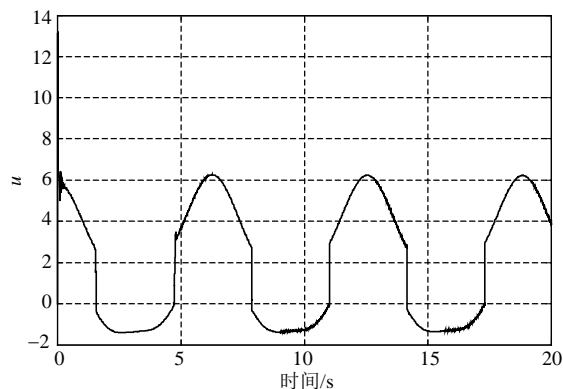


图5 控制输入  $u$  曲线

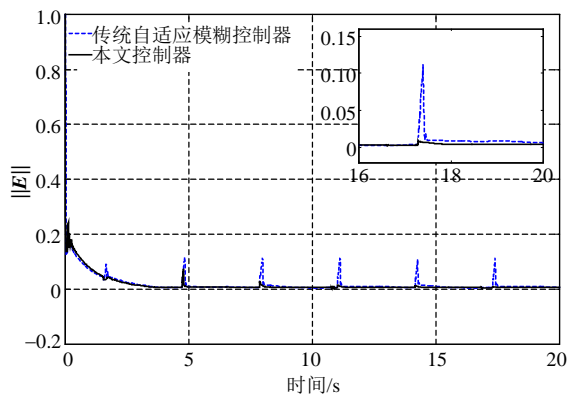


图6 跟踪误差向量范数比较图

### 5 结论

本文针对一类未知边界函数且控制增益为未知函数的仿射非线性系统，基于变论域模糊系统设计了具有稳定性和跟踪误差收敛特性的自适应模糊控制器。在控制器设计过程中放宽了假设条件的限制，即只要求最优逼近误差存在未知上确界。区别于采用逼近误差估计和补偿的方法，本文借助变论域模糊系统的最优逼近误差局部收敛特性消除逼近误差对跟踪误差的影响，因此可以在无需附加补偿器的情况下达到高精度的跟踪性能。应用于单力臂机械手控制的仿真结果表明，本文控制器仅需使用少量的模糊规则，便可以在确保控制输入平滑的前提下实现高精度的跟踪性能，其结果明显优于传统自适应模糊控制器。

### 参考文献

[1] WANG L. A course in fuzzy systems and control[M]. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.  
 [2] KIM Y T, BIEN Z Z. Robust adaptive fuzzy control in the presence of external disturbance and approximation error[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 148(3): 377-393.  
 [3] WANG Jiang, SI Wen-jie, LI Hui-yan. Robust ISS-satisficing variable universe indirect fuzzy control for chaotic systems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 39(1):

- 28-38.
- [4] PARK J H, SEO S J, PARK G T. Robust adaptive fuzzy controller for nonlinear system using estimation of bounds for approximation errors[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 133(1): 19-36.
- [5] PHAN P A, GALE T J. Two-mode adaptive fuzzy control with approximation error estimator[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2007, 15(5): 943-955.
- [6] 王芹, 张天平, 文慧. 具有非线性输入的鲁棒自适应模糊滑模控制[J]. *电机与控制学报*, 2008, 12(1): 52-57.  
WANG Qin, ZHANG Tian-ping, WEN Hui. Robust adaptive fuzzy sliding mode control with nonlinear input[J]. *Electric Machines and Control*, 2008, 12(1): 52-57.
- [7] LI Hong-xing. Adaptive fuzzy controllers based on variable universe[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 1999, 42(1): 10-20.
- [8] LI Hong-xing, MIAO Zhi-hong, WANG Jia-yin. Variable universe stable adaptive fuzzy control of nonlinear system[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2002, 45(3): 225-240.
- [9] LI Hong-xing, MIAO Zhi-hong, WANG Jia-yin. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2002, 45(2): 213-224.
- [10] 郑宏, 徐红兵, 朱贵平. 变论域自适应模糊控制在航机发电中的应用[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(2): 253-256.
- ZHENG Hong, XU Hong-bing, ZHU Gui-ping. Adaptive fuzzy control based on variable universe and its application to aero engine turbine power generator[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(2): 253- 256.
- [11] LIU Yun-feng, MIAO Dong, PENG Yun-hui, et al. Variable universe adaptive fuzzy sliding mode controller for a class of nonlinear system[C]//*International Conference on Computational Intelligence*, Kunming: Springer, 2006.
- [12] PHAN P, GALE T J. Direct adaptive fuzzy control with less restrictions on the control gain[J]. *International Journal of Control Automation and Systems*, 2007, 5(6): 621-629.
- [13] WANG W Y, CHAN M L, HSU C C J, et al.  $H_\infty$  tracking-based sliding mode control for uncertain nonlinear systems via an adaptive fuzzy-neural approach[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, 32(4): 483-492.
- [14] 刘金琨. 机器人控制系统的设计与MATLAB仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.  
LIU Jin-kun. Design and Matlab simulations of robot control systems[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.

编辑 漆蓉