基于有限长样本数据的信噪比估计

廖红舒，魏　平，李万春

(电子科技大学电子工程学院　成都　611731)

【摘要】从信号模型上给出了信号子空间是有限维数的说明，并通过仿真说明信号与噪声子空间的特征值在短数据下无法准确获得。提出基于仅由噪声特征值构成的极大似然函数的改进AIC准则，实现了信号子空间的维数的准确估计，从而获得了一种在相对较小样本下更稳健的信噪比估计方法。从不同的信噪比大小与样本数据长度进行仿真验证，结果表明，该方法比原始的子空间方法能适应更低的信噪比和更短的数据样本长度。

关　键　词　有限长样本;　信息论准则;　信噪比;　子空间

中图分类号　TN914　　文献标识码　A　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.03.007

SNR Estimation Based on Finite Sample Data

LIAO Hong-shu, WEI Ping, and LI Wan-chun

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China　Chengdu　611731)

Abstract　This paper first demonstrats that signal subspace has finite dimensions from signal model. A conclusion is obtained by simulation test that both eigenvalues of signal subspace and noise subspace can’t be evaluated precisely due to small size data. Then signal subspace dimensions are estimated accurately with Modified-AIC criterion using likelihood function depending only on noise space eigenvalues. A new robust SNR estimation method is proposed with the application of modified-AIC criterion. Regarding a variety of SNR and data size, simulation results show that the new method can be applied in lower SNR and shorter data samples environment.

Key words　finite sample data;　information criteria;　SNR;　subspace

现代通信系统需要精确的信噪比(SNR)估计作为无线电资源管理的依据，如信号检测、动态功率控制和自适应调制解调等。

信噪比估计方法按接收处理方式可分为SISO和SIMO两类方法。前者通常对接收信号采取载频同步和码元同步处理，然后从匹配滤波器中选择最佳采样点构造接收序列进行信噪比估计，因为一个符号只取一个样本点，称为SISO(single input single output)。基于接收信号的各阶矩的估计方法属于该类[1-5]。SIMO方法常利用多通道或过采样技术进行接收，可以等效为一个符号包含多个数据样本[6-9]。在非合作通信中，因为信号类型、调制参数(如载频、码元速率、成型滤波器等)通常未知，一般都需要多通道接收，或在单通道接收时用高采样率对接收信号进行过采样处理，因而SISO估计方法不适用。另外一方面，基于矩的SISO方法通常适用于恒模信号，对非恒模信号也需要预先知道其幅度电平及其概率[3-5]，不能适应更多的信号类型。因此，本文只考虑SIMO处理方式。

文献[6]提出了子空间SNR估计方法，对接收信号构造协方差矩阵并进行特征值分解，利用信号子空间和噪声子空间维数不同的特点，采用信息论准则如AIC或MDL获取信号子空间和噪声子空间的分界点后，从而估计出信噪比。该方法不需要信号调制类型等的先验知识，但是对信号子空间具有有限维数的成因未作解释，并且该方法在构造P维协方差矩阵时需要较大的数据样本K(K与P两者差异一般在两个数量级以上)，以保证协方差矩阵是行数(维数)小于列数(样本数)的宽矩阵。非合作通信中由于通信环境的特殊性，通常可利用的数据样本的不可控制，有时非常少，可能只有几十到几百个样本，如突发通信和高速跳频通信，这在构造协方差矩阵时可能

收稿日期：2010 –11 – 08;　修回日期：2011 – 05 – 11
基金项目：中央高校基本科研业务费专项资金(ZYGX2009J016)
作者简介：廖红舒(1978 –)，女，博士生，主要从事非合作通信信号处理方面的研究.

会出现行数和列数相当或行数小于列数的情况，即高维数较小样本。在这种情况下，利用子空间方法计算信噪比会出现如下的问题：1) 原有的基于AIC、MDL等信息论准则是基于维数固定、样本数据趋于无穷大的渐进模型，显然高维数较小样本不满足该模型，模型误差导致它们在信号空间维数估计上不可靠。2) 基于样本计算的协方差矩阵是病态和奇异的，这是因为当列数与行数相当时，协方差矩阵不能保证是满秩矩阵，导致噪声不能充满整个空间，由样本协方差矩阵得到的特征值会发生扩散，模糊了信号子空间和噪声子空间的分界点，从而影响信号功率和噪声功率的准确计算。目前就公开发表的文献而言，针对较小样本情况的信噪比估计还没有相关方面的研究。

本文首先从模型上给出信号子空间具有有限维数的解释，然后利用相应的改进的AIC准则准确获取信号子空间和噪声子空间的分界点，从而得到一种更稳健的信噪比估计方法。该方法能适应更低的信噪比，无论是大样本数据还是小样本均能准确地估计信噪比，大大提高了信噪比估计的范围。

1　信号模型

不失一般性，假定载波同步已经完成，在加性高斯白噪声下的基带接收信号可以用以下模型表示：

$$y(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m g(t-mT)+w(t) \tag{1}$$

式中，d_m为独立同分布的发射符号序列，并设$E\left[\|d_m\|^2\right]=1$；$g(t)$为发射成型滤波器、传输信道和接收滤波器的卷积组合(阶数M未知，假设其上界已知)；T为已知的传输符号周期；$w(t)$为均值是0、方差是σ_w^2的高斯白噪声。若以$f_s=L/T$的采样速率对该信号进行过采样，则式(1)可以重写为：

$$y(k+nL)=\sum_{m=0}^{M} d_{n-m} g(k+mL)+w(k+nL) \tag{2}$$

式中，$k=0,1,\cdots,L-1$。定义$\boldsymbol{g}_i=[g(iL)\quad g(iL+1)\quad\cdots\quad g(iL+L-1]^{\mathrm{T}}$，堆栈$N$个连续的接收符号($N$称为平滑因子)，可将式(2)写成以下的矢量形式：

$$\boldsymbol{Y}_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_n\\ \boldsymbol{y}_{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_{n-N+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}_n+\boldsymbol{W}_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_0 & \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_M & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{g}_0 & \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_M & \boldsymbol{0} & \ddots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{g}_0 & \boldsymbol{g}_1 & \cdots & \boldsymbol{g}_M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_n\\ d_{n-1}\\ \vdots\\ d_{n-M-N}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_n\\ \boldsymbol{w}_{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{w}_{n-N+1}\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{C}^{LN\times(M+N+1)}$；$\boldsymbol{y}_n=[y(nL)\quad y(nL+1)\quad\cdots\quad y(nL+L-1)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{w}_n=[w(nL)\ w(nL+1)\ \cdots\ w(nL+L-1)]^{\mathrm{T}}$。

对$\boldsymbol{Y}_n$求取协方差矩阵，有：

$$\boldsymbol{R}_Y=E\left[\boldsymbol{Y}_n\boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{H}}\right]=\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}+\sigma_w^2\boldsymbol{I}$$

可以通过设置L、N的取值来满足$LN>M+N+1$，使$\boldsymbol{R}_Y$是一个秩为$M+N+1$的列满秩矩阵。则由$\boldsymbol{G}$张成的子空间即为信号子空间，因此信号子空间的维数即为滤波器组合的阶数和平滑因子之和。假设$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{LN}$为$\boldsymbol{R}_Y$的特征值，并有$\lambda_i>\sigma_w^2$，$i=,2,3,\cdots,M+N+1$；$\lambda_i=\sigma_w^2$，$i=M+N+2,\cdots,LN$。

只要能获取信号子空间的维数$M+N+1$，并估计出噪声的方差，就能得到信噪比的估计值，即有：

$$\rho=\frac{\sum_{i=1}^{M+N+1}\left(\lambda_i-\sigma_w^2\right)}{LN\sigma_w^2} \tag{3}$$

2　SNR估计方法

2.1　传统的子空间SNR估计方法

传统的子空间的SNR估计方法首先用接收样本计算协方差矩阵，即有：

$$\hat{\boldsymbol{R}}_Y=\frac{1}{K}\sum_{n=1}^{K}\boldsymbol{Y}_n\boldsymbol{Y}_n^{\mathrm{H}} \tag{4}$$

然后对$\hat{\boldsymbol{R}}_Y$进行特征值分解利用AIC或MDL准则[10]估计信号子空间维数$\hat{Q}$，则有：

$$\hat{Q}_{\mathrm{MDL}}=\arg\min_q\left\{\lg L(\boldsymbol{Y}\mid\hat{\boldsymbol{\Theta}})+\frac{1}{2}m\lg(K)\right\}$$

$$\hat{Q}_{\mathrm{AIC}}=\arg\min_q\left\{2\lg L(\boldsymbol{Y}\mid\hat{\boldsymbol{\Theta}})+2m\right\}$$

$$m=\left(q(2P-q)+1\right),\ q=0,1,\cdots,P-1 \tag{5}$$

式中，$L(\boldsymbol{Y}\mid\hat{\boldsymbol{\Theta}})$为接收信号在未知待估计参数集$\hat{\boldsymbol{\Theta}}$的条件似然函数，该函数与接收信号的噪声服从相同的分布。则噪声的功率和信噪比可分别由式(6)和式(3)得到：

$$\hat{\sigma}_w^2=\frac{1}{LN-Q}\sum_{i=Q+1}^{LN}\hat{\lambda}_i \tag{6}$$

AIC、MDL准则在大样本数据和中等信噪比条件下能获得较高的估计精度。然而在非合作通信环境中，不一定能满足大样本数据模型，这时用样本协方差矩阵得到的特征值会发生扩散现象。维数$P\triangleq LN=50$，样本数K=20,100,2 000情况下，样本协方差矩阵的特征值分布如图1所示。由图1可以看

出，P/K越大，特征值越扩散，信号子空间和噪声子空间的分界点越模糊。

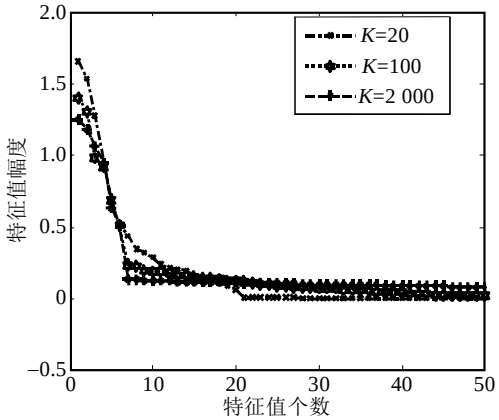

图1 P=50样本协方差矩阵的特征值分布

2.2 基于Modified-AIC信源个数估计器的SNR估计方法

利用子空间的方法估计信噪比，其性能取决于信号子空间维数的准确估计。在高维数小样本情况下，由于模型不匹配和利用样本协方差矩阵计算得到的特征值存在扩散问题，必然会导致传统的子空间方法估计信噪比的性能急剧下降。为了解决高维数和小样本情况下的信噪比估计问题，需考虑更稳健的计算信号维数的方法代替原来的AIC和MDL准则。

文献[9]发现原始的AIC或MDL准则中，其极大似然函数可以表示为关于样本协方差矩阵中$P-Q$个最小特征值的函数形式，即仅与由噪声的特征值构成的函数有关，而与信号的特征值无关。Modified-AIC正是基于此思想，在广义渐进条件下，即$P,K\to\infty$，$P/K\to C\in(0,\infty)$，不含无信号时(仅含噪声)的样本协方差矩阵的特征值可以通过以下形式实现具有正态分布的统计量，有：

$$\psi=\frac{\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}l_i^2}{\left(\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{P}l_i\right)^2} \tag{7}$$

式中，l_i为样本协方差矩阵的特征值，i=1,2,⋯,P。由该统计量构成的函数有：

$$P\left[\psi-(1+C)\right]\to N\left(\left(\frac{2}{\beta}-1\right)C,\frac{4}{\beta}C^2\right) \tag{8}$$

其极限分布是独立于未知的噪声方差，如式(8)所示，β=1(实数)，β=2复数。进一步发现在有信号存在时(假设有Q个)，则$P-Q$个特征值所构造与式(7)类似的统计量仍然非常逼近无噪声时的极限分布，即有：

$$t_q=\left[\left(P-q\right)\frac{\sum_{i=q+1}^{P}l_i^2}{\left(\sum_{i=q+1}^{P}l_i\right)^2}-\left(1+C\right)\right]P-\left(\frac{2}{\beta}-1\right)C\to N\left(0,\frac{4}{\beta}C^2\right) \tag{9}$$

因此可以考虑利用式(9)具有正态分布特性的统计量代替原始的极大似然函数，得到在广义渐进条件下有限长数据样本的Modified-AIC准则，即：

$$\hat{q}_{\mathrm{MAIC}}=\arg\min_{q}\left\{\frac{\beta}{4}\left[\frac{1}{C}\right]^2t_q^2\right\}+2\left(q+1\right)$$
$$0\leqslant q\leqslant\min(P,K)$$

3 仿真结果

为了比较新算法和基于传统子空间方法关于信噪比估计的性能，本文进行了两组试验。每组试验中卷积滤波器组合均采用根K=100升余弦滤波器，每个符号包含L=10个样本点，平滑因子设为N=5，则协方差矩阵的维数P=50。

试验1 固定样本数，信噪比SNR范围为−12:20 dB变化。输入信号分别为BPSK和16QAM信号。所有仿真图中的每点均经过10 000次Monte Carlo仿真。估计的信噪比与真实信噪比的比较如图2所示，估计值与真实值的均方误差MSE随输入信噪比变化如图3～图4所示。

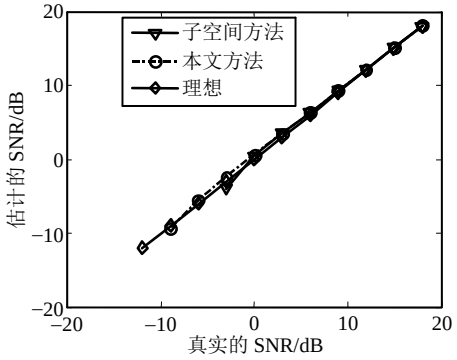

图2 BPSK信号估计的信噪比与真实信噪比

从仿真结果可以看出，新算法与传统算法在高信噪比(大于0 dB)条件下均能正确地估计接收信号的信噪比，并且与调制样式无关。但是新算法在输入信噪比低至−8 dB时仍然能有效地估计，且误差小于1 dB，而传统的算法无法工作在更低的信噪比环境。这是因为仿真中所用样本数只有100，而维数为50，两者处于一个数量级，显然新方法更适于用高

维数较小样本的环境。

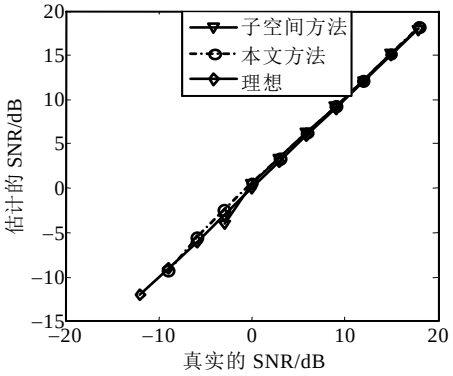

图3　QAM信号估计的信噪比与真实信噪比

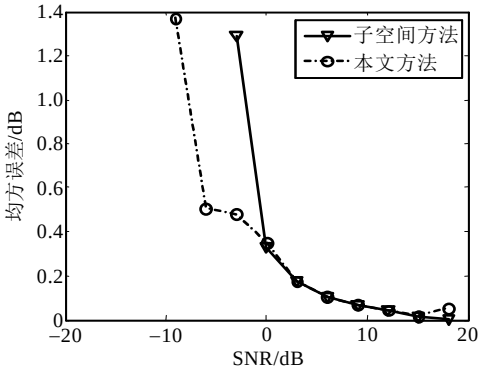

图4　BPSK信号估计信噪比的MSE

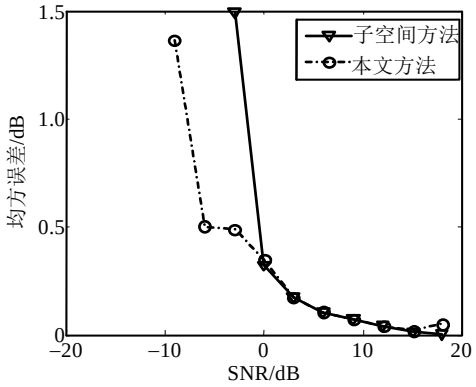

图5　QAM信号估计信噪比的MSE

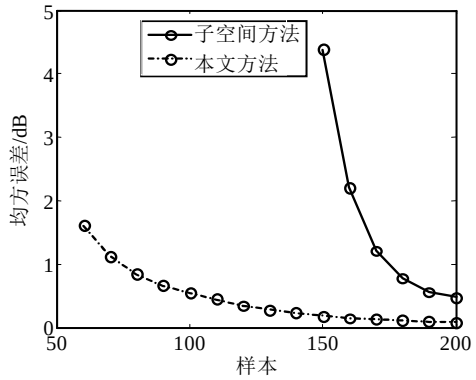

图6　估计信噪比MSE随样本数变化

试验 2　信噪比固定为–5 dB，样本数K从60～200。

该试验进一步考察两种算法随样本数变化时的估计性能。输入信号为BPSK。显然传统算法要估计–5 dB的输入信噪比，只有在样本数大于180时才能达到较小的估计误差，而新算法只用80个样本就已经能使估计的信噪比误差小于1 dB。

4　结　论

利用改进的AIC准则，本文提出了一种在较小样本下更稳健的信噪比估计。该方法比原始的子空间方法能适应更低的信噪比和更短的数据样本长度，扩展子空间方法在信噪比估计方面的应用。

参　考　文　献

[1] PAULUZZI D R, BEAULIEU N C. A comparison of SNR estimation techniques for the AWGN channel[J]. IEEE Transactions on Communications, 2000, 48(10): 1681-1691.

[2] GUANGLIANG R, YILIN C, HUI Z. A new SNR's estimator for QPSK Modulations in an AWGN channel[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2005, 52(6): 336-338.

[3] PING G, TEPEDELENLIOGLU C. SNR estimation for nonconstant modulus constellations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(3): 865-870.

[4] LOPEZ-VALCARCE R, MOSQUERA C. Sixth-order statistics-based non-data-aided SNR estimation[J]. IEEE Communications Letters, 2007, 11(4): 351-353.

[5] ALVAREZ-DIAZ M, LOPEZ-VALCARCE R, MOSQUERA C. SNR estimation for multilevel constellations using higher-order moments[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(3): 1515-1526.

[6] 范海波, 陈军, 曹志刚. AWGN信道中非恒包络信号SNR估计算法[J]. 电子学报, 2002, 30(9): 1369-1371.
FAN Hai-bo, CHEN Jun, CAO Zhi-gang. An algorithm of SNR estimation for non-constant envelope signal in the AWGN channel[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(9): 1369-1371.

[7] ANDERSIN M, MANDAYAM N B, YATES R D. Subspace based estimation of the signal to interference ratio for TDMA System[C]//Vehicle Technology Conference. Atlanta, GA, USA: IEEE, 1996.

[8] STEPHENNE A, BELLILI F, AFFES S. Moment-based SNR estimation over linearly-modulated wireless SIMO channels[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2010, 9(2): 714-722.

[9] NADAKUDITI R R, EDLMAN A. Sample eigenvalue based detection of high-dimensional signals in white noise using relatively FEW samples[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(7): 2625-2638.

[10] WAX M, KAILATH T. Detection of signals by information theoretic criteria[J]. IEEE Trans ASSP, 1985, 33(3): 387-392.

编　辑　黄　莘