

# 张量典型相关分析及其在人脸识别中的应用

雷刚<sup>1</sup>, 蒲亦菲<sup>2</sup>, 张卫华<sup>2</sup>, 周激流<sup>2</sup>

(1. 四川师范大学可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室 成都 610068; 2. 四川大学计算机学院 成都 610064)

**【摘要】**针对源数据向量化常导致很高的数据维数, 易使向量型学习算法陷入维数灾难和样本个数远小于特征维数的小样本问题, 提出了一种新的张量典型相关分析算法, 能直接对张量数据进行典型相关分析, 由于其特征值分解的协方差矩阵维数大幅度减少, 能有效降低计算复杂度和协方差矩阵奇异的问题。在Yale、ORL人脸数据库上验证了本文方法的有效性。

**关键词** 维数约减; 特征融合; 高阶特征值分解; 多线性分析

中图分类号 TP391.41

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.03.022

## Tensor Correlation Analysis and Its Application to Face Recognition

LEI Gang<sup>1</sup>, PU Yi-fei<sup>2</sup>, ZHANG Wei-hua<sup>2</sup>, and ZHOU Ji-liu<sup>2</sup>

(1. Visual Computing and Visual Reality Key Laboratory of Sichuan Province, Sichuan Normal University Chengdu 610068;

2. College of Computer Science, Sichuan University Chengdu 610064)

**Abstract** In the real world many data sources exist in the form of tensor, so the learning algorithm based on tensor space can describe the semantic information of data sources better. This paper presents a new tensor correlation analysis algorithm, with which we can directly analyze the tensor data. Because of the large reduction of the dimension of eigenvalue decomposition covariance matrix, the algorithm can effectively reduce the computing complexity and avoid the covariance matrix singular problem. The effectiveness of this method can be proved at YALE, ORL face database.

**Key words** dimension reduction; feature fusion; high-order eigenvalue decomposition; multi-linear analysis

子空间分析是模式识别领域中的一个重要研究方向, 模式是模式分析的基本操作对象, 可表示为多种形式, 如何选择最有利于问题解决的表示是分类学习系统成功的关键之一。传统的向量型特征提取方法, 如主成份分析(PCA)<sup>[1]</sup>、独立成份分析(ICA)<sup>[2]</sup>、线性判别分析(LDA)<sup>[3]</sup>、典型相关分析(CCA)<sup>[4]</sup>等已经在文本数据挖掘<sup>[5]</sup>、人脸识别<sup>[6]</sup>、表情识别<sup>[7]</sup>中得到广泛的应用。样本协方差矩阵易遇到如下问题: 1) 样本个数远小于特征维数, 从而导致协方差矩阵奇异; 2) 过高的维数导致协方差矩阵的计算复杂度很高, 虽然在样本数目较小的情况下可利用转置矩阵特有的征值分解方法降低计算复杂度, 但对于样本较多的情况却无能为力; 3) 向量化可能使得原始数据的空间结构信息、语义信息等丢失, 如对图像的向量化会使得像素间的邻域关系信息丢失。

针对以上问题, 很多向量类型算法都被推广到矩

阵模式, 直接分析二维数据对象, 如二维主成分分析(2DPCA)<sup>[8]</sup>、二维线性判别分析(2DLDA)<sup>[9]</sup>、二维典型相关分析(2DCCA)<sup>[10]</sup>等, 矩阵模式分析方法在图像模式识别应用中取得了良好的效果。在现实中, 大量数据本身为三维或更高维, 如灰度视频序列图像、空间立体结构等是三维数据, 彩色视频序列图像可以看成RGB空间加时间轴构成的四维空间数据。对该类数据源进行向量化操作可能会丢失模式分析的语义信息并导致很高的计算复杂度。近年来, 在向量模式分析推广到矩阵模式分析思想的启发下, 经典模式分析算法被逐步推广到高维(高阶)模式, 如多维主成份分析(MPCA)<sup>[11]</sup>、多维线性判别分析(MDA)<sup>[12]</sup>等。高于二维的模式分析通常称为张量模式分析, 在矩阵代数的基础上发展而成的张量代数<sup>[13]</sup>作为分析多维线性代数的数学工具逐渐被引入到计算机领域。

多模信息融合是一种新颖的数据分析思路, 其

目的是把不同渠道获取的信息加以分析, 综合并融合, 从而提取到更具语义性的信息, 典型相关分析是一种良好的特征数据融合方法, 也是一种维数约减方法, 其理论依据为: 原始数据可依据不同的数据描述方法呈现出两种不同的成对数据视图(view), 对成对视图寻找一对投影, 使得投影后的数据映射之间具有最大的相关性。抽取这组新的特征矢量作为典型相关特征, 用于分类识别。

借鉴张量代数的思想, 本文把向量型CCA算法推广到高阶张量模式, 称之为张量典型相关分析(TSCCA), 并分别在YEALB和ORL人脸数据库上进行人脸识别实验, 实验结果证明了本文方法的有效性。

## 1 张量代数及其基本运算

张量是向量和矩阵的自然推广, 例如一个向量  $x \in \mathbf{R}^I$  为一阶张量; 一个  $m \times n$  大小的图像可以看成是一个二阶张量, 即  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 其中,  $m$  为图像的高度,  $n$  为图像的宽度,  $A_{i,j}$  为其中第  $i$  行  $j$  列的一个像素值。一个  $N$  阶张量记为:  $A \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N \times I_N}$ , 并称  $i_n \in \{1, 2, \dots, I_n\}$  为张量  $A$  的第  $n$  个指标, 每个指标对应  $A$  的一个模态(mode)。若  $A$  的第  $n$  个指标  $i_n$  变动而其他指标固定, 则所得的  $I_n$  维向量称为  $A$  的  $n$  模态向量。将张量  $A$  的所有  $n$  模态向量“展开”所得的矩阵称为  $A$  的  $n$  模态展开矩阵, 记为  $\mathbf{I}_2^{I_n \times (I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times I_{n+1} \times \dots \times I_N)}$ 。图1为一个三阶张量的1模态展开示意图。

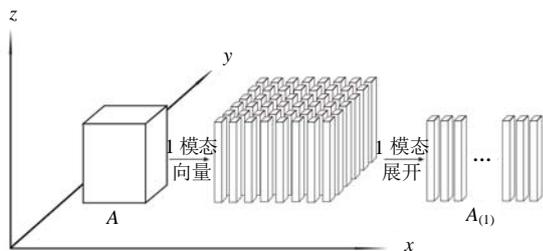


图1 三阶张量1模态展开示意图

张量  $A \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  与矩阵  $U \in \mathbf{R}^{I_n \times I_n}$  的  $n$  模态乘积记为矩阵形式  $UA_{(n)}$ , 或等价记为张量形式  $A_{\times n}U$ 。

$$A_{\times n}U(i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1}, \dots, i_N) = \sum_{i_n} A(i_1, i_2, \dots, i_N)$$

两个同型张量  $A$  和  $B$  的内积定义为:  $\langle A, B \rangle = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} A(i_1, i_2, \dots, i_N) \cdot B(i_1, i_2, \dots, i_N)$ 。如果张量能表示成  $N$  个向量的外积, 即  $A = u^{(1)} \circ u^{(2)} \circ \dots \circ u^{(N)}$ ,  $u^{(n)} \in \mathbf{R}^{I_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 则张量  $A$  称为秩1张量。对于一个以二阶张量  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$

表示的图像, 图像是以二阶张量(矩阵)存在于  $\mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^n$  的张量空间中,  $\mathbf{R}^m$  和  $\mathbf{R}^n$  分别表示  $m$  维和  $n$  维向量空间。通常, 人脸空间常被认为是嵌入  $\mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^n$  的一个子空间。类似地, 一个  $N$  阶张量  $x \in \mathbf{R}^I$  存在于  $\mathbf{R}^{I_1} \otimes \mathbf{R}^{I_2} \dots \otimes \mathbf{R}^{I_N}$  张量空间中,  $\mathbf{R}^{I_1}$ 、 $\mathbf{R}^{I_2}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{R}^{I_N}$  为各自的  $N$  个维数为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $\dots$ 、 $I_N$  的向量空间。

向量线性降维是针对向量数据(一阶张量)  $x \in \mathbf{R}^I$ , 基于某个优化准则寻找投影矩阵  $U \in \mathbf{R}^{I \times P}$ , 它将  $x$  映射到低维向量  $y = U^T x = x_{\times 1} U^T \in \mathbf{R}^P$ ,  $P < I$ 。二维矩阵模式的降维是针对矩阵(二阶张量)  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  依据某种优化准则寻找投影矩阵, 例如2DPCA寻找投影矩阵  $U \in \mathbf{R}^{m \times P}$  依据投影后映射  $U^T A$  具有最大方差,  $p < m$ 。相应地, 多线性降维是针对  $N$  阶张量数据  $X \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times I_n}$  基于某个优化准则寻求  $N$  个投影矩阵  $U^{(n)} \in \mathbf{R}^{I_n \times P_n}$  将  $X$  映射为在低维空间更具区分性的低维张量  $Y = X_{\times 1} U^{(1)T} \times_2 U^{(2)T} \dots \times_N U^{(N)T} \in \mathbf{R}^{P_1 \times P_2 \times \dots \times P_N}$ ,  $P_n \leq I_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ 。高阶奇异值分解(HOSVD)<sup>[14]</sup>把传统SVD分解扩展到了高阶张量, 可对张量所展开的  $N$  模态向量空间进行SVD分解并求正交基。通常利用交替最小二乘法(ALS)<sup>[15]</sup>对高阶张量投影矩阵进行迭代求解。易见, 向量型和矩阵型低维投影是多线性低维投影的一个特例。

## 2 典型相关分析

在很多应用中, 原始数据可以有成对方式的描述视图  $x$  和  $y$ , 这种情形称为配对数据视图, 图像分析中,  $x$  和  $y$  可看成是对于同一原始数据的不同数据表现, 例如不同传感器(可见光、红外)所采集到的图像, 不同光照环境(明、暗)下获取的图像; 或者对图像采用不同图像描述方式(空域、频域)提取的图像特征。典型相关分析是研究两组随机变量之间相关性的多元统计分析方法, 其目的是寻找一对投影矩阵, 使得投影后的低维视图映射具有最大相关性。文献[4-5]应用典型相关投影后的特征作模式分类取得了良好的效果。

给定两组随机向量数据集  $x_t \in \mathbf{R}^m$  和  $y_t \in \mathbf{R}^n$ , 其均值分别为  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ , 分别对原数据中心化操作  $\tilde{x}_t = x_t - \bar{x}$  和  $\tilde{y}_t = y_t - \bar{y}$  得到零均值随机向量集:  $\tilde{x}_t \in \mathbf{R}^m$  和  $\tilde{y}_t \in \mathbf{R}^n$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ 。CCA的目的是把多模态的数据进行数据融合, 寻找第一对投影  $u_1$  和  $v_1$ , 使得  $\tilde{x}_1^* = u_1^T \tilde{x}$  和  $\tilde{y}_1^* = v_1^T \tilde{y}$  具有最大相关性, 即两者的相关系数  $P_1$  最大, 即:

$$P_1 = \frac{\text{cov}(\mathbf{u}_1^T \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_1^T \tilde{\mathbf{y}})}{\sqrt{\text{var}(\mathbf{u}_1^T \tilde{\mathbf{x}}) \text{var}(\mathbf{v}_1^T \tilde{\mathbf{y}})}} = \frac{\mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{v}_1}{\sqrt{(\mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{u}_1)(\mathbf{v}_1^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{v}_1)}} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{C}_{xx}$ 、 $\mathbf{C}_{yy}$  为协方差矩阵;  $\mathbf{C}_{xy}$  为互协方差矩阵。继而寻找第二对投影  $\mathbf{u}_2$  和  $\mathbf{v}_2$ , 使得  $\tilde{\mathbf{x}}_2^* = \mathbf{u}_2^T \tilde{\mathbf{x}}$  和  $\tilde{\mathbf{y}}_2^* = \mathbf{v}_2^T \tilde{\mathbf{y}}$  具有最大相关性, 且  $\tilde{\mathbf{x}}_1^*$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_2^*$  不相关,  $\tilde{\mathbf{y}}_1^*$  和  $\tilde{\mathbf{y}}_2^*$  不相关; 直到寻找到前  $d$  对投影, 最后把找到的前  $d$  对投影联合构成投影矩阵  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_d)$  和  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d)$ 。通常仅需有限对投影进行典型相关性分析。

求取  $\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{v}_1$  等价于如下最优化问题:

$$\begin{aligned} & \arg \max_{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1} (\mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{v}_1) \\ & \text{s.t. } \mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{u}_1 = 1 \\ & \quad \mathbf{v}_1^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{v}_1 = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

构造其Lagrange函数:

$$\mathbf{J} = \mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{v}_1 + \lambda_x (1 - \mathbf{u}_1^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{u}_1) + \lambda_y (1 - \mathbf{v}_1^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{v}_1) \quad (3)$$

对  $\mathbf{u}_1$  和  $\mathbf{v}_1$  求偏导取得极值, 则  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{u}_1} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{v}_1} = 0$ ,

转化为如下广义特征值问题:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C}_{xy} \\ \mathbf{C}_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $\lambda = 2\lambda_x = 2\lambda_y$ 。数学证明可知, 第  $k$  对典型相关投影  $\mathbf{u}_k$ 、 $\mathbf{v}_k$  的求解为式(4)的广义特征值分解问题的第  $k$  个特征值所对应的特征向量,  $k = 1, 2, \dots, d$ 。更详细的推导过程参见文献[16]。

2DCCA是在一维CCA的基础上, 直接把图像矩阵作为分析对象, 给定中心化后的成对图像集合  $\{\tilde{\mathbf{X}}_t \in \mathbf{R}^{m_x \times n_x}\}$  和  $\{\tilde{\mathbf{Y}}_t \in \mathbf{R}^{m_y \times n_y}\}$ 。2DCCA寻找左变换  $\mathbf{l}_x, \mathbf{l}_y$  和右变换  $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$ , 使得变换后的映射  $\mathbf{l}_x^T \mathbf{X} \mathbf{r}_x$  和  $\mathbf{l}_y^T \mathbf{Y} \mathbf{r}_y$  之间具有最大相关性。其优化函数构造为:

$$\begin{aligned} & \arg \max_{\mathbf{l}_x, \mathbf{l}_y, \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y} \text{cov}(\mathbf{l}_x^T \mathbf{X} \mathbf{r}_x, \mathbf{l}_y^T \mathbf{Y} \mathbf{r}_y) \\ & \text{s.t. } \text{var}(\mathbf{l}_x^T \mathbf{X} \mathbf{r}_x) = 1 \\ & \quad \text{var}(\mathbf{l}_y^T \mathbf{Y} \mathbf{r}_y) = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

算法采用交替迭代的方式求解, 详见文献[9]

### 3 张量典型相关分析及其推导

传统向量型模式分析方法是在空间  $\mathbf{R}^l$  中进行子空间分析, 矩阵模式分析方法是对  $\mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^n$  空间进行子空间分析, 其思路为把对  $\mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^n$  空间的分析转化为对向量空间  $\mathbf{R}^m$  和  $\mathbf{R}^n$  进行分析。类似地, 高阶张量空间  $\mathbf{R}^{l_1} \otimes \mathbf{R}^{l_2} \dots \otimes \mathbf{R}^{l_N}$  中, 子空间分析可转化为各自  $N$  个向量空间  $\mathbf{R}^{l_1}$ 、 $\mathbf{R}^{l_2}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{R}^{l_N}$  的子空间分析。本文提出一种新颖的张量典型相关分析

(TSCCA)方法, 直接在高阶张量空间进行典型相关性分析。

#### 3.1 $n$ 模态投影矩阵的计算

定义张量集合  $\{A_t\}$   $\{B_t\}$ ,  $t = 1, 2, \dots, M$ , 其均值分别为:

$$\begin{cases} M_A = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M A_t \\ M_B = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M B_t \end{cases} \quad (6)$$

对张量数据集进行中心化:  $\tilde{A}_t = A_t - M_A$ ,  $\tilde{B}_t = B_t - M_B$ 。由于  $N$  阶张量  $\tilde{A} \in \mathbf{R}^{l_1 \times l_2 \times \dots \times l_N}$  是由  $N$  个向量空间  $\mathbf{I}_1$ 、 $\mathbf{I}_2$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{I}_N$  所张成的空间, 对整个张量空间的分析, 可转化为对各自向量空间  $\mathbf{R}^{l_i}$  的分析,  $i \in 1, 2, \dots, N$ 。TSCCA的目的是寻找两组成对的  $N$  个方向上的投影矩阵  $\mathbf{U}^{(n)} \in \mathbf{R}^{l_n \times P_n}$ ,  $\mathbf{V}^{(n)} \in \mathbf{R}^{l_n \times P_n}$ ,  $P_n \leq l_n, n = 1, 2, \dots, N$ , 使得投影后的成对张量间具有最大相关性。其中,  $\mathbf{U}^{(n)} = (\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n, \dots, \mathbf{u}_{P_n}^n)$ ,  $\mathbf{V}^{(n)} = (\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n, \dots, \mathbf{v}_{P_n}^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $\mathbf{U}^{(n)}$ 、 $\mathbf{V}^{(n)}$  称为  $n$  模态投影矩阵。 $\mathbf{u}_1^n$ 、 $\mathbf{v}_1^n$  为  $n$  模态投影矩阵的第一对典型相关投影,  $\mathbf{u}_k^n$ 、 $\mathbf{v}_k^n$  依次为  $n$  模态投影矩阵的第  $k$  对典型相关投影,  $k = 1, 2, \dots, P_n$ 。 $\mathbf{U}^{(n)}$  和  $\mathbf{V}^{(n)}$  的求解满足目标函数式(7),  $n = 1, 2, \dots, N$ 。

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}_1 = \arg \max \mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)} \mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, \dots, \mathbf{V}^{(N)} \\ & \text{cov}(\tilde{A}_{x_1} \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \dots \mathbf{U}^{(N)}, \tilde{B}_{x_1} \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{V}^{(2)} \dots \mathbf{V}^{(N)}) \\ & \text{s.t. } \text{var}(\tilde{A}_{x_1} \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \dots \mathbf{U}^{(N)}) = 1 \\ & \quad \text{var}(\tilde{B}_{x_1} \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{V}^{(2)} \dots \mathbf{V}^{(N)}) = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

由于  $N$  阶张量需要计算  $N$  个方向上的投影矩阵, 以使得目标函数式(7)取值最小, 其为一具有非线性约束条件的高维非线性优化问题, 因此很难直接求出目标函数的封闭解, 本文采用交替最小二乘法(ALS)的计算思想, 用数值迭代的方式求解  $N$  个投影矩阵。

为了论述简洁性, 只详细推导  $N$  阶张量的  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$  模态投影矩阵  $\mathbf{U}^{(n)}$ 、 $\mathbf{V}^{(n)}$  的第一对相关投影  $\mathbf{u}_1^n$ 、 $\mathbf{v}_1^n$  的计算, 其余  $(P_n - 1)$  对投影可同理得到。假定  $n$  模态投影矩阵  $\mathbf{U}^{(n)}$ 、 $\mathbf{V}^{(n)}$  未知,  $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots, \mathbf{U}^{(n-1)}, \mathbf{U}^{(n+1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)}$  和  $\mathbf{V}^{(1)}, \mathbf{V}^{(2)}, \dots, \mathbf{V}^{(n-1)}, \mathbf{V}^{(n+1)}, \dots, \mathbf{V}^{(N)}$  已知, 则  $\mathbf{u}_1^n$ 、 $\mathbf{v}_1^n$  满足:

$$(\mathbf{u}_1^{n*}, \mathbf{v}_1^{n*}) = \arg \max_{\mathbf{u}_1^n, \mathbf{v}_1^n} \text{cov}(A'_{x_n} \mathbf{u}_1^n, B'_{x_n} \mathbf{v}_1^n) \quad (8)$$

使得相关性最大。

式中,

$$\begin{aligned} A' &= \tilde{A}_{x_1} \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{U}^{(2)} \dots \mathbf{U}^{(n-1)} \mathbf{U}^{(n+1)} \mathbf{U}^{(n+1)} \dots \mathbf{U}^{(N)} \\ B' &= \tilde{B}_{x_1} \mathbf{V}^{(1)} \mathbf{V}^{(2)} \dots \mathbf{V}^{(n-1)} \mathbf{V}^{(n+1)} \mathbf{V}^{(n+1)} \dots \mathbf{V}^{(N)}. \end{aligned}$$

**定理1**  $\mathbf{u}_1^n$ 、 $\mathbf{v}_1^n$ 的求解,能被转化成如下广义特征值问题:

$$\begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{AB}^n \\ \Sigma_{BA}^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{n*} \\ \mathbf{v}_1^{n*} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \Sigma_{AA}^n & 0 \\ 0 & \Sigma_{BB}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{n*} \\ \mathbf{v}_1^{n*} \end{bmatrix} \quad (9)$$

记:

$$\mathbf{a}_n = \sum_{t=1}^N (\tilde{\mathbf{A}}_{t \times 1} \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \mathbf{U}^{(n-1)} \times_{n+1} \mathbf{U}^{(n+1)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)})_{(n)}$$

$$\mathbf{b}_n = \sum_{t=1}^N (\tilde{\mathbf{B}}_{t \times 1} \mathbf{V}^{(1)} \times_2 \mathbf{V}^{(2)} \dots \mathbf{V}^{(n-1)} \times_{n+1} \mathbf{V}^{(n+1)} \dots \times_N \mathbf{V}^{(N)})_{(n)}$$

矩阵计算方法为:

$$\begin{aligned} \Sigma_{AB}^n &= \frac{1}{n} (\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n^T) \\ \Sigma_{AA}^n &= \frac{1}{n} (\mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^T) \\ \Sigma_{BA}^n &= \frac{1}{n} (\mathbf{b}_n \mathbf{a}_n^T) \end{aligned} \quad (10)$$

依据记号等价规则:

$$\text{cov}(\tilde{\mathbf{A}}_{\times n} \mathbf{u}_1^n, \tilde{\mathbf{B}}_{\times n} \mathbf{v}_1^n) = \mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n \quad (11)$$

则目标函数式(8)可重写为:

$$\begin{aligned} \arg \max_{\mathbf{u}_1^n, \mathbf{v}_1^n} \mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n \\ \text{s.t. } \mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AA}^n \mathbf{u}_1^n = \mathbf{I} \\ \mathbf{v}_1^{nT} \Sigma_{BB}^n \mathbf{v}_1^n = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)的Lagrange函数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n + \lambda_{u_n} (1 - \mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AA}^n \mathbf{u}_1^n) + \\ \lambda_{v_n} (\mathbf{v}_1^{nT} \Sigma_{BB}^n \mathbf{v}_1^n) \end{aligned}$$

对  $\mathbf{u}_1^n$  和  $\mathbf{v}_1^n$  求偏导数取极值  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{u}_1^n} = 0$  和  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{v}_1^n} = 0$ ,

推出:

$$\Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n - 2\lambda_{u_n} \Sigma_{AA}^n \mathbf{u}_1^n = 0 \quad (13)$$

$$\Sigma_{BA}^n \mathbf{u}_1^n - 2\lambda_{v_n} \Sigma_{BB}^n \mathbf{v}_1^n = 0 \quad (14)$$

对式(13)左右两边同乘  $\mathbf{u}_1^{nT}$ , 据  $\mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AA}^n \mathbf{u}_1^n = 1$ , 得  $\mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n = 2\lambda_{u_n}$ 。对式(14)左右两边同乘  $\mathbf{v}_1^{nT}$ , 据  $\mathbf{v}_1^{nT} \Sigma_{BB}^n \mathbf{v}_1^n = 1$ , 得  $\mathbf{v}_1^{nT} \Sigma_{BA}^n \mathbf{u}_1^n = 2\lambda_{v_n}$ 。由  $\mathbf{u}_1^{nT} \Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n = \mathbf{v}_1^{nT} \Sigma_{BA}^n \mathbf{u}_1^n$ , 则  $\lambda = 2\lambda_{u_n} = 2\lambda_{v_n}$ , 式(13)和式(14)等价于:

$$-\lambda \Sigma_{AA}^n \mathbf{u}_1^n + \Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n = 0 \quad (15)$$

$$\Sigma_{BA}^n \mathbf{u}_1^n - \lambda \Sigma_{BB}^n \mathbf{v}_1^n = 0 \quad (16)$$

所以,式(15)和式(16)等价于式(9)的广义特征值问题。以上方程组有非零解的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} -\lambda \Sigma_{AA}^n & \Sigma_{AB}^n \\ \Sigma_{BA}^n & -\lambda \Sigma_{BB}^n \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

式(17)左端是  $\lambda$  的高次多项式,因高次多项式不易求解,为便于计算,用  $\Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{n-1}$  左乘式(16)得

$$\Sigma_{AB}^n \mathbf{v}_1^n = \frac{1}{\lambda} \Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n \mathbf{u}_1^n, \text{ 并代入(15)得}$$

$$\Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n \mathbf{u}_1^n - \lambda^2 \Sigma_{AA}^n \mathbf{u}_1^n = 0, \text{ 左乘 } \Sigma_{AA}^{n-1}, \text{ 得:}$$

$$(\Sigma_{AA}^{n-1} \Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n - \lambda^2 \mathbf{I}) \mathbf{u}_1^n = 0 \quad (18)$$

同理,得:

$$(\Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n \Sigma_{AA}^{n-1} \Sigma_{AB}^n - \lambda^2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1^n = 0 \quad (19)$$

式(18)和式(19)的解可由特征方程求解。故式(17)等价于求解:

$$\begin{cases} \left| \Sigma_{AA}^{n-1} \Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n - \lambda^2 \mathbf{I} \right| = 0 \\ \left| \Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n \Sigma_{AA}^{n-1} \Sigma_{AB}^n - \lambda^2 \mathbf{I} \right| = 0 \end{cases} \quad (20)$$

由  $\Sigma_{AA}^n > 0$ ,  $\Sigma_{AA}^{n-1} > 0$ ,  $\Sigma_{BB}^{n-1} > 0$ ,  $\Sigma_{BB}^n > 0$  得:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \Sigma_{AA}^{n-1} \Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n = \\ & \Sigma_{AA}^{\frac{1}{2}} \left( \Sigma_{AA}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{BB}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{BA}^n \right) \Sigma_{BA}^n \triangleq \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_1 = \Sigma_{AA}^{\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{M}_2 = \Sigma_{AA}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{BA}^n \Sigma_{AA}^{\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$  和  $\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$  具有相同的非零特征值,如果记

$\mathbf{T} = \Sigma_{AA}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{AB}^n \Sigma_{BB}^{\frac{1}{2}}$ , 则  $\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 = \mathbf{T} \mathbf{T}'$ , 故  $\mathbf{G}_1$  与  $\mathbf{T} \mathbf{T}'$  有相同的非零特征值。 $\mathbf{G}_2 = \Sigma_{BB}^{n-1} \Sigma_{BA}^n \Sigma_{AA}^{n-1} \Sigma_{AB}^n$  与  $\mathbf{T}' \mathbf{T}$  有相同的非零特征值。由分析可知,  $\mathbf{G}_1$  和  $\mathbf{G}_2$  具有相同的非零特征值。 $\mathbf{u}_1^n$  为  $|\mathbf{T} \mathbf{T}' - \lambda^2 \mathbf{I}| = 0$  的最大特征值所对应的特征向量,  $\mathbf{v}_1^n$  为  $|\mathbf{T}' \mathbf{T} - \lambda^2 \mathbf{I}| = 0$  的最大特征值所对应的特征向量。

$\mathbf{u}_1^n$ 、 $\mathbf{v}_1^n$ 的求解实质为求  $\mathbf{T} \mathbf{T}'$  和  $\mathbf{T}' \mathbf{T}$  的最大特征值和相应的特征向量。同理可证,求第  $k$  对  $k \leq P_n$  典型相关投影等价于求  $\mathbf{T} \mathbf{T}'$  和  $\mathbf{T}' \mathbf{T}$  的第  $k$  大特征值所对应的特征向量。前  $P_n$  个最大特征值所对应的特征向量即为典型相关投影,并构成为  $n$  模态投影矩阵:

$$\mathbf{U}^{(n)} = (\mathbf{u}_1^n, \mathbf{u}_2^n, \dots, \mathbf{u}_{P_n}^n), \quad \mathbf{V}^{(n)} = (\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n, \dots, \mathbf{v}_{P_n}^n)。$$

### 3.2 迭代数值解

如前述,推导了假定模态投影矩阵  $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots, \mathbf{U}^{(n-1)}, \mathbf{U}^{(n+1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)}$  和  $\mathbf{V}^{(1)}, \dots, \mathbf{V}^{(n-1)}, \mathbf{V}^{(n+1)}, \dots, \mathbf{V}^{(N)}$  已知,而  $n$  模态投影矩阵  $\mathbf{U}^{(n)}$ 、 $\mathbf{V}^{(n)}$  未知情况下的计算方法。可采用交替最小二乘法<sup>[15]</sup> (ALS)对  $N$  个投影矩阵进行迭代求解,每次循环对其进行逐代优化,直到相邻两次迭代,  $n$  模态矩阵的变化很小,即相邻两次迭代差异矩阵范数很小,直至算法收敛。如未达到收敛条件,则迭代  $T_{\max}$  次后退出。得到模态投影矩阵后,对原数据进行投影变换并特征融合,得到新的融合后的特征。

算法流程:

输入:  $N$ 阶张量数据集  $\{A_t \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}\}_{t=1}^M$ ,  $\{B_t \in \mathbf{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}\}_{t=1}^M$ .

输出:  $N$ 模态投影矩阵  $U^{(1)}, V^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, \dots, U^{(N)}, V^{(N)}$ .

1) 计算数据集均值  $M_A$  和  $M_B$ , 并对原数据进行中心化操作:  $\tilde{A}_t = A_t - M_A, \tilde{B}_t = B_t - M_B$ .

2) 初始化  $U^{(1)}, V^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, \dots, U^{(N)}, V^{(N)}$ .

3) For  $t=1, 2, \dots, T_{max}$

For  $n=1:N$

① 计算  $\Sigma_{AA}^n, \Sigma_{AB}^n, \Sigma_{BA}^n, \Sigma_{BB}^n = (\Sigma_{AB}^n)^T$  和前  $P_n$  个非零特征值对应的特征向量, 联合构成更新后的  $U_t^{(n)}, V_t^{(n)}$ .

② 如果相邻两次迭代所有模态投影矩阵范数很小, 即  $\|U_{t-1}^{(n)} - U_t^{(n)}\| \leq \varepsilon, \|V_{t-1}^{(n)} - V_t^{(n)}\| \leq \varepsilon$ , 或者, 总迭代次数超过设定的最大迭代次数, 则退出循环.

4) 输出: 最终更新后的  $U^{(1)}, V^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}, \dots, U^{(N)}, V^{(N)}$ .

## 4 实验结果及分析

实验分为3部分, 分别在具有不同特点的人脸数据库上做人脸识别实验. 1) YALE人脸数据库, 该数据库含有人脸样本光照环境的变化较为复杂, 识别任务较困难. 2) ORL人脸数据库, 该数据库是一个通用的人脸数据库, 常作为测试比较不同算法的基准人脸库. 本文以TSCCA(1D), TSCCA(3D)分别表示分析对象为一阶、三阶张量情况下的典型相关分析, 并验证了其在以上数据库的识别效果.

选取3种图像描述特征: 图像灰度特征、SVD特征和Gabor特征, 实验比较了选取单模特征和融合不同特征时不同算法的识别效果. 文献[17]论证了奇异值特征是识别图像的有效特征, 它具有良好的代数与几何不变性. Gabor滤波器<sup>[18]</sup>是另一种良好的图像特征提取和表征方法, 能够捕捉图像不同尺度和方向的局部结构信息, 具有提取图像局部细微变化的能力, 且其变换对光照变化不敏感, 能容忍一定程度的图像旋转和变形. 如对一幅大小为32×32的图像, 采用5个尺度4个方向的Gabor滤波后, 得到一个维数为32×32×20=20 480维的特征向量. 此外, 也可以直接把不同方向和尺度的Gabor特征依据尺度和方向构造为三维数据(三阶张量).

TSCCA提供了典型相关分析的统一框架, 向量型CCA、矩阵型2DCCA是TSCCA的特例.

### 4.1 Yale人脸数据库

YALE人脸数据库共有15人, 每人11幅图像, 共计165幅图像, 每幅图像的分辨率为120×91. 每人的每幅图像为从不同视角获得, 有较大的表情和光照变化, 部分人脸缺损, 图2为该人脸数据库中某人的示例人脸图像.



图2 Yale人脸数据库样本图像

本实验首先对图像进行空间尺度变换为32×32, 随机选取每人1~6幅图像作为测试样本, 剩余的图像作为训练样本, 重复3次, 用Gm/Pn表示试验方案,  $m$ 表示训练样本的个数,  $n$ 表示测试样本的个数. 比较了采用单模图像特征和利用TSCCA(1D)进行多模特征融合的人脸识别率. 在单模图像特征的情况下, 首先分别提取图像的灰度特征、SVD特征、4个尺度5个方向的Gabor特征, 并对其进行向量化, 再使用Eigenface方法进行特征提取并采用最近邻法进行分类. 在TSCCA(1D)特征融合的情况下, 分别融合图像灰度特征和图像SVD特征, 融合一对不同参数(4个尺度5个方向, 5个尺度4个方向)下的Gabor特征并分类. 表1为随机3次实验的平均最好识别率.

表1 Yale人脸数据库识别率

算法	灰度	SVD	融合灰度+SVD	单一Gabor特征	融合Gabor特征
G5/P6	0.748 1	0.511 1	0.763 0	0.777 8	0.829 6
G6/P5	0.724 4	0.524 4	0.782 2	0.773 3	0.800 0
G7/P4	0.783 3	0.550 0	0.761 1	0.788 9	0.833 3
G8/P3	0.763 0	0.511 1	0.829 6	0.763 0	0.844 4
G9/P2	0.822 2	0.633 3	0.877 8	0.833 3	0.866 7
G10/P1	0.822 2	0.511 1	0.933 3	0.800 0	0.933 3

实验结果表明, 用TSCCA(1D)所抽取融合后的典型相关特征进行分类, 其识别率高于采用单一特征识别的结果.

### 4.2 ORL人脸数据库

ORL人脸数据库包含了40个人每人10幅, 共计400幅人脸图像. 样本采集在不同的时间, 包含不同的表情变化(睁眼、闭眼、微笑和中性表情), 包含有人脸小角度偏转(小于20度)的姿态变化, 人脸数据库中的部分样本图像如图3.



图3 ORL人脸数据库样本图像

本试验中, 首先对原始图像进行直方图均衡化并缩放到28×23空间分辨率. 为了测试算法对不同样本

的鲁棒性,在每人的10幅图像中随机选取5~9幅图像作为训练样本,剩余的图像作为测试样本做人脸识别实验,重复3次,实验中比较了采用灰度和Gabor特征的识别效果。Gabor特征分别采用不同的参数:5个尺度6个方向和6个尺度5个方向构造为典型相关分析的不同数据视图,在TSCCA(3D)方法中,把Gabor特征直接构造维数为 $28 \times 23 \times 30$ 的三阶张量数据。实验比较了PCA、2DPCA、2DLDA和本文TSCCA(3D)方法的3次平均最好识别率,如表2所示。实验表明,2DPCA由于避免了矩阵的向量化,识别率比一维PCA算法有所提高,而2DLDA由于引入了类别信息,比PCA的非监督学习的识别率好。本文方法作为一种非监督学习方法,同样具有较好的识别率。

表2 ORL人脸数据库识别率

算法	PCA(gray)	2DPCA(gray)	2DLDA(Gray)	PCA(Gabor)	TSCCA (3D)(Gabor)
G5/P5	0.915 0	0.941 7	0.948 3	0.961 7	0.973 3
G6/P4	0.931 3	0.943 7	0.958 3	0.970 8	0.987 5
G7/P3	0.944 4	0.963 5	0.963 9	0.972 2	0.983 3
G8/P2	0.970 8	0.987 5	0.966 7	0.987 5	0.991 7
G9/P1	0.966 7	0.975 0	0.983 3	0.983 3	1

在TSCCA(3D)中,需要进行特征值分解的协方差矩阵维数不超过三阶张量本身的最大维数,如在ORL库的实验中,解的协方差矩阵维数分别为 $28 \times 28$ ,  $23 \times 23$ 和 $30 \times 30$ ,避免了向量化操作的 $28 \times 23 \times 30 = 19\ 320$ 维的矩阵特征值求解,降低了计算复杂度,减少了协方差矩阵奇异的可能性。

## 5 结 论

本文对传统CCA和2DCCA算法进行了从向量和矩阵数据到张量数据的推广,能保持原始数据的空间结构信息,并直接分析原始张量空间,有效地避免了向量化导致的维数灾难问题。实验结构表明,本文算法具有较好的识别率。未来的工作是将进行多模态的信息融合和应用到生物特征识别应用中,同时引入类别信息,进行监督学习方法的研究。

## 参 考 文 献

[1] WANG Hui-yuan, LENG Yan, WANG Zeng-feng, et al. Application of image correction and bit-plane fusion in generalized PCA based face recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(16): 2352-2358.

[2] HU Hui-feng. ICA-based neighborhood preserving analysis for face recognition[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2008, 112(3): 286-295.

[3] ZHENG Wei-shi, LAI J H, YUEN P C, et al. Perturbation LDA: learning the difference between the class empirical mean and its expectation[J]. Pattern Recognition, 2009,

42(5): 764-779.

- [4] HUANG Hua, HE Hui-ting, FAN Xin, et al. Super-resolution of human face image using canonical correlation analysis[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(7): 2532-2543.
- [5] THEODOSIOU T, ANGELIS L, VAKALI A, et al. Non-linear correlation of content and metadata information extracted from biomedical article datasets[J]. Journal of Biomedical Informatics, 2008, 41(1): 202-216.
- [6] LIU Yan-yan, LIU Xiu-ping, SU Zhi-xun, et al. A new fuzzy approach for handling class labels in canonical correlation analysis[J]. Neurocomputing, 2008, 71(7-9): 1735-1740.
- [7] KATSAMANIS A, PAPANDREOU G, MARAGOS P, et al. Face active appearance modeling and speech acoustic information to recover articulation[J]. Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on, 2009, 17(3): 411-422.
- [8] YONGWON J, HYUNG S K. New speaker adaptation method using 2-D PCA[J]. Signal Processing Letters, 2010, 17(2): 193-196.
- [9] YANG Wen-hui, DAI Dao-qing. Two-dimensional maximum margin feature extraction for face recognition[J]. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on, 2009, 39(4): 1002-1012.
- [10] LEE S, CHOI S. Two-dimensional canonical correlation analysis[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(10): 735-738.
- [11] LU Hai-ping, PLATANIOTIS K N. MPCA: multilinear principal component analysis of tensor objects[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2008, 19(1): 18-39.
- [12] YAN Shui-cheng, XU Dong, YANG Qiang, et al. Multilinear discriminant analysis for face recognition[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(1): 212-220.
- [13] RALPH A, MARSDEN J E, TUDOR S. Manifolds, tensor analysis, and applications[M]. [S.l.]: Springer, 1988.
- [14] DE LATHAUWER L, DE MOOR B. A multilinear singular value decomposition[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2000, 21(4): 1253-1278.
- [15] KROONENBERG P, DE LEEUW J. Principal component analysis of three-mode data by means of alternating least squares algorithms[J]. Psychometrika, 1980, 45(1): 69-97.
- [16] SUN Quan-sen, ZENG Sheng-gen, LIU Yan, et al. A new method of feature fusion and its application in image recognition[J]. Pattern Recognition, 2005, 38(12): 2437-2448.
- [17] GEORGHIADES A, BELHUMEUR P, KRIEGMAN, et al. From few to many: Illumination cone models for face recognition under variable lighting and pose[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(6): 643-660.
- [18] LIU C, WECHSLER H. Gabor feature based classification using the enhanced fisher linear discriminant model for face recognition[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(4): 467-476.