·自动化技术·

高速模拟信号压缩采样实现

赵贻玖，王厚军，戴志坚

(电子科技大学自动化工程学院　成都　611731)

【摘要】压缩传感理论能够有效地降低信号的采样频率，实现对稀疏信号的压缩采样。该文在信号延时多通道采样技术的基础上，提出了一种基于压缩传感理论的模拟信号采样实现方法，根据该采样模型构造了压缩传感测量矩阵。该采样模型能够以低于信号Nyquist频率的采样率对频域稀疏信号进行采样，通过最优化算法准确重构原始信号。仿真结果表明，基于压缩传感理论的模拟信号采样模型能够对频域稀疏信号进行压缩采样，该方法具有可行性。

关　键　词　压缩传感;　测量矩阵;　信号重构;　稀疏表示

中图分类号　TN911.7　　**文献标识码**　A　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.04.011

Implementation for High Speed Analog Signal Compressive Sampling

ZHAO Yi-jiu, WANG Hou-jun, and DAI Zhi-jian

(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China　Chengdu　611731)

Abstract　Inspired by the multiple signal delay channel sampling technique, we propose an analog signal sampling model based on compressed sensing, and construct the measurement matrix in the context of the sampling architecture. The proposed sampling model can reconstruct the signal from a small number of samples captured at the sub-Nyquist rate. The examples of experiments are given to evaluate the performance of the proposed model.

Key words　compressed sensing;　measurement matrix;　signal reconstruction;　sparse representation

在数字信号处理系统中，随着模拟输入信号频率的不断提高，以香农采样定理为基础的信息获取理论对信号的采样频率要求越来越高。作为数字系统的前端，模拟数字转换器(ADC)由于受到技术、工艺等的限制，难以达到数字处理系统的要求，成为数字信号处理系统的瓶颈。然而，在实际应用中，信号的“信息率”[1]远远低于信号的频率，香农采样定理只是不失真恢复原始信号的充分而非必要条件。压缩传感理论(compressed sensing或compressive sampling)[2-3]是近年来提出的一种新的信息获取与信息处理理论。该理论利用信号的稀疏性，以远低于信号Nyquist频率的采样率对信号进行采样。

压缩传感理论在信道编码[4]、图像处理[5]等数字信号处理领域得到广泛的研究与应用。由于压缩传感理论建立在有限维的数字信号处理理论基础上，因而对于模拟信号采样的应用研究难以实现。文献[6-7]首先提出了基于压缩传感的随机解调模拟信号欠采样模型，该采样模型在信号不失真重构条件下能够有效地降低信号的采样频率。然而在对信号进行采样前需要对信号进行预处理，即采用具有信号Nyquist频率的随机序列对信号进行调制，硬件实现复杂。本文在传统并行交替采样技术基础上，提出了一种基于随机延时并行采样的压缩传感模拟信号采样模型。根据采样模型的工作原理，构造了用于信号重构的压缩传感测量矩阵，最后通过实验验证该采样模型能够有效地降低信号采样频率，具有可行性。

1　随机延时并行采样

并行交替采样技术[8]作为一种非均匀采样方法，广泛应用于高速信号测量系统中。并行交替采样技术通过控制多路ADC的采样时钟延时，实现以低于信号Nyquist频率的采样率对信号进行采样。并

收稿日期：2010－07－28;　修回日期：2011－03－28
基金项目：国家自然科学基金(60827001)
作者简介：赵贻玖(1980－)，男，博士生，主要从事数据采集、信号与信息处理方面的研究.

行交替采样基本原理如图1所示，M为采样通道数，f_e为重构信号的等效采样率，ADC的采样时钟频率为f_e/M。当信号等效采样率f_e大于2倍信号的Nyquist频率时，信号可以通过非均匀采样值准确重构。信号重构输出序列为：

$$y[n]=x(nMT_e+CT_e) \qquad n=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

式中，N为重构信号长度；$C=\{c_i\}_{i=1}^{M}$为各通道ADC的采样时钟延时系数，c_i为以M为周期的整数，$0\leqslant c_i\leqslant M-1$；$T_e$为重构信号的等效采样周期。

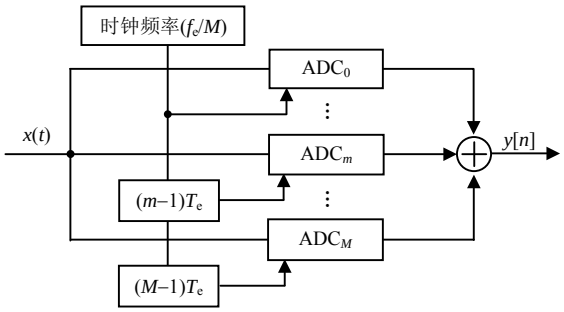


图1 并行交替非均匀采样原理

并行交替采样技术是通过控制各采样通道ADC的采样时钟延时来降低ADC的采样工作频率，是一种非均匀采样方法。本文在并行交替采样技术基础上提出一种随机延时并行采样模型，如图2所示。

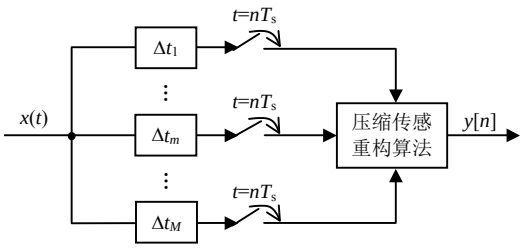


图2 随机延时并行采样原理

随机延时并行采样与并行交替采样不同之处为：1) 随机延时并行采样对每个采样通道的信号延时；并行交替采样对每个采样通道的ADC采样时钟延时。2) 随机延时并行采样是均匀采样；并行交替采样是非均匀采样。3) 随机延时并行采样通过压缩传感理论对信号进行重构；并行交替采样按采样时间间隔对信号进行重构。

本文的基于随机延时并行采样的压缩传感模拟信号采样模型与并行交替采样模型相比，更能有效地降低ADC的采样频率，ADC的采样率为f_e/N，其中，N为重构信号长度，$N\gg M$。与并行交替采样的时钟延时不同，随机延时并行采样中的信号通道延时时间Δt_m不需要严格等间隔，Δt_m的取值可以在$[0,T_s]$上随机选取，T_s为ADC的采样时钟周期。

2 信号重构

根据采样模型构造压缩传感测量矩阵是压缩传感模拟信号采样的难点，信号能否准确重构取决于压缩传感测量矩阵的构造。

2.1 测量矩阵构造

目前压缩传感测量矩阵的研究主要是基于满足独立同分布的高斯测量矩阵和伯努利测量矩阵，虽然这两种测量矩阵具有很好的特性，但是硬件难以实现。本文在随机延时并行采样系统基础上构造了压缩传感测量矩阵，该矩阵由Whittaker-Shannon插值公式构成[9]：

$$\boldsymbol{\Phi}(m,n)=\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta t_m}{T_e}-n\right) \tag{2}$$

式中，$1\leqslant m\leqslant M$, $1\leqslant n\leqslant N$，M为随机延时并行采样系统的通道数，N为重构信号的长度；Δt_m为图2中第m通道的延时时间。通过插值矩阵式(2)，可以建立并行采样序列与具有高等效采样频率重构信号的关系。

对于在时域具有无限长度的周期信号，插值矩阵式(2)只考虑了一个周期的分量，而$\mathrm{sinc}(x)$衰减很慢(以$1/x$的速度衰减)，在时域是非紧支撑函数，忽略其他周期的分量将引入较大误差。为了减小插值引入的误差，式(2)改进为：

$$\boldsymbol{\Phi}(m,n)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta t_m}{T_e}-n+l\,N\right)\approx \sum_{l=-L}^{L}\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta t_m}{T_e}-n+l\,N\right) \tag{3}$$

为了计算插值矩阵，在时域对插值矩阵中的求和公式进行截断，式(3)只考虑$2L+1$个周期分量。计算时间与周期数成正比，求和精度误差与周期数成反比。由于对$\mathrm{sinc}(\cdot)$的求和收敛很慢，截断参数L的取值需要很大才能达到理想的精度。为了解决计算量与计算精度的矛盾，根据泊松求和公式，式(3)又可改写为：

$$\boldsymbol{\Phi}(m,n)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta t_m}{T_e}-n+l\,N\right)= \frac{1}{N}\sum_{l=-N/2+1}^{N/2}\exp\left[2\pi\mathrm{j}\frac{l}{N}\left(\frac{\Delta t_m}{T_e}-n\right)\right] \tag{4}$$

通过引入泊松求和公式，将时域无限求和转换为频域有限求和，能够有效地减少计算时间，增加计算精度。由式(4)可知，插值矩阵与采样值无关，只与重构信号长度N和通道延时时间Δt_m有关。由

于每次采样通道延时不变，当重构信号长度固定时，信号重构的压缩传感测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 不变。因此对于固定信号长度，可以预先计算压缩传感测量矩阵，每次信号重构时直接调用已知的测量矩阵，减少重构时间，提高重构效率。

2.2　信号重构算法

压缩传感信号重构算法分为两类，以 l_1 范数极小化[10]为代表的凸优化算法和以正交匹配追踪[11]为代表的贪婪算法。对于频域稀疏信号的重构算法，用于频域稀疏信号表示的转换基为傅里叶基，为了便于计算，傅里叶基采用离散傅里叶变换(DFT)基进行近似，$\psi_{p,q}=N^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi pq/N}$ (1≤p，q≤N)。由于信号长度的限制，并非所有频率的信号在DFT基上都有稀疏表示[12]，此时重构信号存在较大误差。

本文中的信号重构采用SIHT-Root MUSIC[12]算法，该算法基于特征值分解的多信号频率估计算法，是采用Root MUSIC算法对余量(初始化为信号采样值)在测量矩阵列向量上的投影进行频率估计，通过搜索每次的最大投影，并以已知的投影系数更新投影余量。经过多次对余量的最大投影系数搜索，实现对原始信号的频域估计，重构原始信号。由于SIHT- Root MUSIC算法每次只提取投影的最大频率分量，在信号重构过程中，为了减小重构误差，对最大投影系数搜索的次数不得低于原始信号中所含频率数量总和。在压缩采样理论中，信号的稀疏度K(信号中主要频域分量总和)小于观测值序列长度M，所以在信号重构过程中，对最大投影系数的搜索次数小于M。

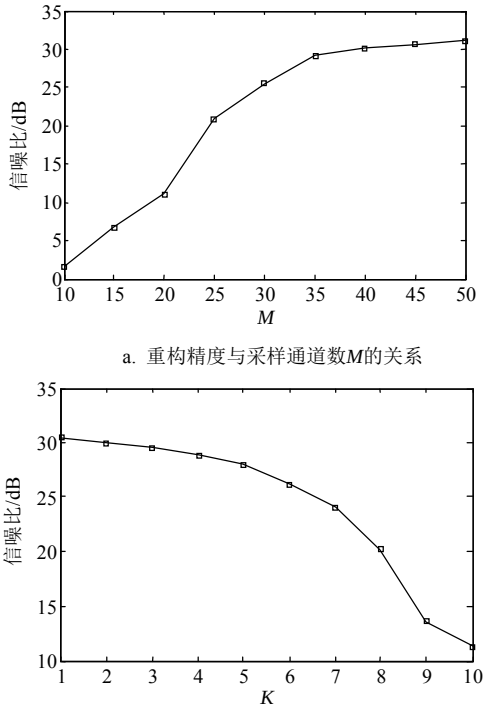
3　实　验

本节通过实验对所提出的基于压缩传感的模拟信号采样模型进行验证，分别检验了该采样模型对频域稀疏信号的重构精度与鲁棒性。部分实验参数设置如表1所示。

表1　实验参数设置

参数名	取值
采样频率f_s/MHz	10
重构信号等效采样率f_e/GHz	2.5
重构信号序列长度 N	250

随机延时并行采样通道数 M 与重构信号长度 N 的关系为 $M=O(K\lg(N/K))$ [13]，K 为信号的稀疏度(K<M<N)。信号的实际采样频率与重构信号等效采样率满足关系 f_e=$N f_s$。信号采样通道延时 Δt_m 在 0～100 ns 之间随机选取(100 ns 为采样周期)，压缩传感测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 由式(4)进行构造。



a. 重构精度与采样通道数M的关系

b. 重构精度与信号稀疏度K的关系

图3　信号重构精度与M、K的关系

第一组实验对本文提出的采样方法的可行性进行验证。在确定采样率 f_s 与信号重构条件下(重构信号的等效采样率 f_e 与信号长度 N)，信号的重构精度主要受并行采样通道数 M 与被测信号稀疏度 K 的影响。图 3a 为当信号稀疏度 K=2 时，信号重构精度随 M 的变化关系。随着 M 变大，用于信号重构的采样值越多，信号重构精度越高。图 3b 为信号重构精度随稀疏度 K 的变化关系。随着信号稀疏度增加，需要用于准确重构的采样值数量增加。当采样通道数 M 不变时(M= 50)，信号重构精度与稀疏度 K 成反比。

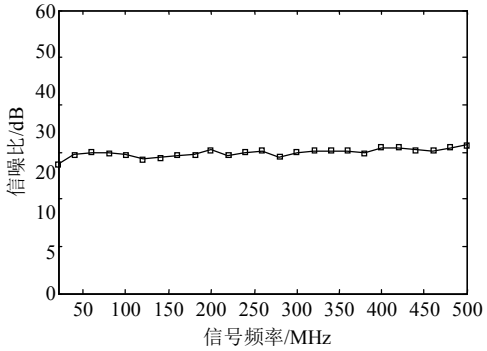


图4 信号频率与重构精度的关系

第二组实验对不同频率的信号进行采样重构，设置采样通道数 M=40。为了检验基于压缩传感的模拟信号采样模型对不同频率信号的重构性能，该实

验在20～500 Hz 的频率范围内随机选取不同频率的信号，对信号的采样序列进行重构，如图4所示。该采样模型在不同的频率点上均具有较高的重构精度。第三组实验对基于压缩传感的模拟信号采样模型的鲁棒性进行检验。该实验任意选取第二组实验中的一组测试信号的采样值进行重构，所选采样值序列的峰峰值为6。在采样值中加入满足独立同分布的高斯白噪声，重构信号相对误差与白噪声方差之间的关系如图5所示。图中相对误差与方差之间的关系表明，本文提出的基于压缩传感的模拟信号采样模型具有较强的鲁棒性。

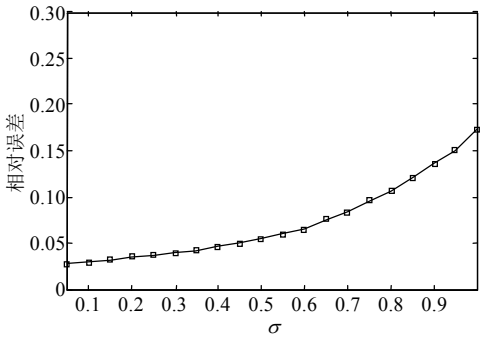


图5 重构信号相对误差与白噪声方差的关系

4 结 论

压缩传感理论作为一种全新的信息获取理论，能够有效地降低信号的采样频率。本文在传统并行采样技术基础上，提出了一种基于随机延时并行采样的压缩传感模拟信号采样模型，该采样模型硬件实现简单。根据采样模型的工作原理构造了压缩传感测量矩阵。实验表明，频域稀疏信号经过随机延时系统后，以远低于信号Nyquist频率的采样率进行采样，通过求解最优化问题能够准确重构原始信号。同时实验也验证了该模型具有较强的鲁棒性。

参 考 文 献

[1] BLU T, DRAGOTTI P L, VETERLI M, et al. Sparse sampling of signal innovations[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 31-40.

[2] DONOHO D. Compressed sensing[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52: 1289-1306.

[3] CANDÈS E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52: 489-509.

[4] DIMAKIS A G, VONTOBEL P O. LP decoding meets LP decoding: a connection between channel coding and compressed sensing[C]//The 47th Allerton Conference on Communications, Control, and Computing. Monticello, Illinois, USA: IEEE, 2009.

[5] JUNG H, YE J C. Performance evalution of accelerated functional MRI acquisition using compressed sensing[C]// IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI). Boston, USA: IEEE, 2009: 702-705.

[6] TROPP J A, LASKA J N, DUARTE M F, et al. Beyond Nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2010, 56(1): 520-544.

[7] MISHALI M, ELDAR Y C. From theory to practice: Sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signal[J]. IEEE Journal of Selected Topics on Signal Processing, 2010, 4(2): 375-391.

[8] 田书林，潘卉青，王志刚. 一种并行采样中的自适应非均匀综合校准方法[J]. 电子学报, 2009, 37(10): 268-271. TIAN Shu-lin, PAN Hui-qing, WANG Zhi-gang. An adaptive synthesis calibration method for time delay of sampling systems[J]. Acta Electronic Sinica, 2009, 37(10): 268-271.

[9] WANG X Z, SHA W E I. Random sampling using Shannon interpolation and Poisson summation formulae[EB/OL]. [2009-09-14]. http://arxiv.org/abs/0909.2292, 2009.9.

[10] ANGELOSANTE D, BAZERQUE J A, GIANNAKIS G B. Online adaptive estimation of sparse signal: Where RLS meets the l1-norm[J]. Accepted to IEEE Transaction on Signal Processing, 2010, 58(7): 3436-3447..

[11] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via Regularized Orthogonal Matching Pursuit[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3): 317-334.

[12] DUARTE M F, BARANIUK R G. Spectral compressive sensing[EB/OL]. [2010-02-04]. http://www.math.princeton.edu /~mduarte/images.

[13] BARANIUK R G. Compressed sensing[J]. IEEE Signal Processing Mag, 2007, 24(4): 118-120.

编 辑 漆 蓉