

分数阶积分的图像去噪算法

胡金蓉^{1,2}, 蒲亦非², 周激流²

(1. 西华大学数学与计算机学院 成都 610039; 2. 四川大学计算机学院 成都 610064)

【摘要】为了在去噪的同时更好地保留图像的细节纹理信息,提出一种分数阶积分的图像去噪算法FIDA。论述了FIDA在135°、90°、45°、0°、180°、315°、270°、225°这8个方向上的分数阶积分掩模的构造,及FIDA的数值运算规则。实验以视觉感知和PSNR值两个主、客观标准对FIDA的去噪性能进行度量,表明FIDA去噪算法的有效性:在去噪的同时对图像的边缘纹理细节信息保留较好,尤其是对灰度变化不大的弱边缘和弱纹理细节信息的有效保留。

关键词 分数阶微积分; 分数阶积分; 分数阶积分掩模; 图像去噪

中图分类号 TN911.73; TB112

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.05.013

Fractional Integral Denoising Algorithm

HU Jin-rong^{1,2}, PU Yi-fei², and ZHOU Ji-liu²

(1. School of Mathematics and Computer Engineering, Xihua University Chengdu 610039;

2. School of Computer Science, Sichuan University Chengdu 610064)

Abstract In this paper, we propose an innovation denoising method named fractional integral denoising algorithm (FIDA) in order to remove noise as largely as possible. Our approach is based on the Riemann-Liouville definition of fractional calculus. The structures of FIDA on eight directions are discussed first. In the first aspect, the structures of fractional integral masks for FIDA on eight directions are constructed respectively. The eight directions used in our algorithm are 135 degrees, 90 degrees, 45 degrees, 0 degrees, 180 degrees, 315 degrees, 270 degrees and 225 degrees. In addition, we also present the numerical implementation rules of FIDA for digital image. The experimental results show the effectiveness of our method according to the visual perception and peak signal noise ratio (PSNR) subjectively and objectively. Those results also demonstrate that FIDA can effectively remove noise while preserving the image's significant information simultaneously, especially for the edges and texture information with weak variation on gray intensity.

Key words fractional calculus; fractional integral; fractional integral mask; image denoising

分数阶微积分(fractional calculus)诞生于300年前,与整数阶微积分运算有着同样悠久的历史。随着分数阶微积分在扩散过程、粘弹性理论和随机分形动力学等研究中的成功应用,激发了人们将分数阶微积分应用于现代信号分析与处理的探索,尤其是应用到对数字图像的处理中,目前这一探索工作已取得了相关的研究成果,在国内外形成了一个值得研究的新兴学科分支^[1]。已有的研究主要利用分数阶微分可以在提高信号高频成分的同时非线性地保留信号的中、低频成分的特殊性质,将该理论用于对数字图像进行增强的处理之中,使图像边缘更加突出,同时保留图像平滑区域的纹理信息^[2-5]。

众所周知,在已有分数阶微积分的定义中,若

分数阶的阶数为正表示进行分数阶微分运算,阶数为负表示进行分数阶积分运算,而图像去噪算法的本质就是对图像像素和其邻域像素构成的区块进行积分运算。另外,图像信号中高度自相似的分形信息通常是以边缘和复杂的纹理细节信息表现的,而分数阶微积分是分形学说的数学基础之一^[6],能否将分数阶微积分理论引入到数字图像的去噪处理之中?并且在去噪的同时保留边缘和纹理等细节信息?基于以上思考,本文将分数阶微积分引入到数字图像处理的研究之中,提出了一种崭新的基于分数阶微积分的Riemann-Liouville定义的数字图像去噪算法FIDA,包括构造FIDA的分数阶积分掩模和定义FIDA的数值运算规则两个方面,实验结果表明

收稿日期: 2010-06-11; 修回日期: 2011-10-24

基金项目: 国家自然科学基金(60972131); 国家自然科学基金青年基金(61201438)

作者简介: 胡金蓉(1983-),女,博士,主要从事分数阶微积分理论用于数字图像处理方面的研究。

了该算法的有效性。

1 FIDA数字图像去噪算法

最先被提出的分数阶微积分定义是Grünwald-Letnikov, 但由于利用它进行计算非常复杂, 因此, 数学家从分数阶微积分定义应满足的性质入手, 对Grünwald-Letnikov定义进行了扩充和改进, 得到了应用范围更广、计算更加简单的Riemann-Liouville定义。该定义从多重积分概念出发, 由柯西公式和普通导数概念推导而得^[7]。对于复平面的解析函数s(x), 有柯西积分公式:

$${}_a D_x^{-n} s(x) \equiv \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_1} s(x_0) dx_0 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} s(\xi) d\xi \quad (1)$$

式中, $n \in Z^+$ 为 ${}_a D_x^{-n}$ 的积分次数, a, x 为积分的上、下限。 $\Gamma(\cdot)$ 是Gamma函数, 定义为 $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$, 同时 $(n-1)! = \Gamma(n)$ 。将柯西公式直接从整数阶 $n \in Z^+$ 扩展到实数 ν , 得到了分数阶积分的定义:

$${}_a D_x^\nu s(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-\xi)^{-\nu-1} s(\xi) d\xi \quad (2)$$

式中, $\nu < 0, t > a$ 。为了与分数阶微分定义在表示上进行区分, 将式(2)的信号s(x)基于Riemann-Liouville定义的 ν 阶积分($\nu < 0$)表示为:

$$J^\nu s(x) \Big|_{R-L} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-\xi)^{-\nu-1} s(\xi) d\xi \quad \nu < 0 \quad (3)$$

式中, J^ν 表示基于Riemann-Liouville定义的分数阶积分算子; $s(x)$ 是持续期为 $[a, x]$ 的一维实信号。

1.1 信号的分数阶积分响应

对于任意能量型函数(或信号) $s(x) \in L^2(R)$, 设其傅里叶(Fourier)变换为 $\hat{s}(\omega) = \int_R s(x)e^{i\omega x} dt$ 。假设 $s(x)$ 的整数 $k(k \in Z^+)$ 阶微分存在, 并表示为:

$$s^{(k)}(x) = D_k s(x) = \frac{d^k s(x)}{dt^k}。s^{(k)}(x) \text{ 的Fourier变换为:}$$

$$(D_k \hat{s})(\omega) = (i\omega)^k \hat{s}(\omega) = \hat{d}_k(\omega) \hat{s}(\omega) \quad (4)$$

式中, $\hat{d}_k(\omega) = (i\omega)^k$ 为 k 阶微分乘子函数; i 为虚数单位。 $\hat{d}_k(\omega)$ 的指数形式为:

$$\begin{cases} \hat{d}_k(\omega) = \hat{a}_k(\omega) \cdot \exp[i\theta_k(\omega)] \\ \hat{a}_k(\omega) = |\omega|^k, \theta_k(\omega) = \frac{k\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad k \in Z^+ \quad (5)$$

式中, $\hat{a}_k(\omega)$ 为幅值。将式(5)中的微分阶次 k 推广到任意正实数阶算子 D_ν , 对应的 $\nu \in R^+$, 于是得到分数阶微分 $s^{(\nu)}(x)$ 的Fourier变换的频域形式为:

$$(D_\nu \hat{s})(\omega) = (i\omega)^\nu \hat{s}(\omega) = \hat{d}_\nu(\omega) \hat{s}(\omega) \quad (6)$$

式中, 乘子 $\hat{d}_\nu(\omega)$ 的指数形式为:

$$\begin{cases} \hat{d}_\nu(\omega) = \hat{a}_\nu(\omega) \exp[i\theta_\nu(\omega)] \\ \hat{a}_\nu(\omega) = |\omega|^\nu, \theta_\nu(\omega) = \frac{\nu\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad \nu \in R^+ \quad (7)$$

同理, 根据分数阶算子理论, 分数阶微分和分数阶积分是互为逆运算, 即 $D^{-1} = J$ 。因此, 令 $\nu' = -\nu$, 根据式(6)可以得到分数阶积分 $s^{(\nu')}(x)$ 的Fourier变换的频域形式为:

$$(J_{\nu'} \hat{s})(\omega) = (i\omega)^{\nu'} \hat{s}(\omega) = \hat{j}_{\nu'}(\omega) \hat{s}(\omega) \quad (8)$$

式中, $\hat{j}_{\nu'}(\omega)$ 的指数表示形式为:

$$\begin{cases} \hat{j}_{\nu'}(\omega) = \hat{a}_{\nu'}(\omega) \exp[i\theta_{\nu'}(\omega)] \\ \hat{a}_{\nu'}(\omega) = |\omega|^{\nu'}, \theta_{\nu'}(\omega) = \frac{\nu'\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad \nu' \in R^- \quad (9)$$

根据式(9)中 $\hat{a}_{\nu'}(\omega) = |\omega|^{\nu'}$ 这一幅频关系表达式, 得到分数阶积分对信号作用后的幅频响应曲线, 如图1所示。

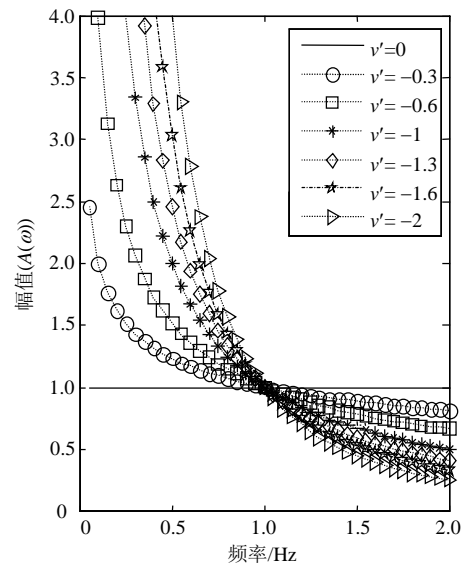


图1 分数阶积分的幅频响应曲线

从图1可以看出: 1) 分数阶积分对信号都有衰减作用, 并且随着频率和积分次数的增加而非线性的急速衰减; 2) 2阶次积分($\nu' = -2$)相比1阶次积分($\nu' = -1$)对信号低频成分的提升较大, 同时对信号的高频成分的削弱也明显; 3) 当积分阶次为0时($\nu' = 0$), 表示分数阶积分算子不对信号进行任何改变; 4) 对于积分阶次 $-1 < \nu' < 0$ 时, 在信号频率 $\omega < 1$ 的区域, 分数阶积分算子对信号的幅值进行了一定的提升, 但提升幅度远小于 $\nu' = -1$ 次和 $\nu' = -2$ 次积分; 在信号的频率 $\omega > 1$ 的区域, 分数阶积分算子对信号的幅值进行了一定的削弱, 但削弱的幅度也明

显小于1次和2次积分。上述性质表明：较之于整数阶积分，分数阶积分算子在衰减信号高频部分时，对信号的中、低频部分也进行了非线性地保留；同时，在加强信号低频部分时，也对信号的中、低频部分进行了一定的保留。因此，采用基于分数阶积分的去噪算法对图像进行去噪处理时，能在去除噪声的同时，对图像中的边缘、纹理细节信息进行不同程度的保留，尤其是对图像中灰度变化不大的弱边缘和弱纹理细节信息的有效保留，从而达到较好的去噪效果。

1.2 构造FIDA掩模

根据式(3)分数阶积分的Riemann-Liouville定义，信号 $s(x)$ 在持续期 $[0, x]$ 内的 ν 阶分数阶积分为：

$$J^\nu s(x) \Big|_{R-L} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^x \frac{s(\xi)}{(x-\xi)^{\nu+1}} d\xi = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^x \frac{s(x-\xi)}{\xi^{\nu+1}} d\xi \quad \nu < 0 \quad (10)$$

为了对上式进行数值计算，把连续积分转换为离散和，即将积分区间 $[0, x]$ 进行 N 等分，当 N 足够大时， $s(x)$ 的 ν 阶分数阶积分可近似表示为：

$$J^\nu s(x) \Big|_{R-L} \cong \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kx/N}^{(kx+x)/N} \frac{s(x-\xi)}{\xi^{\nu+1}} d\xi \quad \nu < 0 \quad (11)$$

同理，当 N 足够大时，式(11)中的积分项 $\int_{kx/N}^{(kx+x)/N} \frac{s(x-\xi)}{\xi^{\nu+1}} d\xi$ 可表示为：

$$\int_{kx/N}^{(kx+x)/N} \frac{s(x-\xi)}{\xi^{\nu+1}} d\xi \cong \frac{s\left(x - \frac{kx}{N}\right) + s\left(x - \frac{kx+x}{N}\right)}{2} \times \int_{kx/N}^{(kx+x)/N} \frac{1}{\xi^{\nu+1}} d\xi = \frac{s_k + s_{k+1}}{-2\nu} \left[\left(\frac{kx+x}{N}\right)^{-\nu} - \left(\frac{kx}{N}\right)^{-\nu} \right] \quad (12)$$

从而 $J^\nu s(x) \Big|_{R-L}$ 可近似表示为：

$$J^\nu s(x) \Big|_{R-L} \cong \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} s(x) + \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)^{-\nu} - (k-1)^{-\nu}) s(x-k) + \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} (n^{-\nu} - (n-1)^{-\nu}) s(x-n) + \dots \quad \nu < 0 \quad (13)$$

式中， $n \leq N-1$ 。式(13)将信号 $s(x)$ 的分数阶积分运算归结为了简单的乘法和加法运算，从而推导出了一维信号分数阶积分的数值实现算法。同理，二维信号 $s(x, y)$ 在 x 和 y 坐标轴负方向(用 x^- 和 y^- 来表示)上的分数阶积分运算的数值实现算法分

别为：

$$J^\nu s(x, y) \Big|_{R-L}^{x^-} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^t (x-\xi)^{-\nu-1} s(\xi, y) d\xi \Big|_{R-L}^{x^-} \cong \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} s(x, y) + \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)^{-\nu} - (k-1)^{-\nu}) s(x-k, y) + \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} (n^{-\nu} - (n-1)^{-\nu}) s(x-n, y) + \dots \quad \nu < 0 \quad (14)$$

$$J^\nu s(x, y) \Big|_{R-L}^{y^-} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^t (y-\xi)^{-\nu-1} s(x, \xi) d\xi \Big|_{R-L}^{y^-} \cong \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} s(x, y) + \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)^{-\nu} - (k-1)^{-\nu}) s(x, y-k) + \frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)} (n^{-\nu} - (n-1)^{-\nu}) s(x, y-n) + \dots \quad \nu < 0 \quad (15)$$

二维信号 $s(x, y)$ 在 x 和 y 坐标轴负方向上的分数阶积分值可取式(14)和式(15)右端的前 n 项之和来近似得到，该 n 项的系数值都不等于零，它们按顺序分别是： $\frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$ 、 $\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$ 、 $\frac{3^{-\nu} - 1^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$ 、 $\frac{4^{-\nu} - 2^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$ 、...、 $\frac{n^{-\nu} - (n-2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$ 。这些系数值都是严格按照分数阶积分的Riemann-Liouville定义推导而来，都是阶次 ν 的函数。在 $n \times n$ 全零方阵中分别沿 x 和 y 坐标轴负方向上，用上述的 n 个非零系数值顺序置换掉全零方阵中相应位置上的零值，从而分别构造出 90° 和 180° 方向上的FIDA掩模，分别用 FIM_{90° 和 FIM_{180° 表示，如图2所示。

...	0	$\frac{n^{-\nu} - (n-2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$	0	...
...	:	:	:	...
...	0	$\frac{3^{-\nu} - 1^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$	0	...
...	0	$\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$	0	...
...	0	$\frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$	0	...

:	:	:	:	:
0	...	0	0	0
$\frac{n^{-\nu} - (n-2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$...	$\frac{3^{-\nu} - 1^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$	$\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$	$\frac{1}{\Gamma(-\nu)(-2\nu)}$
0	...	0	0	0
:	:	:	:	:

a. FIM_{90°

b. FIM_{180°

图2 90°和180°方向上的FIDA掩模

显然，图2中所定义的FIDA掩模在处理数字图像时不具有抗旋转性和同向性，由于图像相邻像素点之间具有很强的相关性，为了让本文的FIDA算法

在数字图像去噪处理时具有抗旋转性能, 与 FIM_{90° 和 FIM_{180° 的构造原理和方法类似, 本文还分别定义了 135° 方向、 45° 方向、 0° 方向、 315° 方向、 270° 方向和 225° 方向上的 FIDA 掩模。各 FIDA 掩模的具体内容如图 3 所示。

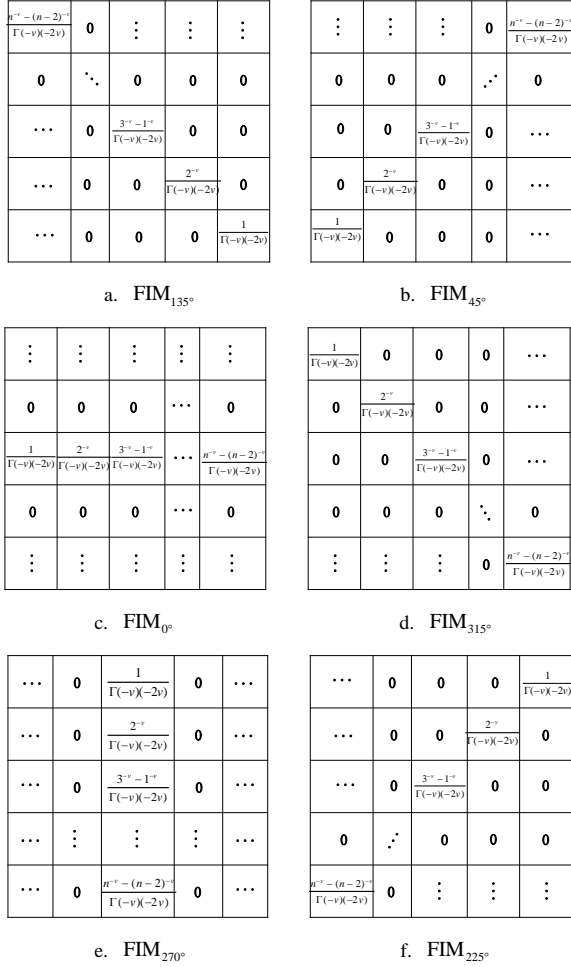


图3 135° 、 45° 、 0° 、 315° 、 270° 、 225° 方向上的 FIDA 掩模

1.3 定义 FIDA 运算规则

对一幅 $M \times N$ 的数字图像 S 进行分数阶积分定义的 FIDA 滤波, 像素 $s(x, y)$ 在 FIM_{135° 、 FIM_{90° 、 FIM_{45° 、 FIM_{0° 、 FIM_{180° 、 FIM_{315° 、 FIM_{270° 和 FIM_{225° 共 8 个方向上的 FIDA 掩模的卷积数值运算规则分别为:

$$J^v s_{135^\circ}(x, y) = \sum_{i=-2b}^0 \sum_{j=-2b}^0 FIM_{135^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (16)$$

$$J^v s_{90^\circ}(x, y) = \sum_{i=-2b}^0 \sum_{j=-b}^b FIM_{90^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (17)$$

$$J^v s_{45^\circ}(x, y) = \sum_{i=-2b}^0 \sum_{j=0}^{2b} FIM_{45^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (18)$$

$$J^v s_{0^\circ}(x, y) = \sum_{i=-b}^b \sum_{j=0}^{2b} FIM_{0^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (19)$$

$$J^v s_{180^\circ}(x, y) = \sum_{i=-b}^b \sum_{j=-2b}^0 FIM_{180^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (20)$$

$$J^v s_{315^\circ}(x, y) = \sum_{i=0}^{2b} \sum_{j=0}^{2b} FIM_{315^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (21)$$

$$J^v s_{270^\circ}(x, y) = \sum_{i=0}^{2b} \sum_{j=-b}^b FIM_{270^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (22)$$

$$J^v s_{225^\circ}(x, y) = \sum_{i=0}^{2b} \sum_{j=-2b}^0 FIM_{225^\circ}(i, j) s(x+i, y+j) \quad (23)$$

式中, b 为分数阶掩模大小, 一般取奇数; i, j 为循环变量。

2 实验结果及分析

通过对 Lena、Barbara、Boat、Peppers 和 Bacteria 这些常用性能测试图像进行去噪处理和与经典高斯平滑滤波去噪算法 GSF (Gaussian smoothing filter) 在峰值信噪比 PSNR (peak signal noise ratio) 这一客观度量算法去噪性能指标值的比较, 给出了本文所提出的 FIDA 算法去噪性能的定性和定量分析, 表明了 FIDA 算法的有效性。同时也定量地讨论了 FIDA 算法中分数阶积分阶次 v 的取值对去噪性能的影响。本文的 PSNR 定义如下:

$$PSNR = 10 \lg \max(f, \hat{f})^2 / MSE \quad (24)$$

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [f(i, j) - \hat{f}(i, j)]^2 \quad (25)$$

2.1 FIDA 去噪性能分析

本文首先对 FIDA 算法的去噪性能进行验证, 根据本文构造的 FIM_{135° 、 FIM_{90° 、 FIM_{45° 、 FIM_{0° 、 FIM_{180° 、 FIM_{315° 、 FIM_{270° 和 FIM_{225° 共 8 个方向上的 FIDA 掩模和定义的 FIDA 运算规则对测试图像在标准差 σ 为 5、10、15、20、25、35、50 的加性高斯白噪声的影响下, 进行了分数阶积分滤波的去噪处理, FIDA 掩模大小为 $b=3$, 对 Lena 图像的部分实验结果如图 4 所示。图 4a 表示加入标准差 σ 为 5 的高斯白噪声后的 Lena 图像, 其峰值信噪比为 34.12; 图 4b 表示对图 4a 进行 FIDA 去噪算法处理后的 Lena 图像, 分数阶积分阶次 $v=-0.001$; 图 4c 与图 4d、图 4e 与图 4f、图 4g 与图 4h 和图 4a 与图 4b 表示结果类似。从人眼感知视觉效果的角度来看, 图 4 表明 FIDA 算法对被不同程度噪声污染的 Lena 图像均有明显的去噪效果, 尤其当噪声标准差 $\sigma \leq 25$ 的时候, FIDA 算法在去噪的同时也保留住了图像中的边缘和纹理这些细节信息, 尤其是对灰度值变化不大的弱边缘信息的保留; 另外, 与基于 TV 全变分、各向异性

扩散、小波等去噪算法不同^[8-10]，由于FIDA算法没有进行正则性假设而不会出现Gibbs振荡或者阶梯效应等负效果。



图4 FIDA对Lena图像噪声去除情况

表1是根据PSNR值对FIDA算法去噪性能进行定量分析的结果，NP表示噪声图像具有的PSNR值，GSF(s)表示采用标准差为 s 的高斯掩模对噪声图像进行高斯平滑滤波后图像的PSNR值(掩模大小统一为 5×5)，FIDA(ν)为采用图2和图3的8个 ν 阶FIDA掩模对噪声图像的滤波结果进行算术平均运算后所得分数阶积分平滑图像的PSNR值， $\Delta = \text{PSNR}_{\text{FIDA}} -$

PSNR_{GSF} 。实验结果表明，经FIDA算法去噪处理后图像的PSNR值均不同程度地高于GSF算法，即FIDA算法的去噪性能优于经典的高斯平滑滤波算法。

表1 FIDA与GSF算法去噪性能对比(PSNR)

表1a Bacteria				
sigma	NP	GSF(s)	FIDA(ν)	Δ
10	27.83	30.57(0.58)	31.3(-0.004)	0.73
15	24.94	28.72(0.7)	29.33(-0.36)	0.61
20	22.68	27.81(0.86)	28.29(-0.48)	0.48
25	20.61	26.59(0.98)	26.99(-0.87)	0.4
50	16.6	23.77(1.5)	24.18(-1.3)	0.41
表1b Peppers				
sigma	NP	GSF(s)	FIDA(ν)	Δ
10	28.75	29.73(0.52)	30.63(-0.001)	0.9
15	24.94	27.97(0.61)	28.47(-0.045)	0.5
20	23.14	26.62(0.7)	27.09(-0.28)	0.47
25	21.43	25.61(0.8)	26.04(-0.49)	0.43
50	17.46	22.69(1.4)	23.25(-1.1)	0.56
表1c Barbara				
sigma	NP	GSF(s)	FIDA(ν)	Δ
10	28.48	28.24(0.46)	29.81(-0.001)	0.51
15	25.96	27.41(0.53)	27.78(-0.001)	0.37
20	23.47	26.02(0.59)	26.26(0.0031)	0.24
25	22.12	25.04(0.64)	25.26(-0.219)	0.22
50	18.4	22.88(1.08)	22.89(-0.751)	0.31
表1d Boat				
sigma	NP	GSF(s)	FIDA(ν)	Δ
10	28.49	30.73(0.56)	31.2(-0.001)	0.47
15	25.63	28.66(0.67)	29.2(-0.053)	0.54
20	23.48	27.4(0.78)	27.91(-0.411)	0.51
25	21.66	26.46(0.9)	26.97(-0.628)	0.51
50	18.1	23.7(1.35)	24.41(-0.991)	0.71

另外，图5为使用FIDA算法对被噪声污染的彩色图像进行去噪处理的结果。对彩色图像进行分数阶的积分滤波与灰度图像处理类似，分别对R、G、B各分量按照本文构造的FIDA掩模和定义的FIDA数值运算规则进行分数阶积分滤波运算即可。

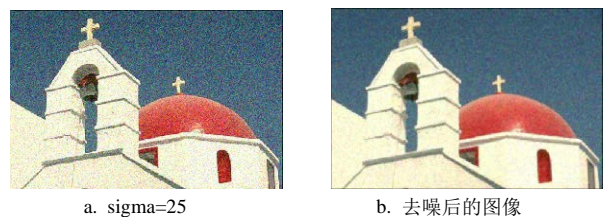


图5 FIDA对彩色图像进行去噪的结果

2.2 积分阶次与去噪性能讨论

虽然分数阶积分的Riemann-Liouville定义只要求积分阶次 ν 为负实数(见式(3))，但随着积分阶次 ν 取值的不同，对同一噪声图像所得到的FIDA算法的去噪效果也不同，即FIDA算法的去噪效果和积分阶次 ν 之间有着密切的联系。图6a为FIDA算法对被不同标准差的高斯白噪声污染的Lena图像进行去噪处理后图像的PSNR值与分数阶积分阶次 ν 之间的关系；图6b为FIDA算法对被 $\text{sigma}=25$ 的高斯白噪声污

染的各实验图像进行去噪处理后, 各图像的PSNR值与分数阶积分阶次 ν 之间的关系。

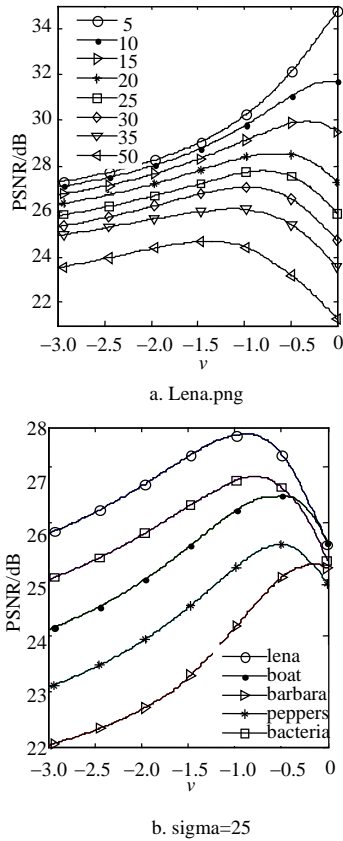


图6 PSNR值与积分阶次 ν 之间的关系

从图6中可以看出, 要使FIDA算法达到最优的去噪性能, 必须选取合适的分数阶积分阶次 ν 的值 ν_{opt} , 实验定性地表明, ν_{opt} 不仅和噪声强度有关, 同时也和图像自身的统计特点相关, 并且, 较大的 ν 值对应着较强的平滑能力。与其他基于分数阶微积分的数字图像处理算法类似, 目前, FIDA算法中 ν_{opt} 参数的选取是依靠经验或者一定运算范围内的穷举等定性方法进行的, 而在实际应用中, 希望能够定量地选取 ν_{opt} 的值而得到最佳的处理效果。

3 结论

本文将分数阶微积分引入到数字图像处理的研究之中, 提出了一种崭新分数阶积分的图像去噪算法FIDA, 该算法基于分数阶微积分的Riemann-Liouville定义, 构造了FIDA在8个方向上的分数阶积分掩

模, 并定义了FIDA的数值运算规则。实验结果从主观和客观两方面均表明了FIDA算法的去噪性能: 在去噪的同时对图像的边缘纹理等细节信息保留较好, 尤其是灰度变化不大的弱边缘, 表明了分数阶微积分在图像去噪处理中具有的优越性和广阔的应用前景。

参 考 文 献

- [1] OLDHAM K B, SPANIER J. The fractional calculus[M]. New York: Academic, 1974.
- [2] MATHIEU B, MELCHIOR P, OUSTALOUP A. Fractional differentiation for edge detection[J]. Signal Processing, 2003, 83(11): 2421-2432.
- [3] 蒲亦非, 王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则[J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1128-1135.
PU Yi-fei, WANG Wei-xing. Fractional differential masks of digital image and their numerical implementation algorithms [J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(11): 1128-1135
- [4] 蒲亦非, 王卫星, 周激流, 等. 数字图像纹理细节的分数阶微分检测及其分数阶微分滤波器实现[J]. 中国科学E辑: 信息科学, 2008, 38(12): 2252-2272.
PU Yi-fei, WANG Wei-xing, ZHOU Ji-liu, et al. Fractional differential approach to detecting textural features of digital image and its fractional differential filter implementation[J]. Science in China Series E: Information Sciences, 2008, 38(12): 2252-2272.
- [5] PU Y F, ZHOU J L, YUAN X. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(2): 491-511.
- [6] FALCONER K. 分形几何-数学基础及其应用[M]. 曾文曲, 刘世耀, 译. 辽宁: 东北工业学院出版社, 1991.
FALCONER K. Fractal geometry mathematical foundations and applications[M]. Translated by ZENG Wen-qu, LIU Shi-yao. Liaoning: Northeast Industrial Press, 1991.
- [7] ROSS B. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus[M]. New York: Springer-Verlag, 1975.
- [8] RUDIN LI, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1): 259-268.
- [9] PERONA J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.
- [10] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 1(3): 613-627.

编辑 税红