混沌之美

王　雄，陈关荣

(香港城市大学电子工程系　中国 香港　九龙城区)

【摘要】从第一个混沌系统Lorenz系统发现以来，混沌学获得了长足发展，其极度复杂性和丰富性超乎人们的想象。该文从多个方面展现混沌的独特之美，包括古老哲学概念的神奇、近代科学思想的革新、确定性与随机性的辩证统一、混沌生成机制之谜，以及新近发现的一些风姿多彩的混沌吸引子相图。

关　键　词　吸引子；混沌；平衡点稳定性；奇怪吸引子

中图分类号　O415.5　　文献标识码　A　　doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.06.001

The Beauty of Chaos

WANG Xiong and CHEN Guan-rong

(Department of Electronic Engineering, City University of HongKong　Kowloon HongKong China)

Abstract　Since the discovery of the first chaotic Lorenz system, chaos theory has experienced great evolution and development. The complexity and richness of the subject are beyond our wildest imagination. This article demonstrates the beauty of chaos from various points of view, including the ancient philosophical wisdom, the innovation of modern scientific thoughts, the unification of deterministic and stochastic natures, the mystical mechanism of generating chaos, and a variety of complex yet beautiful phase portraits of newly found chaotic attractors.

Key words　attractor;　Chaos;　stability of equilibrium;　strange attractor

混沌是近代科学的一个分支，主要研究非线性动力系统某种复杂的动力学特性，也是复杂性科学新思想的一个代表学科。

1　从古代哲学到近代科学

1.1　东方古代哲学中的混沌

“混沌(浑沌)”一词古已有之，并且多次出现于不同的古籍中，其用法也是颇为“混沌”的。在很多中国古籍文本中混沌一词是以“混”、“沌”、“昏”、“浑”等单音节词出现，代表了宇宙万物的起始本源的某种不明朗状态。

世界很多民族都不约而同地有过混沌创世的古老传说，中国也不例外。如《天壳》中记载有盘古开天地的传说：“天地如鸡卵，卵中之黄白未分，是混沌也。卵中之黄白既分，是开辟也。”

《道德经》里也有很多关于混沌的章句，如“有物混成，先天地生。寂兮寥兮，独立而不改，周行而不殆，可以为天下母”，也是表达了混沌是万物本源的状态。还有“道生一，一生二，二生三，三生万物”，与“周期三蕴含混沌”暗合。

《应帝王》是《庄子》内篇中的最后一篇。在这一篇里，庄子讲了七个故事，寓托了他无为而治的政治主张。这一个很有名的故事，就有关于混沌的论述：“南海之帝为儵，北海之帝为忽，中央之帝为浑沌。与忽时相与遇于浑沌之地，浑沌待之甚善。与忽谋报浑沌之德，曰：‘人皆有七窍以视听食息此独无有，尝试凿之。’日凿一窍，七日而浑沌死。”这个有趣的故事也说明了混沌有其独特的规律，不能把常理强加于混沌之上，不然会适得其反。

1.2　西方古代哲学中的混沌

混沌一词在英文、法文、德文中都写作chaos，在俄文中写作xaoc，均源自希腊文XAO∑。西文里关于混沌的释义一般可追溯到农民诗人赫西俄德(Hesiod)所著的《神谱》(Theogony)。赫西俄德对卡俄斯(即浑沌)的描述影响深远。亚里士多德曾评论《神谱》：“赫西俄德在提出‘原始浑沌’时所说的话看来是对的。他说，‘万物之先有浑沌，然后才产生了宽胸的大地。’”看来，诸神中卡俄斯(浑沌)资格最老，其余该亚、塔尔塔洛斯和厄罗斯三位次之。

收稿日期：2012－09－10；修回日期：2012－10－15
基金项目：香港教育资助委员会项目(CityU1019/12)
作者简介：王雄(1986－)，男，博士生，主要从事混沌系统方面的研究.

《圣经》对混沌的描述更是出现在开篇《创世纪》中第一句："起初神创造天地。地是空虚混沌。渊面黑暗。神的灵运行在水面上。神说，要有光，就有了光。"

神奇的是，这些东西方古老传说都不约而同地表明了某种混沌创世说，足见混沌这个概念的原始自然性和哲理重要性。

1.3 近代科学中混沌思想的萌芽

混沌作为一个科学概念的正式提出，可以追溯到庞加莱(Poincarè)。完全确定的系统能表现出随机的现象是庞加莱在研究三体问题时第一次发现的。在18世纪，把宇宙看作一架庞大机械时钟的宇宙观占了统治地位。法国数学家拉普拉斯(Laplace)把这种彻底的决定论思想发挥到了极致。万有引力定律非常成功，但也遗留一些问题，如三体问题。在万有引力作用下三体的运动方程，可以按照牛顿(Newton)定律严格地给出，但由于它们是非线性的，谁也不会把它们的解表达成解析形式(事后证明这是不可能的；不仅三体问题的运动方程不可能，而绝大多数非线性微分方程的解都不可能写成解析形式)。庞加莱另辟蹊径，发明了相图和拓扑学的方法，在不求出解析解的情况下，通过直接考察微分方程本身的结构去研究它的解的性质。庞加莱开拓了一个数学新领域–微分方程的定性理论，至今依然有着极其深远的影响。庞加莱发现三体系统的演变会是混沌的，意思是说如果初始状态有一个小的扰动，则后来的状态可能会有极大的不同。这个发现被视为近代科学中混沌思想的开端。

2 现代混沌学的诞生

2.1 第一个混沌系统——Lorenz系统的发现

在庞加莱的年代，由于当时计算手段的局限，庞加莱只能凭借想象力断定解的轨迹异常复杂。到了1963年，麻省理工大学的气象学家罗伦兹(Lorenz)发现了一个具体的混沌系统[1]。Lorenz在研究天气的不可预测性时，通过简化方程，获得了一个简单的具有三个自由度的系统，用来描述大气对流：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -\sigma(y+z) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = rx - y - xz \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = -bz + xy \end{cases}$$

它被称为Lorenz方程，式中，x是对流的翻动速率；y是比例于上流与下流液体之间的温差；z是垂直方向的温度梯度；$\sigma = \mu / D_{\mathrm{T}}$是无量纲因子，称为Prandtl数；$b$为反映速度阻尼的常数；$r$为相对瑞利数，$r = R / R_c$。方程组中包含$xz$与$xy$两个非线性项，但是这两个简单二次项使得方程的解异常复杂，可以产生所谓的奇怪吸引子，如图1所示。

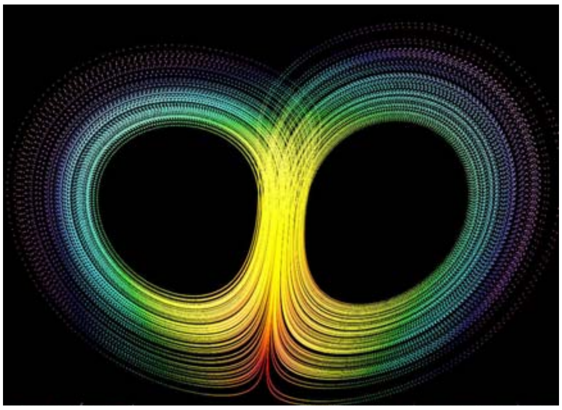


图1 Lorenz吸引子

Lorenz在计算机上用他所建立的微分方程作模拟计算，意外地发现，初始条件的极微差别可以引起模拟结果的巨大变化。有一次他在计算中断后重新开始计算时，把上一次计算的中间数据作为这次计算的初始值输入计算机，希望在重复给出上次的计算结果后计算机再继续运行下去。然而出乎意料的是，计算结果只在开始的一小段与原来结果偏差很小，之后偏差越来越大以致得到大相庭径的结果。Lorenz意识到问题出在他输入数据的精度上。因为当时的计算机只能以六位小数运行，上次存储的结果是0.606 127，而打印机仅打印了前三位数字：0.606。下次他便以这个3位小数作为重新计算的初始值，忽略掉了尾数0.000 127。Lorenz认为造成重大偏差的原因就是忽略掉了这点尾数，由此他认定这个方程对初始值具有高度的敏感性。这表明天气过程以及描述它们的非线性方程是如此的不稳定，以至巴西热带雨林的一只蝴蝶偶然拍动一下翅膀，几星期后可能在美国的德克萨斯州引起一场龙卷风，这就是著名的"蝴蝶效应"。这也就是通常所谓的"失之毫厘，谬以千里"的意思。有一首英文诗非常形象地反映了这种特性：

因为一根铁钉丢了，使得一个马蹄铁坏了。

因为一个马蹄铁坏了，使得一匹战马摔倒了。

因为一匹战马摔倒了，使得一个骑兵阵亡了。

因为一个骑兵阵亡了，使得一场战役输了。

因为一场战役输了，使得一个国家灭亡了。

2.2 Lorenz混沌系统族的发现和研究

Lorenz混沌系统发现以来，在科学界得到了广泛的重视，对它的深入研究构成了混沌学的一个重要主题。一个很自然而重要的问题是，Lorenz系统仅仅是幸运地被发现的一个孤立的例子，还是在这个令人惊喜的混沌系统周围还有可能存在其他一些与之密切相关的混沌系统？

在1999年，文献[2-3]在混沌系统的反控制(或称为混沌化)的研究中发现了一个新的系统。随后，该系统因其与Lorenz系统的特殊联系而被其他研究者称为Chen系统。这个新的系统可以描述为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(y-x)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(c-a)x-xz+cy\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-bz\end{cases}$$

式中，a、b、c是实参数。当$a=35,\ b=3,\ c=28$时，系统处于混沌状态，如图2所示。

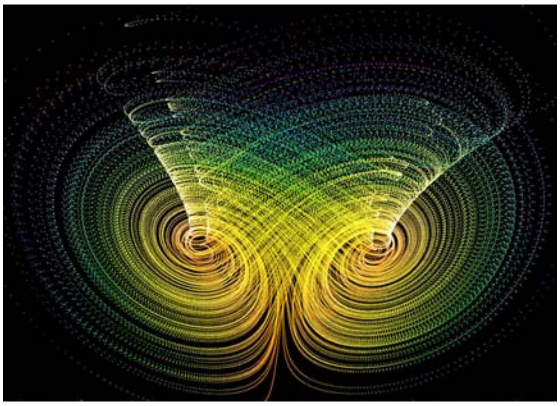


图2 Chen吸引子

尽管和Lorenz系统有很多相似之处，如都有两个二次非线性项，都有相同的对称性等，但Chen系统与Lorenz系统是不等价的，并有很多与Lorenz系统本质不同的性质和多种复杂的动力学行为[4-5]。而且在Celikovsky和Vanecek意义下[6]，Chen系统被证明是Lorenz系统的对偶系统。

2002年，文献[7]进一步发现了一个混沌系统，称为Lü系统，该系统刻画了Lorenz系统和Chen系统之间的过渡。该系统可以描述为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(y-x)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-xz+cy\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-bz\end{cases}$$

式中，a、b、c是实参数。当$a=36,\ b=3,\ c=20$时，系统处于混沌状态。

事实上，可以构造一个Lorenz系统和Chen系统的某种凸组合，它代表了由中间无穷多个混沌系统组成的整个族，而Lorenz系统和Chen系统是它的两个极端例子。在2002年，文献[8]意识到事实上存在着一大类更一般的混沌系统——广义Lorenz规范式(GLCF)[8]，或广义Lorenz系统族[9]，如图3所示。

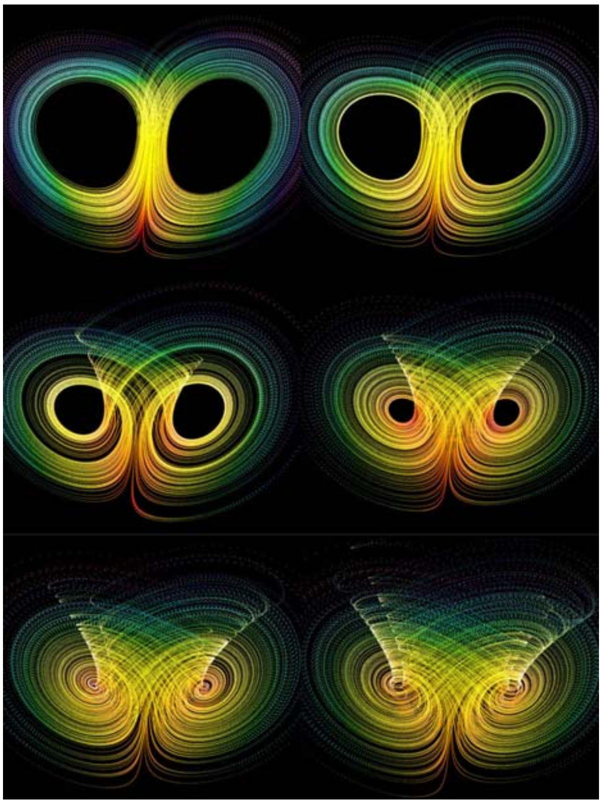


图3 广义Lorenz混沌系统族，吸引子的渐变过程，从Lorenz吸引子到Chen吸引子

3 混沌形成的机制之谜

自从Lorenz系统和一系列混沌系统被发现以来，大量的文献对这些混沌系统进行了深入的分析研究，其中混沌形成的机制一直是一个核心问题。

混沌吸引子一般被认为出现在具有鞍型不稳定平衡点的系统之中；由于鞍型平衡点的排斥和吸引两种相互作用，使得轨线永不停息地在平衡点之间环绕，进而产生混沌。而且Hartman-Grobman定理表明，非线性系统在其双曲型平衡点(其上的系统雅可比矩阵特征根的实部非零)局部的动力学行为拓扑等价于将其线性化以后的系统。这意味着如果平衡点是完全稳定的话，那么在平衡点附近轨迹都会被吸引到平衡点，因而不可能出现混沌。

关于混沌存在的严格证明，可以借助Shilnikov

定理。Shilnikov定理适用于存在鞍–焦型平衡点的系统：如果系统存在同宿或异宿轨线，并且系统在平衡点上的雅可比矩阵特征值满足一定的不等式，则存在混沌。

经典的Lorenz系统、Chen系统、Lü系统及Rössler系统等，都满足Shilnikov定理的条件。但这是混沌产生的唯一可能情形吗？稳定的平衡点是否一定不会产生混沌现象？对于最简单的情况，只有一个稳定平衡点的动力系统，最直觉的想象就是轨迹最终都会被这个平衡点吸引，似乎不会产生更复杂的动力学行为。

事实上，Hartman-Grobman定理说明了非线性系统双曲型平衡点如果稳定，其平衡点附近的动力学行为也是稳定的，不会出现混沌。但这个定理只适用于平衡点附近的局部，它并不排除在远离平衡点的情况下，产生复杂的其它可能的动力学行为，甚至混沌的发生。

Shilnikov定理虽然说明了存在非稳定鞍–焦型平衡点的系统在某种特定条件下会产生混沌，但这个是混沌产生的充分而并非必要条件。所以这个定理也没有排除稳定平衡点的系统产生混沌的可能性。

最近，文献[10]发现了只有一个稳定平衡点的混沌系统的例子。该系统基于Sprott E系统[11]，平衡点变成稳定，同时又保持混沌现象不会消失：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=yz+a\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x^2-y\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=1-4x\end{cases}$$

当$a>0$时，系统唯一的平衡点变得稳定；但对于起始远离平衡点的初值的轨线，并没有被平衡点所吸引，而是最终被一个奇怪吸引子所吸引。实际上这个系统是稳定平衡点和奇怪吸引子共存，如图4所示。这个系统并不违背Hartman-Grobman定理，只是揭示了该定理只对平衡点局部有效，并不排除大范围产生混沌的可能性。

那么十分有趣的问题是，这种混沌动力学行为的形成机理如果不是由Shilnikov定理所能描述的，又会是什么呢？到底什么是混沌产生的更一般的本质机理？这些重要的新问题尚有待进一步研究。

事实上，文献[12]还进一步构造了根本就没有平衡点的混沌系统，或者有任意个平衡点，其中平衡点的稳定性可以任意指定的混沌系统。这说明平衡点的个数和稳定性不能决定混沌的存在。混沌可以出现在没有平衡点的系统中，或者具有任意个稳定平衡点的系统中。归根结底，平衡点的分析是一种线性化的局部分析，而混沌则是非线性的整体现象，因而用平衡点的稳定性来分析混沌的产生和形成看来不尽合理。

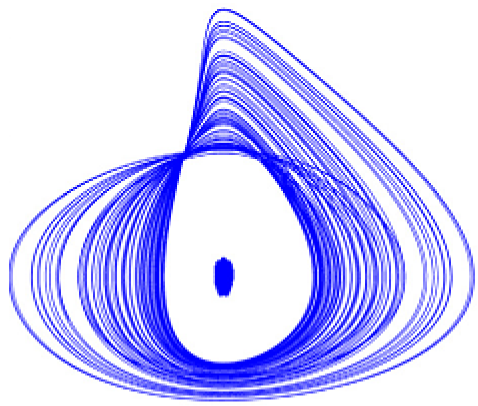


图4　稳定平衡点和奇怪吸引子共存，此时$a>0$，平衡点是稳定的，平衡点有一定的吸引域，可以吸引附近的轨线[10]

4　非对称双翼混沌系统族

对称性的分析对研究动力系统非常重要。动力系统方程的对称性决定了混沌吸引子的对称性。

Lorenz写下的方程，天然地满足z轴旋转对称性，即将(x,y,z)变换成$(-x,-y,z)$后，原方程保持不变。这个对称性决定了Lorenz系统产生的吸引子外表上也满足这个旋转对称性，是一个漂亮的双翅膀蝴蝶状的奇怪吸引子。Chen系统、Lü系统、以及整个广义Lorenz混沌系统族都满足相同的对称性。这些系统产生的吸引子也都是对称和双翅膀的。

一个有趣的问题是，非对称的非线性系统是否也能产生混沌，并会产生什么样的吸引子呢？

可以通过添加一个常数控制项来破坏这种对称性。如文献[13]通过在第三个方程上添加一个常数控制项，将对称的双翅膀吸引子变成非对称的吸引子，由此来研究Lorenz-like系统的复合结构，如在Chen系统的第三个方程加上一个m常数控制项[14]：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(y-z)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(c-a)x-xz+cy\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-bz+m\end{cases}$$

通过调节不同的m值，会得到如图5和图6所示的变化过程和结果。

更复杂的破坏对称性的方法是改变非线性项。

要系统满足(x,y,z)变换成$(-x,-y,z)$后方程保持不变，则第二个方程中出现的非线性项必须是xz或yz；第三个方程中出现的非线性项必须是xy、xx、yy或zz。如果不是按照这个方式出现非线性项，那么系统就不满足z轴旋转对称性，其产生的吸引子也会失去对称性，变得更加复杂和奇特。

图7、图8展示的是由不同的非线性项产生的系统，其产生的吸引子也是两个翅膀的，但却是不对称的。这种吸引子的结构比简单加上常数控制项产生的更为复杂。

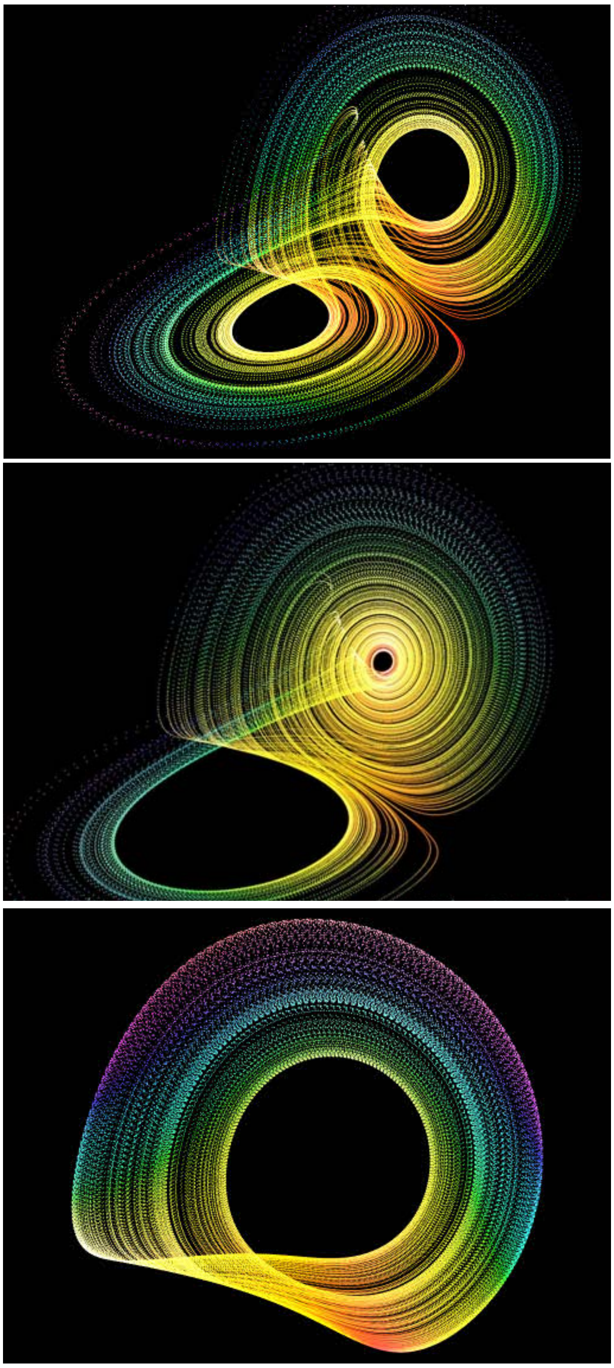


图5 通过常数控制项，产生非对称的双翼和单翼混沌吸引子

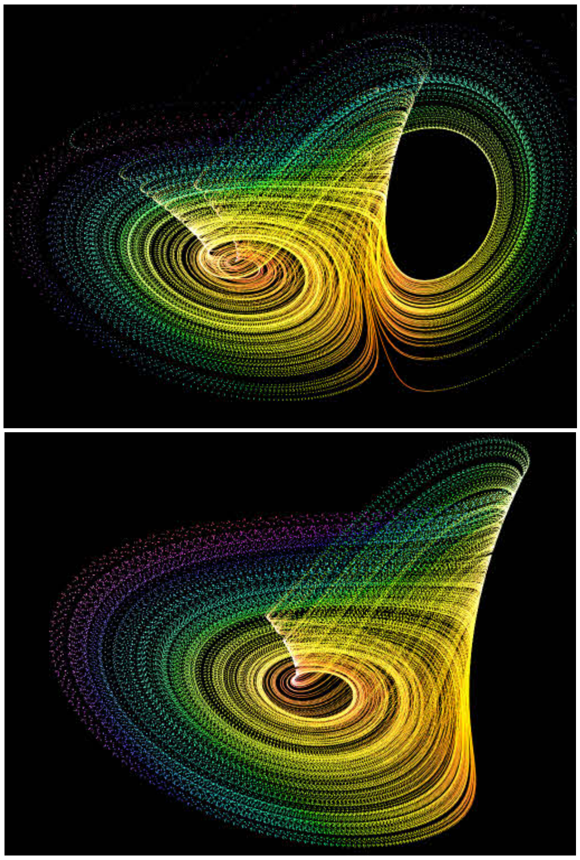


图6 通过常数控制项，产生非对称的双翼混沌吸引子

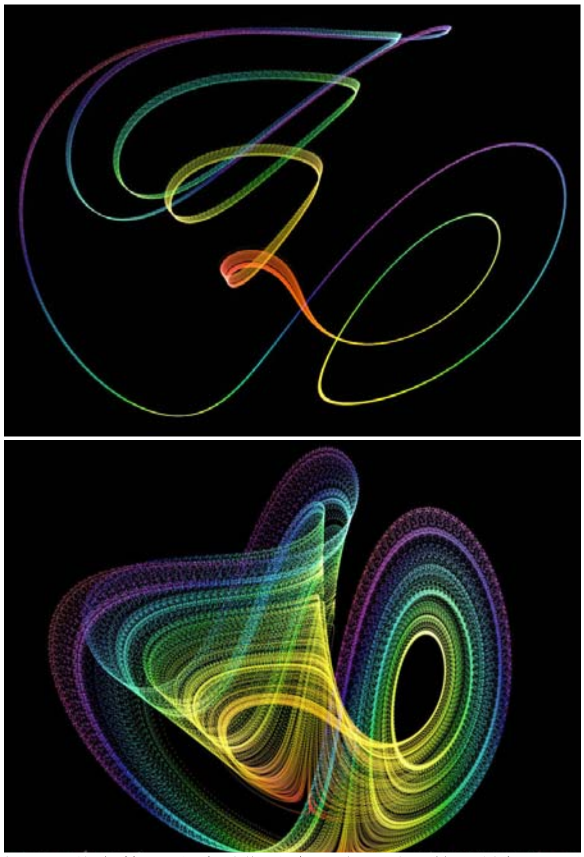


图7 调节参数可以看到非对称混沌吸引子的“骨架”即周期解，其周期解兼有Lorenz-like和Chen-like的特征
($\dot{x}=0.3x-0.8yz-0.1z, \dot{y}=-x-0.6y+axz, \dot{z}=xy-y-bz$)

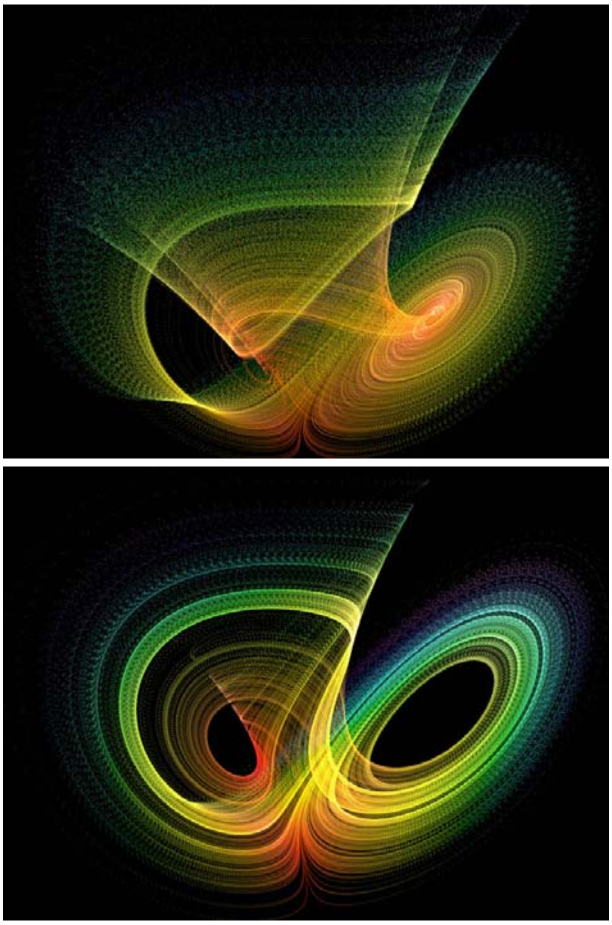


图8 一半Lorenz-like和一半Chen-like的非对称双翅膀吸引子，含有3个非线性

($\dot{x} = 0.3x - 0.8yz - 0.1z, \dot{y} = -x - 0.6y + 0.05xz,\ \dot{z} = xy - y - 0.1z$)

5 多翼混沌吸引子

Chen系统、Lü系统及整个广义Lorenz混沌系统族都满足相同的对称性。这些系统产生的吸引子也都是对称的双翅膀的。

一个有趣的问题是，是否存在以及如何构造更多翅膀的吸引子？

文献[15]构造了一个带有五个平衡点的三维自治系统，它能产生一个貌似四翼的混沌吸引子。然而，另一篇文献说明该四翼吸引子实际是不存在的[16]，它是同时存在的两个两翼混沌吸引子由于靠得太近和数值误差原因导致的一种数值假象。不过，文献[17]后来确实构造了一个带有五个平衡点的三维系统，该系统在控制条件下能产生一个真正的四翼混沌吸引子。

如图9～图10所示，还可以构造一些新系统，产生四个或者三个翅膀的混沌吸引子，而这些系统大多只有三个二次项。

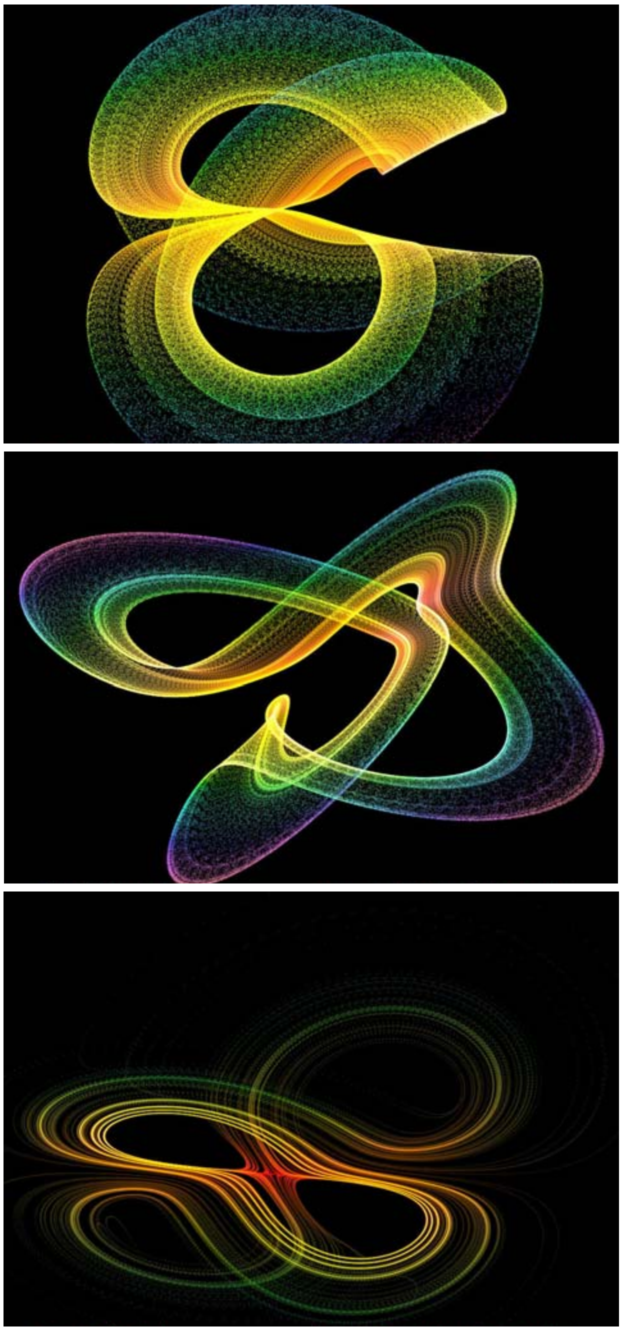
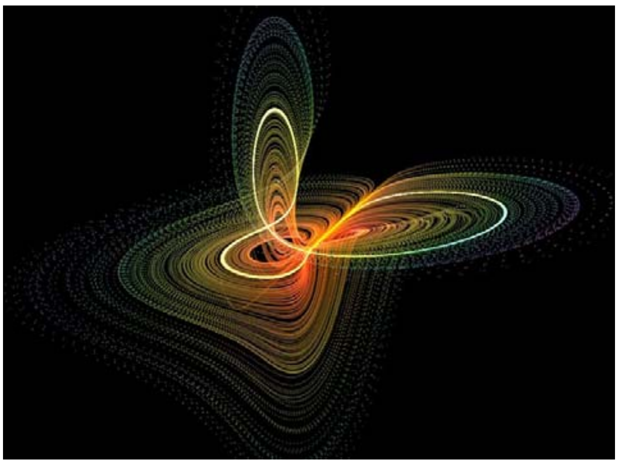


图9 四翼混沌吸引子



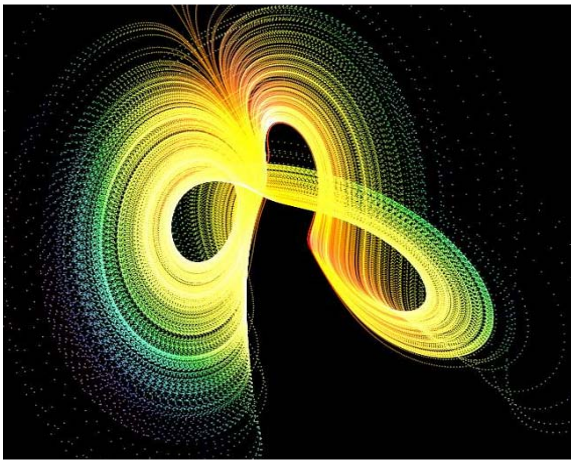
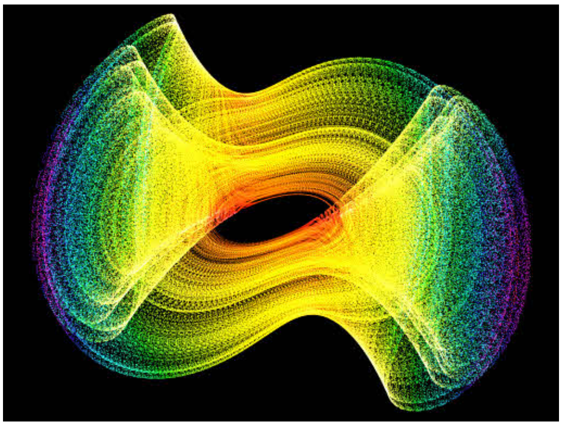


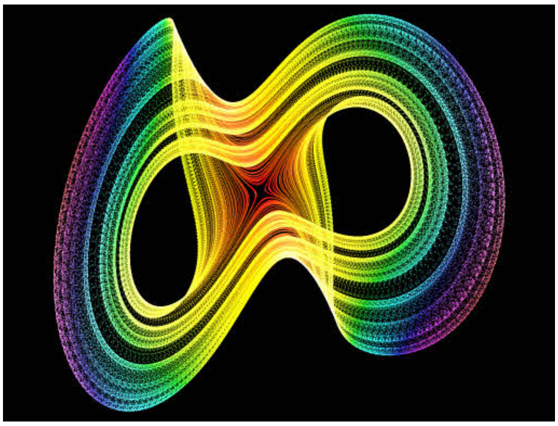
图10　某些新系统可以产生4个或者3个翅膀的混沌吸引子
($\dot{x}=ax+by+cyz+d, \dot{y}=exz+fy+gxz, \dot{z}=hxy+iy+jz$)

6　对称双花吸引子

注意到有很多具有至多三个二次项的三维自治系统。如果只关心其中有特殊对称性的情况，比如有和Lorenz系统类似的z轴旋转对称性的。那么，接下来的问题就是，有这种对称性的吸引子是不是一定只有Lorenz-like或者Chen-like的形状呢？这种对称性下，是否可以产生别的可能的对称吸引子呢？

答案是肯定的。这一类混沌吸引子族可以产生Lorenz-like系统和Chen-like系统所没有的、很多卷曲的，非常漂亮的吸引子，如图11、图12所示。





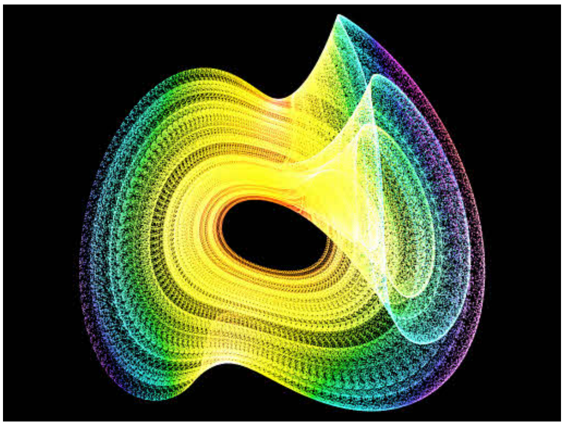


图11　一类Lorenz-like系统所没有的、很多卷曲的，或者Chen-like系统所没有的、很多卷曲的吸引子。而且可以调节参数r，使得其不对称：一边没有卷曲，另一边有很多卷曲。
($\dot{x}=-0.2x-y-rz, \dot{y}=-x-xz, \dot{z}=xy-0.1z$)

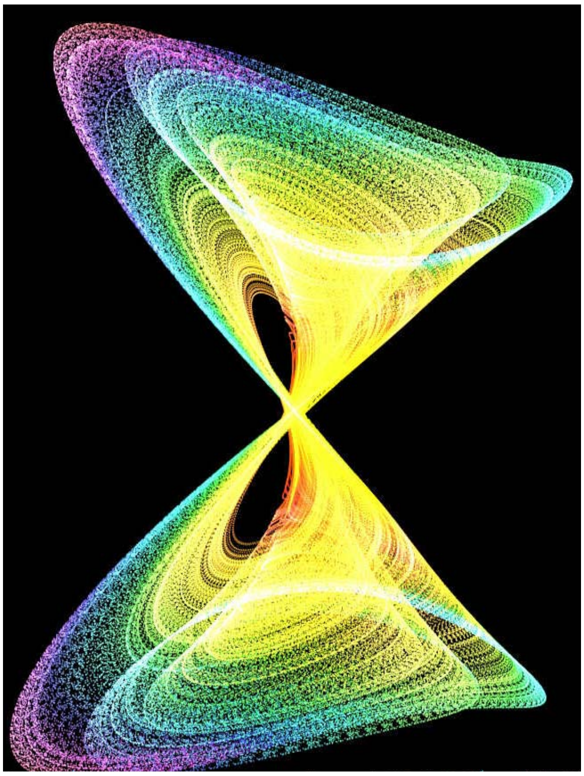


图12　从另个角度看这个对称的吸引子，像一个光锥

7　广义Rössler混沌系统族

罗斯勒(Rössler)在简化的Lorenz方程的基础上设计了一个新的吸引子方程组，称为Rössler方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(y+z) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+ay \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=b+(x-c)z \end{cases}$$

式中，xz 是非线性项；a、b、c为实参数。Rössler吸引子如图13所示。

Rössler系统有两个平衡点，通过分析可以知道两个平衡点都是不稳定的，而且是属于两种不同类型的鞍-焦平衡点。

既然Lorenz系统最后被发现属于一类广义Lorenz混沌系统族，那么Rössler系统是否也是属于某一族广义Rössler混沌系统族呢？

答案也是肯定的。如图13～图16所示，所有这一族系统都只有一个二次项，方程结构非常简单，只有一个可调参数，但通过调节这个参数，却可以产生一批丰富多彩的混沌吸引子。奇妙的是，这一混沌系统族展现了和广义Lorenz混沌系统族类似的变化过程，值得进一步研究。

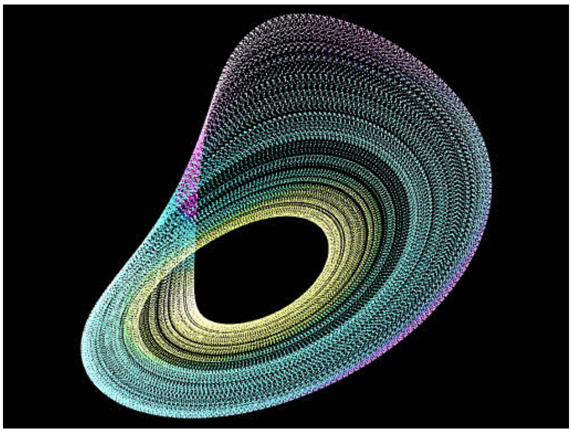
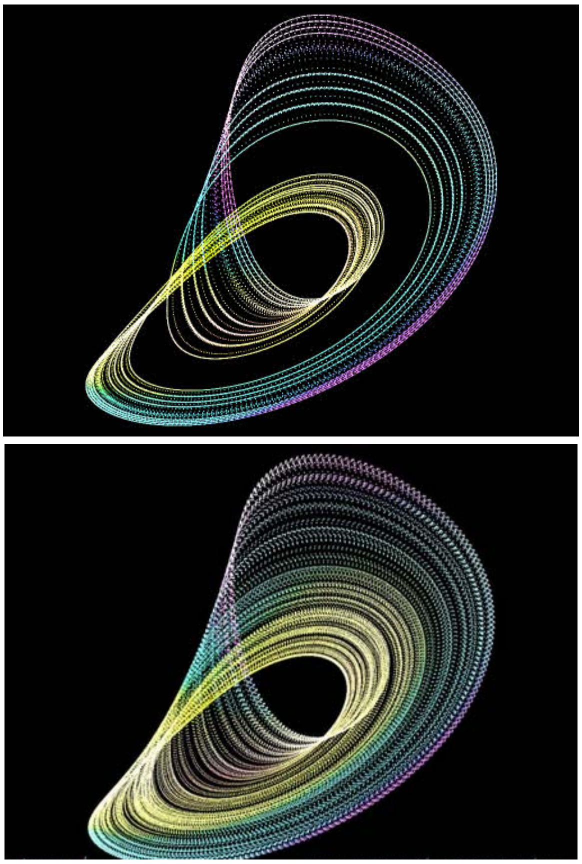


图13 一类混沌系统族可以产生Rössler-like吸引子



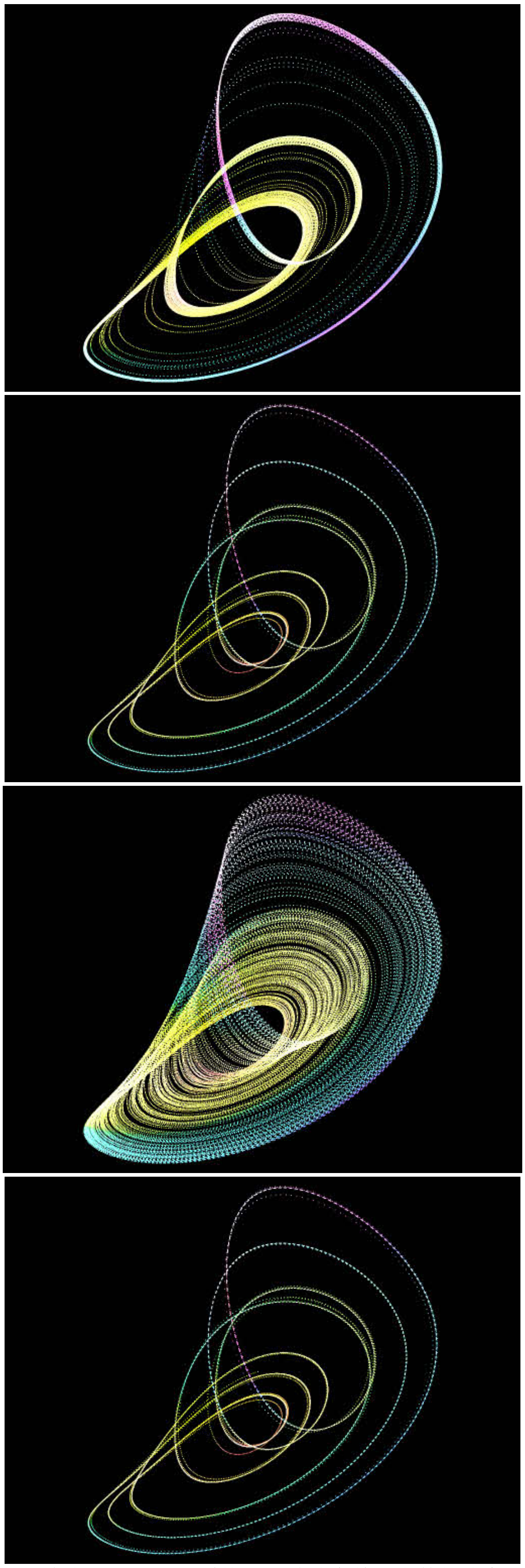


图14 广义Rössler混沌系统族随着某个单一参数的演变，逐渐从原始的Rössler吸引子，演变成一族不同的吸引子，中间经历了很多次的周期解到混沌的变化。

$(\dot{x}=-y-z\,,\ \dot{y}=x+0.2y\,,\ \dot{z}=-0.4y-rz+xz-0.3)$

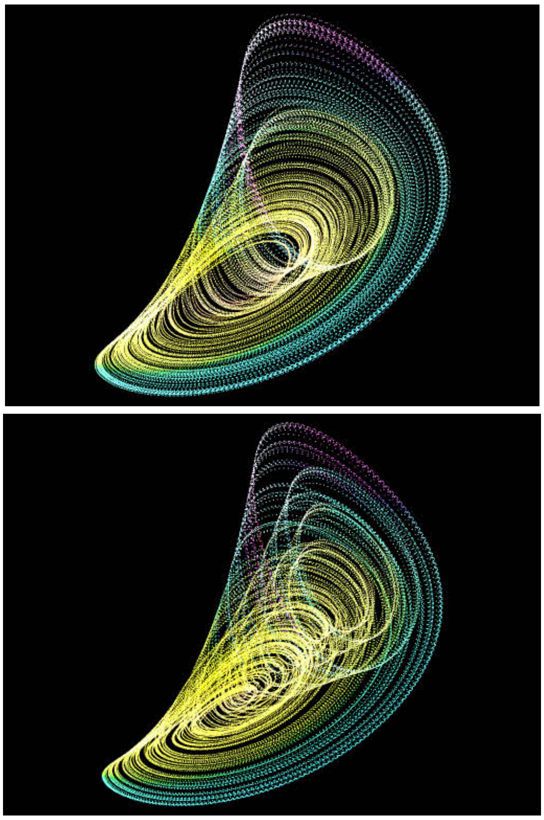


图15 广义Rössler混沌系统族最终演变出的混沌吸引子($r = 0.83$)，某种程度对应于广义Lorenz混沌系统族中的Chen吸引子

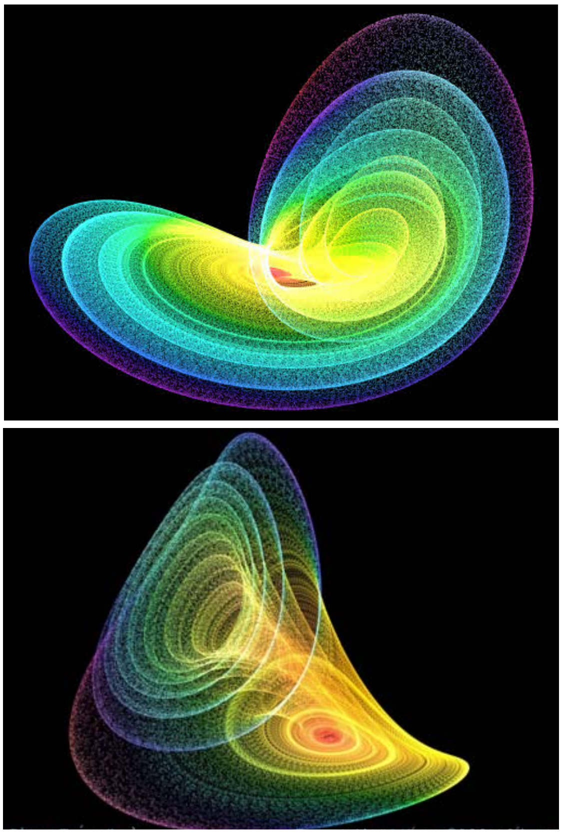
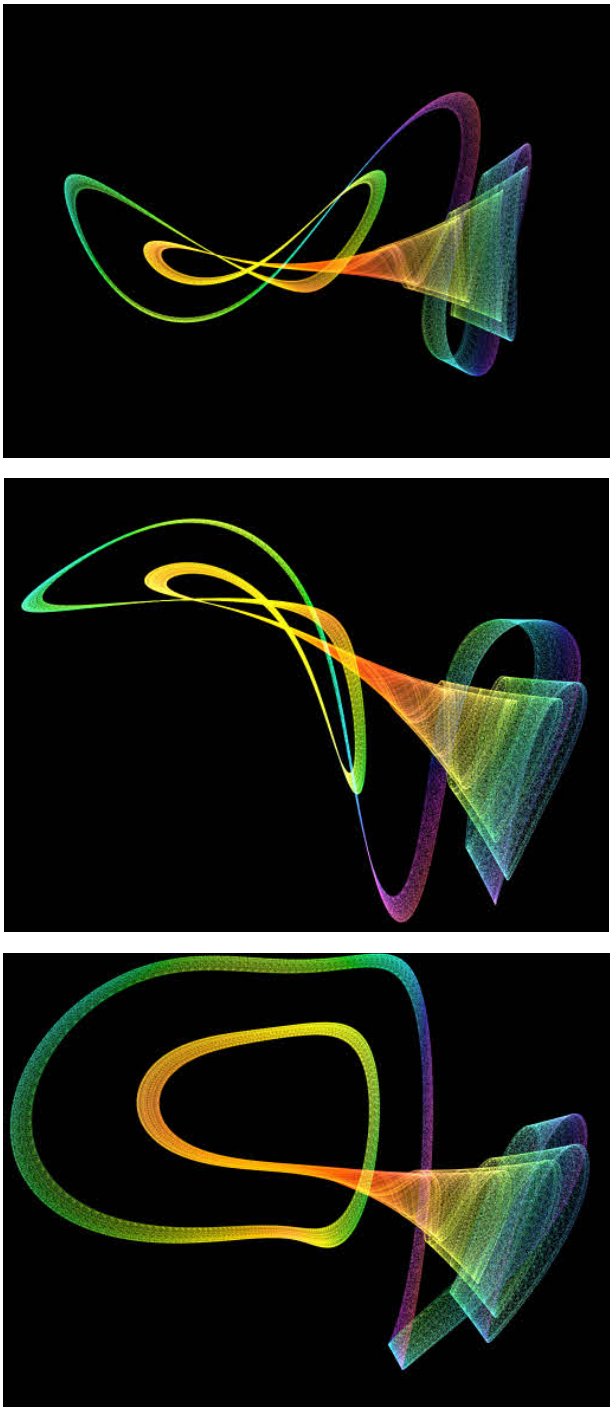


图16 另几个非线性动力系统展示的类似的吸引子

8 蝴蝶结吸引子

如果一个非线性系统的非线性项越多、越复杂，那么其产生混沌的可能性也越大，而且产生的吸引子通常也越丰富多彩。所以主要还是集中研究非线性项尽可能少且尽可能简单的系统。在有至多三个二次项的三维非线性自治系统里，发现了不少有趣的例如蝴蝶结形状的吸引子，如图17所示。



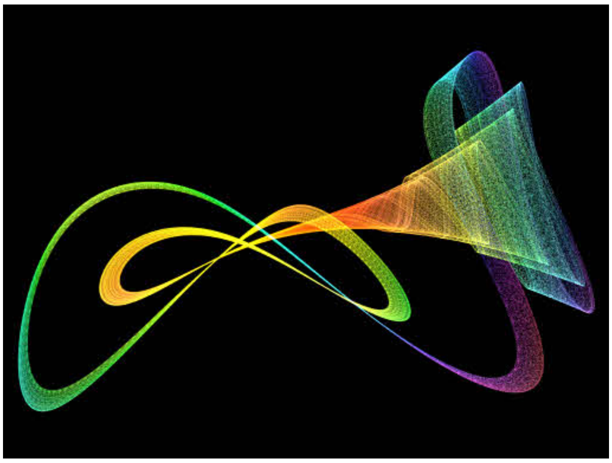


图17　含有3个二次非线性项的系统($\dot{x}=-ax+y-bz^2$, $\dot{y}=-cx+dy-xz, \dot{z}=xy-ey-z$)，调节参数产生非对称的混沌吸引子，像一个蝴蝶结

9　靠椅吸引子

依然是在有至多三个二次项的非线性系统里，还发现了另一类非常漂亮的吸引子，看起来像一个靠椅(chair attractor)，如图18、图19所示。

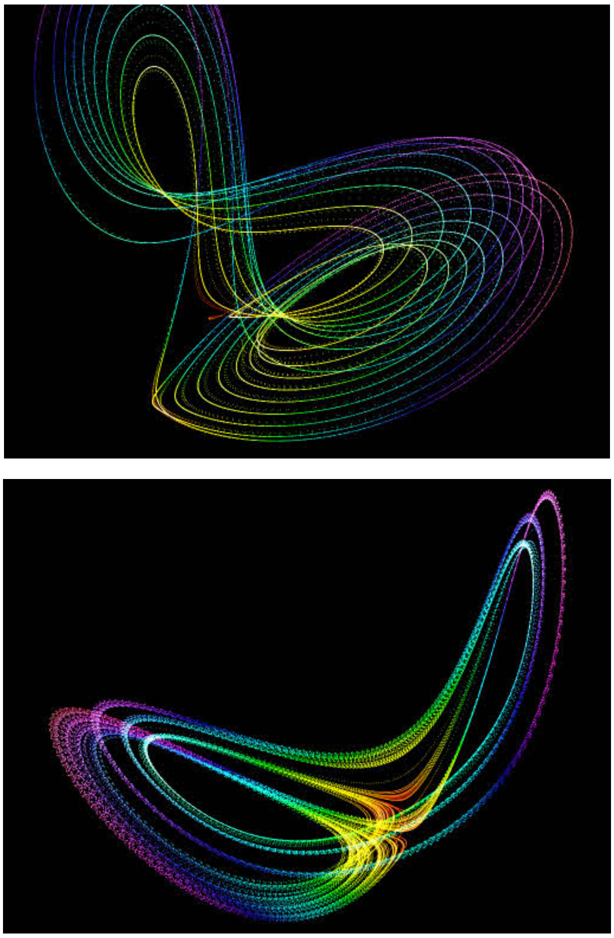
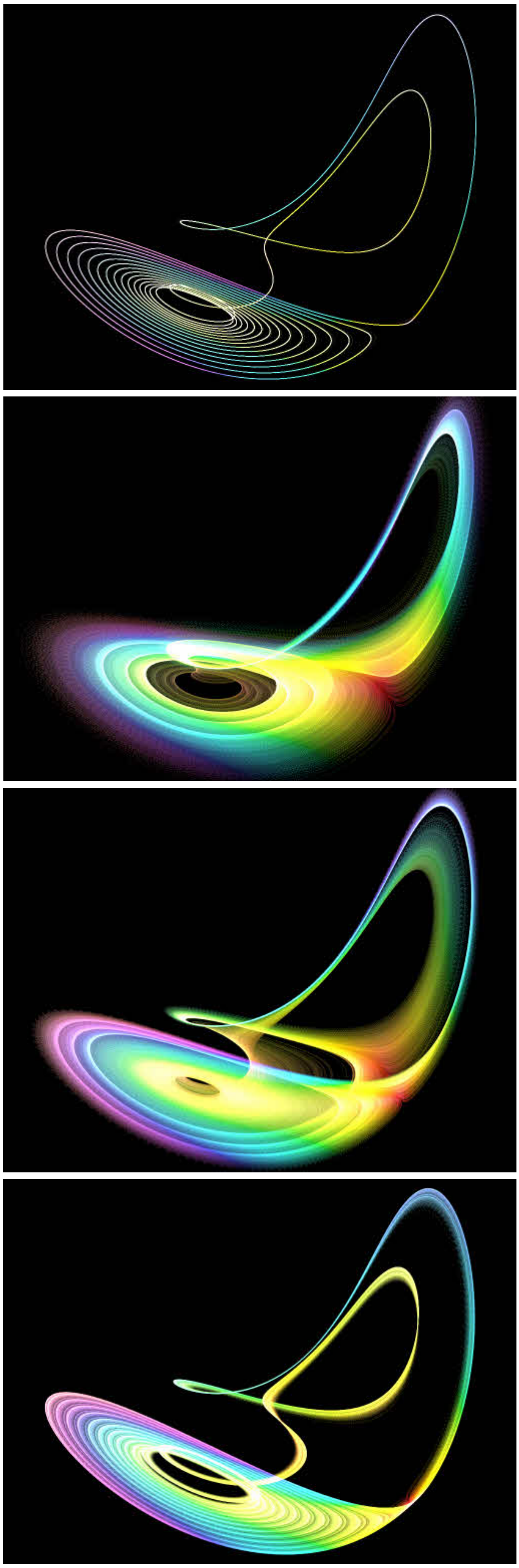
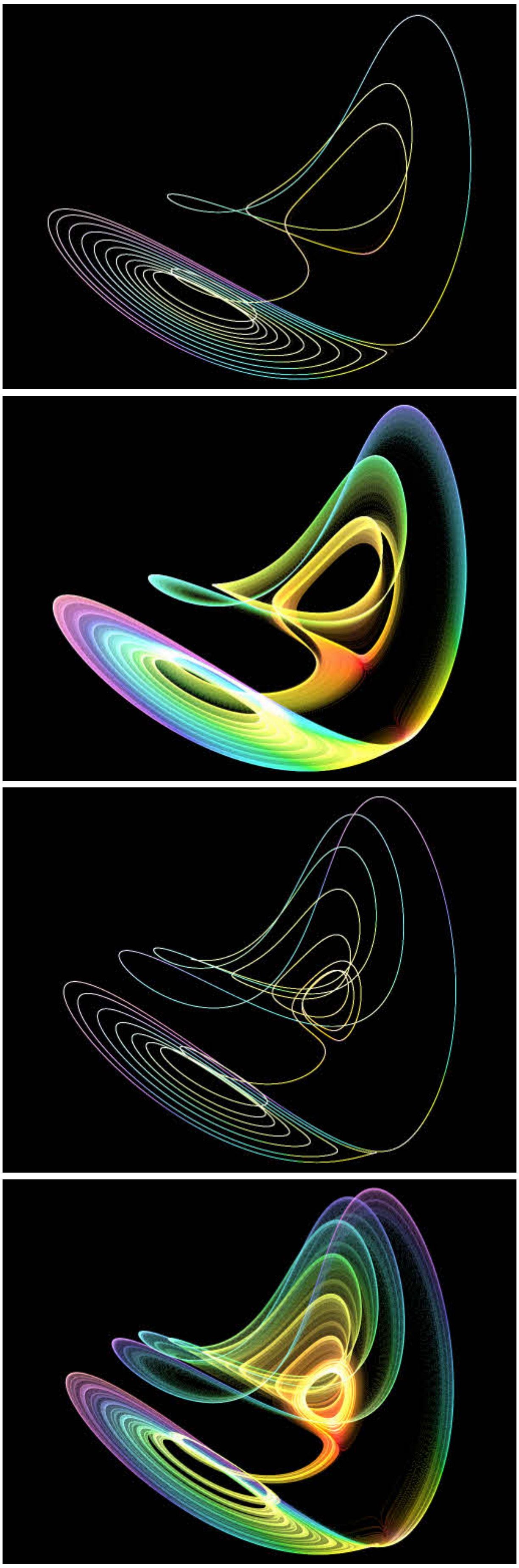


图18　靠椅吸引子
($\dot{x}=ax-y-bz+c$,　$\dot{y}=-x-xz, \dot{z}=xy-rz$)





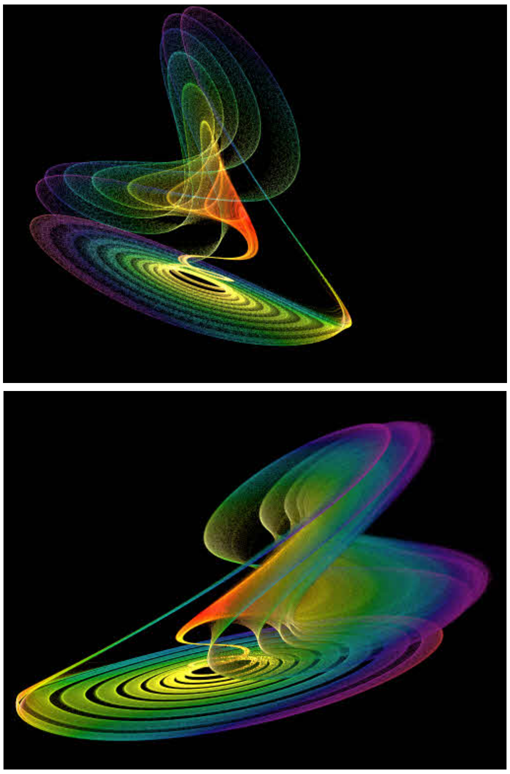
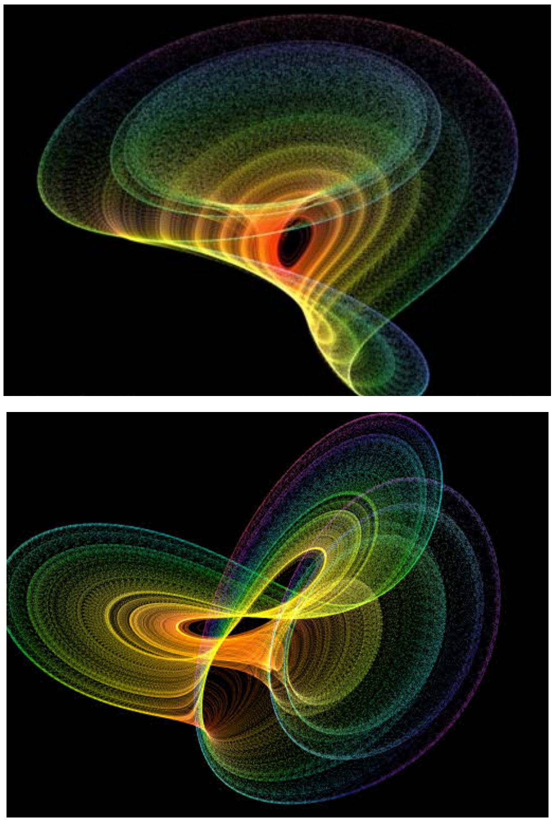
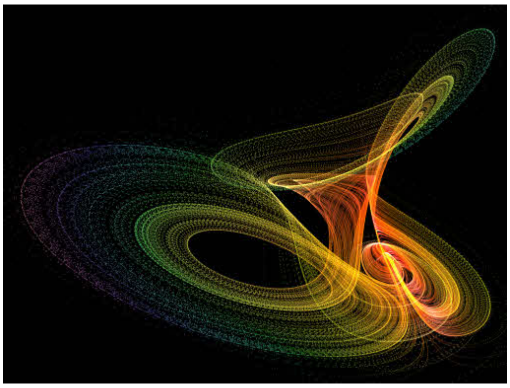


图19　更加复杂的靠椅吸引子

10　未命名的“奇怪”吸引子

最后向大家展示更多奇怪吸引子，它们都是由若干个简单的二次项构成的三维非线性自治系统产生的，呈现出各种各样漂亮的斑图，如图20所示。





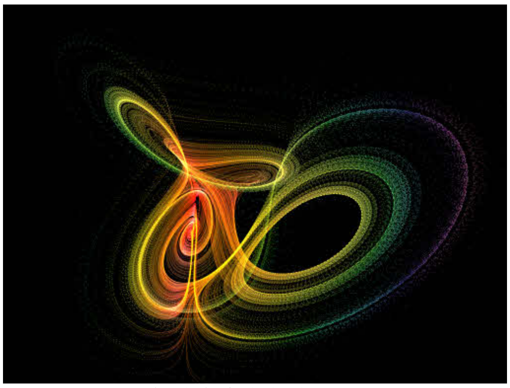


图20 各种未命名的奇怪吸引子。
多数产生于具有3个二次非线性项的系统。
($\dot{x}=-ax+y-bz^2, \dot{y}=-cx+dy-xz,\ \dot{z}=xy-ey-z$)

11 结束语

几何学研究的是世界上各种事物的形状。人们从日常的丈量大地等生活实践中创造了欧氏几何，研究直线、三角、圆等简单的几何对象。微积分发明后，人们借助微积分的力量，开始研究一些更复杂的几何对象，如光滑曲线，光滑曲面，乃至更一般的光滑流形。这些几何对象都是简单的，光滑的，是过去长期以来几何学研究的主题。

随着非线性动力系统研究的发展，以及计算手段的突飞猛进，人们开始意识到，除了那些简单的几何对象之外，还有一大类非常复杂的几何对象。混沌吸引子就是这样一类复杂的几何对象，对其研究才刚刚起步，还有很多未解之谜等待人们去揭示。

从第一个混沌系统——Lorenz系统发现以来，混沌学经历了很大的发展，它极其复杂和丰富的内涵也远远超出人们的想象。本文的研究限定在具有两三个二次项的三维非线性自治系统。但即便是在这样的限定下，本文仍然发现有超乎想象的丰富多彩。就像牛顿所说的，“我只是一个在海滩边玩耍的男孩，偶然间发现了一粒比较圆的石头，和一枚比较漂亮的贝壳，就觉得很愉快；但是在我面前，真理的大海还是一片未知”。本文仅仅挑选了其中的一些“贝壳”与各位读者分享，希望大家喜欢。

2012年也是庞加莱这位伟大的混沌先学行者逝世一百周年纪念。我们愿意以这篇小文表达对庞加莱的敬意。最后，引用庞加莱的一句话来结束本文：“科学家并不是因为大自然有用才去研究它，他研究大自然是因为他感到乐趣，而他对大自然感到乐趣是因为它的美丽，如果大自然不美，那就不值得认识，如果大自然不值得认识，就不值得活下去。”

参 考 文 献

[1] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flow[J]. J Atmos Sci, 1963(20): 130-141.
[2] CHEN G, UETA T. Yet another chaotic attractor[J]. Int J of Bifur Chaos, 1999(9): 1465-1466.
[3] UETA T, CHEN G. Bifurcation analysis of Chen’s equation[J]. Int J of Bifur Chaos, 2000(10): 1917-1931.
[4] LI T C, CHEN G, TANG Y. On stability and bifurcation of Chen's system, Chaos[J]. Solitons and Fractals, 2004(19): 1269-1282.
[5] ZHOU T S, CHEN G, TANG Y. Complex dynamical behaviors of the chaotic Chen's system[J]. Int J of Bifur Chaos, 2003(13): 2561-2574.
[6] VANECEK A, CELIKOVSKY S. Control systems: from linear analysis to synthesis of Chaos[M]. London: Prentice-Hall, 1996.
[7] LÜ J, CHEN G. A new chaotic attractor coined[J]. Int J of Bifur Chaos, 2002(12): 659-661.
[8] CELIKOVSKY S, CHEN G. On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems[J]. Int J of Bifur Chaos, 2002(12): 1789-1812.
[9] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz系统族的动力学：分析、控制与同步[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
CHEN Guan-rong, LÜ Jin-hu. Lorenz dynamics of the Lorenz systems family: Analysis, control and synchronization[M]. Beijing: Science Press, 2003.
[10] WANG X, CHEN G. A chaotic system with only one stable equilibrium[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2012, 17(3): 1264-1272.
[11] SPROTT J C. Some simple chaotic flows[J]. Phys Rev E, 1994(50): 647-650.
[12] WANG X, CHEN G. Constructing a chaotic system with any number of equilibria[DB/OL]. [2012-08-29]. http://arxiv.org/arg/abs/1201.5751.
[13] LÜ, CHEN J G, ZHANG S. The compound structure of a new chaotic attractor[J]. Chaos Solit Fract, 2002(14): 669-672.
[14] LÜ J, ZHOU T, CHEN G, et al. The compound structure of Chen’s attractor[J]. Int J Bifur Chaos, 2002: 12(4): 855-858.
[15] LIU W, CHEN G. A new chaotic system and its generation [J]. Int J of Bifur Chaos, 2003(13): 261-267.
[16] LIU W, CHEN G. Can a three-dimensional smooth autonomous quadratic chaotic system generate a single four-scroll attractor[J]. Int J of Bifur Chaos, 2004(14): 1395-1403.
[17] LÜ J, YU X, CHEN G. Generating chaotic attractors with multiple merged basins of attraction: a switching piecewise-linear control approach[J]. IEEE Trans Circuits Syst-I, 2003(50): 198-207.

编 辑 蒋 晓