

有限种群中策略演化的稳定性

唐长兵, 李翔

(复旦大学电子工程系 上海 杨浦区 200433)

【摘要】针对有限种群上的博弈, 人们给出不少定量的解析工作来刻画策略是如何在有限种群上达到稳定的。该文综述了有限种群中策略演化稳定性方面的一些代表性研究成果, 着重介绍了无结构种群中的风险占优策略和占优策略, 及结构种群中的结构占优策略等稳定性判据, 特别是著名的1/3法则和 σ 法则。最后简要展望了该领域若干发展方向。

关键词 复杂网络; 演化博弈论; 演化稳定策略; 有限种群

中图分类号 N949

文献标识码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2012.06.002

Stability of Evolutionary Strategies in Finite Populations

TANG Chang-bing and LI Xiang

(Department of Electronic Engineering, Fudan University Yangpu Shanghai 200433)

Abstract A lot of quantitative theoretical works have been proposed for evolutionary games aiming at evolutionary stable strategies in finite populations. In this paper, we review some latest representative researches, focusing on the risk-dominant strategy and advantageous strategy in well-mixed populations, and the structural dominant strategy in structured populations, including the famous 1/3 law and σ law. Finally, some future directions are pointed out.

Key words complex networks; evolutionary game theory; evolutionary stable strategy; finite populations

演化博弈论^[1]是研究演化动力学的一种常用方法, 它成功地把博弈论应用到生物背景中, 同时也为博弈引入了时间和基于演化的策略更新规则。演化博弈在动态过程中描述博弈者如何在博弈的重复较量中调整其策略以适应环境^[2], 主要思想采用了依赖于频率制约选择下适应度(frequency-dependent fitness, 对应于经典博弈论中的效用或收益)的策略更新方法。生物学家关注变异基因型(genotype)或表现型(phenotype)能否入侵原来的种群^[3], 从而放弃了经典博弈中Nash均衡的概念。在此基础上, 文献[4]提出了演化博弈中最为重要的概念, 演化稳定策略(evolutionary stable strategy, ESS), 即策略 i 若是ESS, 必须满足条件: 如果几乎所有的个体都采取策略 i , 那么这些采用策略 i 的个体的适应度要比任何可能的变异策略大, 否则变异策略可以入侵种群, 并且策略 i 将不稳定。

有了ESS的概念, 就可以判定策略演化的稳定性。由于经典博弈中最重要的概念是收益矩阵(payoff matrix)和收益, 因此可以把经典博弈中的想法应用到ESS中。假设生物的适应度与收益成简单

的线性关系, 则经典博弈中参与者理性(rationality)选择的策略就对应于ESS^[5]。与传统的Nash均衡^[6]相比, ESS这个概念要更加严格, 因此可用于平衡点选择。此外, 所有的ESS必定是Nash均衡, 但只有严格对称的Nash均衡才是ESS。美中不足的是ESS只假设表现更好的策略具有更快的复制(增长)速率, 并不涉及具体的博弈动力学。文献[7]引入了复制动力学的概念(replicator dynamics), 进一步拓展了演化动力学的研究。此复制方程是人口动力学Logistic模型的一个拓展, 其主要思想是假设某给定策略的净增长率为出生率与死亡率的差, 出生率为该策略个体的适应度, 死亡率为种群平均适应度。当某一策略的出生率大于种群死亡率时, 可视这一策略为“优”, 因而“胜”, 即该策略的比例增长; 反之, 可视这一策略为“劣”, 因而“汰”, 即该策略的比例减少。如果策略 i 是严格Nash均衡点, 即 $a_{ii} > a_{ji}$ 对所有 $i \neq j$ 都成立(a_{ij} 表示策略 i 之遇到策略 j 之时的收益), 则该策略对复制子方程而言必是一个渐进稳定的不动点。由此, 可知复制子方程是关于博弈动力学(策略更新)的连续确定性方程, 从而赋予ESS这一

收稿日期: 2012-09-01; 修回日期: 2012-10-12

基金项目: 国家自然科学基金(61273223); 教育部新世纪优秀人才计划(09-0317); 973项目(2010CB731403)

作者简介: 唐长兵(1981-), 男, 博士生, 主要从事复杂网络及演化博弈论应用方面的研究。

概念以动力学含义。复制子方程在不动点附近的稳定性将对应于ESS。

本文主要介绍了有限种群中双人博弈和多人双策略两种博弈模型下,策略是如何传播和蔓延,并给出策略演化的稳定性判据。首先,介绍了双人博弈模型在无结构种群下的风险占优(risk-dominant, RD)策略、占优(advantageous, AD)策略及类复制子方程,和结构种群下的结构占优(structural dominant, SD)策略,社团结构上的 σ 法则及图上的类复制子方程。着重介绍了占优策略中的1/3法则和结构占优策略中的 σ 法则。其次,介绍了多人双策略博弈模型下的策略演化稳定性判据。最后给出总结,并简要展望了该领域若干发展方向。

1 有限种群中双人博弈策略演化的稳定性

不管是ESS还是复制子方程,两者都假设人口为无限且均匀混合。但现实中,往往需要考虑人口为有限的情形。当种群规模有限时,系统状态成为离散点集,因此演化动力学将受到随机性的影响而满足随机动力学基本性质。描述策略演化随机过程包括Moran过程^[10]、Wright-Fisher过程^[11]和对比较过程(pairwise comparison rule)^[12]。此时,随机漂变和频率制约选择的交互作用将共同决定演化动力学。

此外,在生态学中,研究者已经意识到系统状态的离散和人口结构的重要性^[13],直到最近,演化博弈的研究才从无结构无限种群的动力学转向带结构的有限种群动力学^[14]。

1.1 无结构种群

首先考虑有限且无结构种群,即每个个体可以和种群中所有其他个体进行博弈。

1.1.1 风险占优策略

考虑双策略博弈模型,策略分别记为A和B,相应的收益矩阵为:

$$\begin{bmatrix} & A & B \\ A & a & b \\ B & c & d \end{bmatrix} \quad (1)$$

对于规模为 N 的种群,每个个体以同等机会与种群中其他个体进行博弈并获得收益。此时,系统状态可用种群中策略A个体数目 $i(0 \leq i \leq N)$ 来刻画。策略A、B的适应度分别为:

$$f_i = 1 - \omega + \omega F_i, \quad g_i = 1 - \omega + \omega G_i \quad (2)$$

式中, $F_i = [a(i-1) + b(N-i)] / (N-1)$, $G_i = [ci + i-1] / (N-1)$, 分别是采取策略A和B时的收益;

$\omega(0 < \omega < 1)$ 表示选择强度。如果 $\omega = 0$,则博弈对适应度没有影响,策略A和B是中性变量;如果 $\omega = 1$,则表示选择作用很大,适应度完全由收益决定。在 $\omega \rightarrow 0$ 的弱选择条件下,收益对适应度的影响较小。

在每一时间步,按照正比于适应度的概率选择一个个体进行复制,并替代一个随机选取的个体。则A的数目在一步更新后或增加一或减少一或保持不变。系统在一步内从状态 i 变到 $i+1$ 、 $i-1$ 和 i 的转移概率为:

$$T_i^+ = \frac{if_i}{if_i + (N-i)g_i} \frac{N-i}{N}, \quad T_i^- = \frac{(N-i)g_i}{if_i + (N-i)g_i} \frac{i}{N} \\ T_i^0 = 1 - T_i^+ - T_i^- \quad (3)$$

这个随机过程有两个吸收态: $i=0$ 和 $i=N$ 。如果种群达到这两个吸收态之一,则系统将永远保持状态不变。以 ϕ_i 表示种群从 i 个A个体开始演化到 $i=N$ 终态的概率,即扎根概率(fixation probability),那么有以下关于 ϕ_i 的递归方程(recursive equation)^[15-17]:

$$\phi_i = T_i^+ \phi_{i+1} + T_i^0 \phi_i + T_i^- \phi_{i-1} \quad (4)$$

边界条件为 $\phi_0 = 0$ 和 $\phi_N = 1$ 。文献[18]在1975年给出了式(4)的解。 ϕ_i 是演化中最为关心的量,这个量被文献[19]得到:

$$\phi_i = \rho_A = 1 / \left(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k \frac{T_i^-}{T_i^+} \right) \quad (5)$$

式中, ρ_A 表示单个A个体入侵并占据由所有B个体组成的种群的概率。

从收益矩阵式(1)可知,如果 $a > c$ 且 $b > d$,则策略A比策略B占优;如果 $a > c$ 但 $b < d$,则策略A和B都是严格Nash均衡点,此时策略A与策略B的优劣依赖于A、B的比例;当 $a > d$,则策略A是帕累托有效(Pareto efficiency)的;当 $a+b > c+d$,则策略A是风险占优策略,且相比于策略B具有更大的吸引域^[20]。在不知道对手策略的情况下,选择风险占优策略则比较安全,而双方都选帕累托有效策略则具有更高的回报。

当满足种群数目 N 充分大($N \gg 1$)时,文献[15]指出对于双方都是严格Nash均衡的情形,风险占优策略有着较高的扎根概率,即,如果策略A是风险占优策略,则 $\rho_A > \rho_B$ 。在弱选择条件下,

$$\rho_A = 1 + \omega [N(a+b-c-d)/2 + d - a] \quad (6)$$

所以, $\rho_A > \rho_B$ 等价于

$$a(N-2) + bN > cN + d(N-2) \quad (7)$$

当 N 充分大时,式(7)等价于风险占优条件 $a+b > c+d$ 。这也说明当内部平衡点

$x^* = \frac{d-b}{a-b-c+d} < \frac{1}{2}$ 时, 风险占优策略有着较高的扎根概率。不等式(7)给出了在Moran过程的弱选择条件下, 双方都是严格Nash均衡时, 如何判断哪种策略具有更高的比例, 是策略在有限均混种群中演化稳定的一种扩展。此时, 风险占优策略具有更高的比例, 也更容易被选择作用所“青睐”。此外, 该不等式同样适用于对比较过程下的强选择条件^[21-22]。

1.1.2 占优策略

1.1.2.1 无突变的情形: 1/3法则(one-third rule)

在无突变的情形下, 当满足种群个体数目充分大($N \gg 1$), 且满足弱选择条件时, 文献[15]给出了演化博弈理论中重要的1/3法则。这一法则认为自然选择支持A策略的条件是:

- 1) 博弈属于双稳态类型($a > c, b < d$), 存在中间不稳定平衡点 x^* ;
- 2) $\phi_1 > 1/N$;
- 3) $x^* = (d-b)/(a-b-c+d) < 1/3$ 。

条件1)说明两个策略都是Nash均衡, 条件2)和3)表明内部平衡点 $x^* < 1/3$ 时, 变异策略的扎根概率 $\phi_1 > 1/N$, 此时自然选择倾向于变异策略的扎根。

在1/3法则的基础上, 文献[15]指出经典的ESS判据需要修改, 在有限人口N的情况下, B策略是ESS, 需要满足以下条件^[15]:

- 1) 选择不利于A入侵B, 即B种群中的一个变异个体A具有较低的适应度;
- 2) 选择不利于A取代B, 即 $\rho_A < 1/N$ 。所以说, 1/3法则建立了有限种群的演化稳定策略与无限种群复制动力学方程平衡点的联系。

最初, 1/3法则依赖于频率相关的Moran过程, 通过计算扎根概率来判断选择的方向。应该指出1/3法同时也适用于Fermi过程^[12]、Wright-Fisher过程^[23]、广义对比较过程和广义Moran过程^[24]、Kingman溯祖理论下的过程^[25]。此外还发现, 1/3法则对Fermi学习规则下不同的收益方式也是成立的^[26]。文献[27]则考虑了1/3法则二阶演化稳定条件。文献[28]推广了文献[15]关于弱选择条件下ESS的充分条件: 当 $N\omega \ll 1$ 时, 1/3法则是有效的; 当 ω 固定且 $N \gg 1$ 时, 传统的ESS判定条件成立。文献[29]则发现1/3法则等价于变异策略在固定路径(fixation path)上的平均收益大于原来策略, 因而给出了1/3法则的直观解释。

进一步, 内部平衡点 $x^* < 1/3$ 等价于 $a + 2b > c + 2d$ 。如果满足条件 $a + 2b > c + 2d$, 则称策略A

是占优(advantageous, AD)策略, 这也方便从收益矩阵入手来判断自然选择是否支持A策略。而占优(AD)策略也可以看成是对无限种群中ESS概念的推广, 是策略在有限均混种群中演化稳定中另一种形式扩展。

1.1.2.2 有突变的情形: 嵌入链方法和溯祖理论

当突变变得频繁时, 在大时间尺度下, 每一策略都可能出现, 因而扎根概率丧失了意义, 这时研究者关心给定策略出现的比例。设种群中共有n种策略, 当只有随机漂移和变异作用时, 每个策略的比例为1/n。当有选择作用, 并且某策略的平均频率大于1/n时, 称该策略为占优策略。

考虑n种策略的博弈模型, 假设个体以正比于其收益选择复制并以概率 μ ($\mu \ll 1$) 选择突变, 以概率 $1-\mu$ 沿用其父辈策略。当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 出现突变所需时间 $1/\mu$ 比策略扎根时间长得多, 因此大部分时间系统处于纯态, 即种群中个体都采取相同策略, 此时原来带突变率的Markov链可以被嵌入链逼近^[30]。此嵌入链的状态空间是所有可能的纯态的集合, 即 $All_i | 1 \leq i \leq n$ 。它的转移概率矩阵为:

$$\begin{matrix}
 All_1 & \cdots & All_n \\
 All_1 & 1 - \frac{\mu}{n-1} \sum_{i \neq 1} \rho_{1i} & \cdots & \frac{\mu}{n-1} \rho_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 All_n & \frac{\mu}{n-1} \rho_{n1} & \cdots & 1 - \frac{\mu}{n-1} \sum_{i \neq n} \rho_{ni}
 \end{matrix} \quad (8)$$

式中, 概率 ρ_{ij} 表示一个采用j-策略变异个体在i-策略个体中扎根的概率。若i种群变为j种群, 首先要发生突变(以概率 μ), 且此突变个体属于策略j(以概率 $1/(n-1)$), 最后这个j-策略变异个体在i种群扎根(以概率 ρ_{ij})。利用转移概率矩阵可求出不变分布, 因此可比较任意分量是否大于1/n, 从而解决多策略占优问题。

此时, 可以考虑其中某两个策略, μ_{ij} 表示i-策略个体突变为j-策略个体的概率, 由此可以得到 $n \times n$ 转移矩阵 $A = (A_{ij})$, 其中 A_{ij} 表示一个j-策略突变个体在i-策略个体中扎根的概率。根据公式:

$$\lambda A = \lambda \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1 \quad (9)$$

式中, $\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$, 可以求出唯一的极限分布 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 由此来判断在每个策略逗留时间的长短^[31]。

根据以上理论, 文献[32]考虑始终背叛(ALLD), 始终合作(ALLC), 一报还一报(TFT)3种策略的囚徒困境重复博弈模型, 虽然ALLD是严格的Nash均衡

点,但当引入突变 μ ,会观察到稳定的极限环和演化行为在3种策略间不间断的振荡。通过计算3种策略的极限分布,发现大部分时间逗留在TFT附近。文献[33]则通过计算极限分布来判断最终选择将支持哪种策略。并通过讨论人类语言的演化,来说明在有限种群中,即使 N 很大,这样得到的类似复制子方程和标准的复制子方程还是不同的。特别针对策略数目充分大的演化过程,文献[34]发展了嵌入链方法,利用随机微分方程代替了转移概率矩阵,并给出了计算不变分布的公式。文献[35]则研究了嵌入链方法的有效性,指出除对于共存博弈之外的其他博弈模型,只要变异率小于 $(N \ln N)^{-1}$,就可以充分保证嵌入链方法的有效性。对于共存博弈,保证嵌入链方法的有效性要求变异率小于 $N^{-1/2} \exp[-N]$ 。

嵌入链方法的优势在于它可研究强选择下策略的演化,给出多策略占优问题的判据,且这个方法将有助于加深理解各种多样性,如声望、标签对演化动力学的影响^[35]。

随着突变率的增大,嵌入链的方法将失效,此时可以采用溯祖理论来考虑策略的占优问题。溯祖理论与传统的群体遗传学不同,是建立在“血统同源性”这一时间回溯的思考方式上的^[36-38]。对种群中任选的若干个样本进行历史回溯,这些样本以概率1可以在有限代内找到共同祖先(most recent common ancestor, MRCA)。当这些个体样本找到共同祖先时,称他们的回溯过程接合(coalesce)。

应用溯祖理论,对任何变异率,文献[39-40]建立了策略的平均频率高于 $1/n$ 的判据,即当策略 A 的比例 $\langle x_A \rangle_\delta > 1/n$ (δ 是选择强度, n 是策略数),策略 A 是占优策略。进一步,两个策略 A 、 B ,当 $\langle x_A \rangle_\delta > \langle x_B \rangle_\delta$ 时,相对于策略 B ,策略 A 是占优的。文献[39]给出双策略情形下,策略 A 占优的条件是 $a(N-2)+bN > cN+d(N-2)$,这与风险占优条件式(7)相吻合,所不同的是此处适用于任意突变率。文献[40]则给出多策略情形下策略占优的判据。对于具有任意突变的情形,得到 k 策略占优的条件是:

- 1) $\mu \ll 1/N, L_k = \sum_{i=1}^n (a_{kk} + a_{ki} - a_{ik} - a_{ii})/n > 0$;
- 2) $\mu \gg 1/N, H_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{kj} - a_{ij})/n^2 > 0$;
- 3) 任意 $\mu, L_k + N\mu H_k > 0$ 。

相对于 j 策略, k 策略占优的条件为:

$$L_k + N\mu H_k > L_j + N\mu H_j \quad (10)$$

与嵌入链方法相比,溯祖理论可研究任意突变

率下的策略演化,但同时也限制了选择强度,因为归根结底,溯祖理论是在关于选择强度的扰动分析中使用的。

1.1.3 均衡种群结构上的类复制子方程

对于有限人口,演化动力学是一个随机过程,但是当种群数目 $N \rightarrow \infty$,情况又如何呢?文献[41]发现若采用标准的Moran更新规则,在 $N \rightarrow \infty$ 时,人口演化的随机动力学将对应于调整复制子方程(adjusted replicator equation)。如果采用点对比较(pair comparison)更新规则,在 $N \rightarrow \infty$ 时,人口演化的随机动力学形式上将对应于标准复制方程。记 $x = i/N$,以 $p(x,t)$ 表示人口在 t 时刻处于 x 状态的概率密度,那么 $p(x,t)$ 满足Fokker-Planck方程(FPE)^[41]:

$$\frac{d}{dx} p(x,t) = -\frac{d}{dt} [a(x)p(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [b^2(x)p(x,t)] \quad (11)$$

式中, $a(x) = T^+(x) + T^-(x)$; $b(x) = \sqrt{(T^+(x) - T^-(x))/N}$; $T^+(x)$ 和 $T^-(x)$ 表示状态转移概率。对式(11)采用Itô积分,从而得到Langevin方程为:

$$\dot{x} = a(x) + b(x)\xi \quad (12)$$

式中, ξ 为非相关高斯噪声。当 $N \rightarrow \infty$ 时, $b(x) \rightarrow 0$,式(12)由随机微分方程变成了确定性的复制子方程。文献[42]将该结论推广到任意多策略,且具有较小突变 μ 的情形。文献[43]则考虑了多策略情形下,带有噪声的类复制子方程。通过对类复制子方程平衡点稳定性的分析,从而可以判断策略演化的稳定性。

1.2 结构种群

均匀混合群落结构下,可以认为所有个体之间都是相互作用的。但不论是在微生物种群里还是人类社会,这样全局交互只是理想模型,局部的相互作用更为普遍。若将种群结构(即当个体之间的邻居关系)用一个网络来表示,则每一轮演化博弈中,个体与所有的邻居进行一次博弈,根据自身与邻居的策略获取收益,总计获得一个累积收益。个体下一轮按照一定的策略演化规则,根据自身与邻居的累积收益来更新自己的策略。

1.2.1 结构占优策略和 σ 法则

目前很多针对网络上的演化博弈研究主要是一些数值仿真结果,此时平均场方法、对估计方法由于网络的异质性而失效。但溯祖理论为网络上策略的演化稳定提供了理论平台。利用溯祖理论,文献[44]给出了一个简单有效的判断法则,即满足不

等式:

$$\sigma a + b > c + \sigma d \quad (13)$$

则在弱选择条件下, 策略 A 比策略 B 占优, 即选择支持策略 A , 称之为 σ 法则。这个法则不但适用于均匀混合的种群结构, 且对图(graph), 性状空间(phenotype space)^[45]及集(set)^[46]等一些特殊的种群结构上的博弈同样适用。也正因为此, 文献[47]称这样的占优为结构占优。

其中, σ 为结构系数, 它依赖于种群结构, 但不依赖于收益矩阵。为此, 对于不同的种群结构, σ 的值也不同。对于均匀的种群结构, $\sigma = (N - 2) / N$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\sigma = 1$ 。对结构种群, 一般有 $\sigma > 1$ 。对于度为 k 的规则图而言, 生死(birth-death)过程的 $\sigma = 1$, 死生(death-birth)过程的 $\sigma = (k + 1) / (k - 1)$ ^[48]。

在低突变率的条件下, 对于性状空间, $\sigma = \frac{1 + 4\nu}{2 + 4\nu} \left(1 + \sqrt{\frac{3 + 12\nu}{3 + 4\nu}} \right)$, 其中 $\nu = 2N\nu$, ν 为性状空间突变率^[45]。对于集, $\sigma = \frac{1 + \nu}{3 + \nu} \times \frac{M(3 + 2\nu) + K\nu(\nu + 2)}{M + K\nu(\nu + 2)}$,

其中 $\nu = 2N\nu$ 为集突变率, M 为集个数, K 为集成员个数^[46]。更一般地, 文献[49]在假设全局更新, 常数出生率或死亡率的条件给出统一的计算表达式, 即

$$\sigma = \langle I_{AA} N_B \rangle_0 / \langle I_{AB} N_B \rangle_0 \quad (14)$$

式中, I_{AA} 表示所有 A 个体遇上对手也为 A 的次数; I_{AB} 表示所有 A 个体遇上对手为 B 的次数; N_B 为种群中采用策略 B 的个数; 符号 $\langle \rangle_0$ 表示在中性条件下 ($\omega = 0$); I_{AA} 与 N_B 乘积的平均数。

对于多策略的情形, 文献[50]讨论了一般种群结构上的博弈模型, 得到 k 策略占优的条件:

$$(\sigma_1 a_{kk} + \bar{a}_{k*} - \bar{a}_{*k} - \sigma_1 \bar{a}_{**}) + \sigma_2 (\bar{a}_{k*} - \bar{a}) \quad (15)$$

式中, $\bar{a}_{k*} = (1/n) \sum_{i=1}^n a_{ki}$, 表示 k 策略的平均收益;

$\bar{a}_{**} = (1/n) \sum_{i=1}^n a_{ii}$, 表示采用相同策略的平均收益;

$\bar{a}_{*k} = (1/n) \sum_{i=1}^n a_{ik}$, 表示与 k 策略博弈的平均收益;

$\bar{a} = (1/n^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$, 表示所有博弈者的平均收益;

σ_1, σ_2 是结构系数, 依赖于种群结构, 更新规则及突变率, 但并不依赖于策略数和收益矩阵。

具体地, 当 $\mu < \mu^*$ 时, 由于 $\sigma_1 > \sigma_2$, 对整个演化动力学而言, 种群结构影响大于突变的作用。反之, 当 $\mu > \mu^*$ 时, 由于 $\sigma_1 < \sigma_2$, 突变的作用要强于种群结构对演化行为的影响。直观上, 可以理解式

(15)的第一项表示纯策略间的竞争, 第二项表示混合策略间的竞争, 如图 1 所示(以 $n=3$ 为例)。

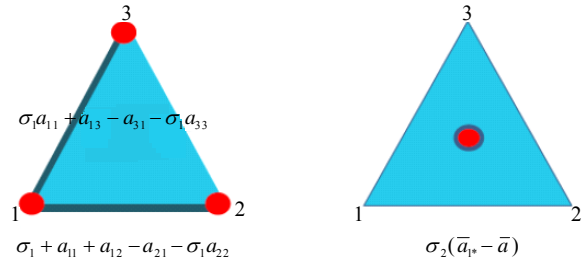


图1 $n=3$ 时, 式(15)的几何解释

这个结果概括了一系列以往在弱选择下的策略占优判据, 特别地, 对 $n=2$, 令 $\sigma = (2\sigma_1 + \sigma_2) / (2 + \sigma_2)$, 式(15)退化为 $\sigma a + b > c + \sigma d$ 。

1.2.2 社团结构上的 σ 法则

文献[51]指出, σ 反应了种群结构对演化动力学的影响, 但 σ 除了结构因素外, 也反应了个体之间博弈的不同交互率。

考虑共有 H 个 A, B 两种类型的个体, 均匀分布在 M 个社团中(不妨假设每个社团有 N 个个体的社团结构博弈模型, 收益矩阵如式(1)。并假定社团之间存在网络结构, 社团之间的能发生迁移当且仅当两社团之间存在边, 如图2所示。

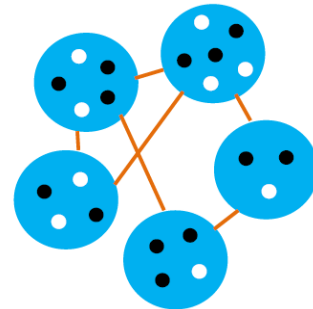


图2 社团结构示意图

在每一时间步, 个体以正比于其适应度的概率选择复制, 产生的新个体要么随机取代该个体所在社团中的个体, 要么根据社团间的网络结构产生迁移, 然后随机取代迁移后社团中的个体。通过计算单个个体在入侵并扎根整个种群过程中的有效逗留时间, 得到总的有效博弈次数有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 1 & \sigma \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中, $\sigma = c_l \sigma^l + \sum_{m \in \Omega_l} c_m \sigma^m$; $\sigma^m = \langle I_{AA}^m N_B^m \rangle_0 / \langle I_{AB}^m N_B^m \rangle_0$;

系数 $c_n (n \in l \cup \Omega_l)$ 反应了社团 n 中有效博弈次数的强度。根据式(16), 可知相同策略间的博弈次数是不同策略间博弈次数的 σ 倍。而在整个扎根过程中,

采用策略 A 的个体平均收益为 $\sigma a + b$ ，采用策略 B 的个体平均收益为 $c + \sigma d$ 。所以，策略 A 相比于策略 B 是结构占优策略的条件是 $\sigma a + b > c + \sigma d$ ，即这样的社团结构上也满足 σ 法则。

为了验证 σ 除了反映结构因素以外，也刻画了个体之间博弈的不同交互率，采用非一致博弈的思想^[52]：

$$\begin{aligned} A + A &\xrightarrow{r_1} AA \\ A + B &\xrightarrow{r_2} AB \\ B + B &\xrightarrow{r_3} BB \end{aligned} \quad (17)$$

为了方便起见，假设 $r_1 = r_3 = r$ ， $r_2 = 1$ 。考虑简化囚徒困境模型，其收益矩阵为：

$$\begin{bmatrix} & C & D \\ C & \eta - \theta & -\theta \\ D & \eta & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中， η 表示合作带来的收益； θ 表示合作所产生的花费。在社团 l 中采用策略 C 和 D 的个体的收益分别为：

$$\begin{aligned} f_C^l &= [r(\eta - \theta)x^l - \theta y^l] / (rx^l + y^l) \\ f_D^l &= \eta x^l / (rx^l + y^l) \end{aligned} \quad (19)$$

式中， x^l 表示社团 l 中采用策略 C 个体的比例； y^l 表示社团 l 中采用策略 D 个体的比例。利用类复制子方程^[41-42]可以得到：

$$\begin{aligned} \dot{x}^l &= \frac{N_D^l}{N} \left[\frac{\bar{f}^l}{f^l + \lambda_l} \frac{N_C^l f_C^l}{N f^l} + \frac{\lambda_l}{f^l + \lambda_l} \frac{\langle N_C \rangle}{N} \right] - \\ &\frac{N_C^l}{N} \left[\frac{\bar{f}^l}{f^l + \lambda_l} \frac{N_D^l f_D^l}{N f^l} + \frac{\lambda_l}{f^l + \lambda_l} \frac{\langle N_D \rangle}{N} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

式中， λ_l 表示迁移率； \bar{f}^l 表示社团 l 中的平均适应度； $\langle N_x \rangle = \sum_{l=1}^M N_x^l / M$ 。通过对式(20)平衡点的分析，可以得到 C 策略占优的条件为：

$$r(\eta - \theta) - \theta > \eta \quad (21)$$

式(21)与条件(13)相吻合。所以，非一致博弈率 r 与 σ 扮演了相同的作用，即刻画了个体之间博弈的不同交互率。

1.2.3 图上的类复制子方程

对于规则图，由于每个节点的度相同，可以采用对估计的方法来刻画网络上的演化博弈动力学。利用此方法，文献[53]考虑了度为 k 的规则图上的博弈模型，在 $N \rightarrow \infty$ 条件下，将演化动力学转化为如下类复制子方程：

$$\dot{x}_i = x_i \left(\sum_{j=1}^n x_j (a_{ij} + b_{ij}) - \bar{f} \right) \quad (22)$$

式中， n 为策略数； x_i 表示策略 i 的比例；矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示其收益矩阵；矩阵 $B = (b_{ij})$ 表示局部博弈所得收益； \bar{f} 表示平均适应度。对死生更新规则， b_{ij} 为：

$$b_{ij} = \frac{(k+1)a_{ii} + a_{ij} - a_{ji} - (k+1)a_{jj}}{(k+1)(k+2)} \quad (23)$$

从而将均匀混合种群结构上的收益矩阵 (a_{ij}) 转化为度为 k 的规则图上的收益矩阵 $(a_{ij} + b_{ij})$ 。由此，作者进一步给出策略演化稳定的条件。特别地， $n = 2$ ，策略 A 为 ESS 的条件为^[54]：

$$(k^2 + 1)a + b > (k^2 - k - 1)c + (k + 1)d \quad (24)$$

2 有限种群中多人双策略博弈策略演化的稳定性

在实际当中，博弈的对象不仅仅是两两交互的，而是多人交互的，如蚁群中的合作，公众运输系统，气候的保护等等，这些都需要众多的参与者同时交互。多人博弈从最初文献[55-56]提出的“公共地的悲剧(tragedy of the commons)”开始，到多人参与者的合作的演化分析，已经有不少学者关注^[57-60]，但一般的多人交互博弈的工作目前还是比较欠缺的。

考虑有 n 个人参与，且只有两种策略(分别为 A 和 B) 博弈模型。记 α_i 为以 α ， $(\alpha \in \{a, b\})$ 为中心节点，且其余有 i 个 A 策略个体参与时的收益。则其收益 α_i 如表1所示。

表1 n 人参与双策略博弈模型的收益 α_i

其余A的数目	A	B
$n-1$	a_{n-1}	b_{n-1}
\vdots	\vdots	\vdots
k	a_k	b_k
\vdots	\vdots	\vdots
0	a_0	b_0

文献[61]从复制子方程的角度，分别给出了在种群数目为无限和有限情况下的策略演化动力学。

当种群数为无限时，设采用 A 策略的比例为 x ，则一个 A 策略个体与其余 k 个 A 策略个体交互的概率服从二项分布，则 A 策略个体与 B 策略个体平均收益分别为：

$$\begin{aligned} \pi_A &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} a_k \\ \pi_B &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} b_k \end{aligned}$$

在种群数为无限时，可以用复制子方程来描述策略的演化：

$$\dot{x} = x(1-x)(\pi_A - \pi_B) \quad (25)$$

通过求解 $\pi_A = \pi_B$, 来分析除 $x=0, x=1$ 以外平衡点的稳定性。

当种群数 N 为有限时, 策略的演化会受到随机因素的影响, 且1个 A 策略个体与其余 k 个 A 策略个体交互的概率服从超几何分布, 此时 A 策略个体与 B 策略个体平均收益分别为

$$\pi_A = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{j-1}{k} \binom{N-j}{n-1-k} / \binom{N-1}{n-1} \right] a_k$$

$$\pi_B = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{j}{k} \binom{N-j-1}{n-1-k} / \binom{N-1}{n-1} \right] b_k$$

通过计算转移概率 T_j^+, T_j^- , 得到单个 A 策略个体在 B 策略群体中扎根的概率为:

$$\rho_A \approx \frac{1}{N} + \frac{\omega}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \prod_{j=1}^m (\pi_A - \pi_B) \quad (26)$$

如果满足:

$$\sum_{k=0}^{n-1} [N(n-k) - k - 1] a_k > \sum_{k=0}^{n-1} (N+1)(d-k) b_k - (n-1) b_0 \quad (27)$$

则选择作用支持 A 策略 ($\rho_A > 1/n$)。对于充分大的 N , 式(27)变为:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k > \sum_{k=0}^{n-1} (d-k) b_k \quad (28)$$

进一步, 如果满足:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n a_k - a_{n-1}) > \sum_{k=0}^{n-1} (N b_k - b_0) \quad (29)$$

选择作用支持 A 策略取代 B 策略 ($\rho_A > \rho_B$)。对充分大的 N , 式(29)变为:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k > \sum_{k=0}^{n-1} b_k \quad (30)$$

文献[62]则把文献[61]的相应的结果推广到了环上的博弈^[62]。类似地记 P_i 为一个 A 策略个体在 i 个 A 策略个体与 $n-i$ 个 B 策略个体博弈时的收益, Q_i 为一个 B 策略个体在 i 个 B 策略个体与 $n-i$ 个 A 策略个体博弈时的收益。考虑一维空间中最简单的环状种群结构, 且假设交互图(interaction graph)和更新图(replacement graph)^[63]不一致。此时每个节点 i 与周围的个体交互 n 次, 从与左边的 $n-1$ 个个体相交, 与左边的 $n-2$ 个个体及右边的1个个体相交, 一直到与右边的 $n-1$ 个个体相交。则在生死更新规则下, 如果满足:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_i > \sum_{k=0}^{n-1} Q_i \quad (31)$$

选择作用支持 A 策略取代 B 策略 ($\rho_A > \rho_B$)。当 N 充分大时, 式(31)对任意的选择强度, 线性型和指数型两种适应度函数皆成立^[24]。而在生死更新规则下, 对指数型适应度函数, 当满足:

$$(P_1 - Q_1) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} (P_i - Q_i) + 3(P_n - Q_n) > 0 \quad (32)$$

对线性型适应度函数, 当满足:

$$(1-\omega)c_0 + \omega c_1 > 0 \quad (33)$$

选择作用支持 A 策略取代 B 策略 ($\rho_A > \rho_B$), 其中:

$$c_0 = (P_1 - Q_1) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} (P_i - Q_i) + 3(P_n - Q_n)$$

$$c_1 = \sum_{i=1}^n P_i (\sum_{i=2}^n P_i + P_n) - \sum_{i=1}^n Q_i (\sum_{i=2}^n Q_i + Q_n)$$

文献[62]还分别对线性公众利益博弈(public good game, PGG), 多人猎鹿博弈(n -person stag hunt game), 多人雪堆博弈(n -person snowdrift game)及非线性公众利益博弈的分析结果进行了验证。

文献[64]考虑了 n 人参与的重复囚徒困境模型,

把1/3法则推广到 n 人双策略的 $\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ 法则。具

体地, 总人数为 N , 且有两种策略(ALLD和TFT_a)的博弈模型, 其中 a 为策略TFT宽容度。则当TFT_a的比例 $p^* < \{2/n(n+1)\}^{1/(n-1)}$ 时, $\rho_{TFT_{n-1}} > 1/N > \rho_{ALLD}$, 此时意味着选择作用支持TFT_{n-1}取代ALLD。而当 $p^* < (1/n)^{1/(n-1)}$ 时, $\rho_{TFT_{n-1}} > \rho_{ALLD}$, 意味着选择作用支持TFT_{n-1}, 即TFT_{n-1}为风险占优策略。

3 总结与展望

有限种群特别是空间网络上的演化博弈研究, 近年来随着网络科学的兴起^[65-71]而逐渐引起广泛关注。除了对网络上的演化博弈背景中的合作机制的挖掘外, 对一般策略的演化稳定性研究具有更普适的意义, 因为合作策略的涌现, 是合作策略占优的具体体现。本文从具体的稳定条件入手, 以解析的方法来刻画策略是如何在有限种群中传播、蔓延, 最后达到稳定的。本文综述了该领域最新的一些代表性研究成果, 介绍了无结构种群中的风险占优策略, 占优策略及结构种群中的结构占优策略等演化稳定判据。

尽管在有限种群上已经得到不少关于策略演化稳定性的判据, 但是还存在许多值得深入的问题, 简要归纳成3个方面, 以为抛砖引玉。1) 对于多人/多策略的情形, 策略的稳定性研究还停留在理论探索阶段。而在实际中, 博弈模型往往是多人/多策略的,

所以在考虑多人/多策略的博弈模型上, 寻求一些有效的数学工具, 探求更好的理论结果, 将一些数值结果以更加严格的形式给出, 是十分有意义的。2) 由于网络的异质性的影响, 传统的平均场方法、对估计方法常常失效。因此如何在一般的网络结构中刻画策略的稳定性, 探究其理论结果是一个很有发展前景的研究方向。3) 如何应用演化博弈的思想来解决一些实际问题, 如路由问题^[72-73]、传染病传播问题^[74-75]、最优控制设计^[76-77]、市场经济行为规律等^[78]。对这些问题的进一步的探索无疑是十分有意义的。

总之, 演化博弈是研究竞争个体相互作用模型一个强有力的工具, 只要个体之间存在矛盾、竞争和合作, 则其微观动力学演化机制就可以用博弈模型来描述。而有限种群上的演化博弈更贴近于实际模型, 所以说随着有限种群演化博弈理论的发展, 必将会在生态演化、神经网络、群体智能、认知科学、自组织涌现行为、网络化系统及经济动力学等研究中显示出强大的作用。

参 考 文 献

- [1] SMITH J M, PRICE G R. The logic of animal conflict[J]. *Nature*, 1973, 246(2): 15-18.
- [2] SAMUELSON L. Evolution and game theory[J]. *J Econ Perspect*, 2002, 16(2): 47-66.
- [3] CROW J F, KIMURA M. An introduction to population genetics theory[M]. New York: Harper and Row, 1970.
- [4] SMITH J M. Evolution and the theory of games[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- [5] 王龙, 伏锋, 陈小杰, 等. 复杂网络上的演化博弈[J]. *智能系统学报*, 2007, 2(2): 1-10.
WANG Long, FU Feng, CHEN Xiao-jie, et al. Evolutionary games on complex networks[J]. *Transactions on Intelligent Systems*, 2007, 2(2): 1-10.
- [6] NASH J F. Equilibrium points in n-person games[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1950, 36(1): 48-49.
- [7] TAYLOR P D, JONKER L B. Evolutionary stable strategies and game dynamics[J]. *Math Biosci*, 1978, 40(1-2): 145-156.
- [8] WEIBULL J. Evolutionary game theory[M]. Cambridge: MIT Press, 1995.
- [9] HOFBAUER J, SIGMUND K. Evolutionary games and population dynamics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [10] MORAN P A P. The statistical processes of evolutionary theory[M]. Oxford: Clarendon Press, 1962.
- [11] IMHOF L A, NOWAK M A. Evolutionary game dynamics in a wright fisher process[J]. *J Math Biol*, 2006, 52(5): 667-681.
- [12] TRAUlsen A, NOWAK M A, Pacheco J M. Stochastic dynamics of invasion and fixation[J]. *Phys Rev E*, 2006, 74(1): 011909.
- [13] DURRETT R, LEVIN S A. The importance of being discrete (and spatial)[J]. *Theor Pop Biol*, 1994(46): 363-394.
- [14] NOWAK M A. Evolutionary dynamics: exploring the equations of life[M]. Cambridge: Harvard University Press, 2006.
- [15] NOWAK M A, SASAKI A, TAYLOR C, et al. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations[J]. *Nature*, 2004, 428(8): 646-650.
- [16] TAYLOR C, FUDENBERG D, SASAKI A. Evolutionary game dynamics in finite populations[J]. *Bull Math Bio*, 2004, 66(6): 1621-1644.
- [17] ANTAL T, SCHEURING I. Fixation of strategies for an evolutionary game in finite populations[J]. *Bull Math Bio*, 2006, 68(8): 1522-1906.
- [18] KARLIN S, TAYLOR H M. A first course in stochastic process[M]. 2nd ed. London: Academic Press, 1975.
- [19] EWENS W J. Mathematical population genetics[M]. 2nd ed. New York: Springer, 2004.
- [20] HARSANYI J C, SELTEN R. A general theory of equilibrium selection in games[M]. Cambridge: MIT Press, 1988.
- [21] SZABO G, TÖKE C. Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice[J]. *Phys Rev E*, 1998, 58(1): 69.
- [22] TRAUlsen A, PACHECO J M, NOWAK M A. Pairwise comparison and selection temperature in evolutionary game dynamics[J]. *J Theor Biol*, 2007, 246(3): 522-529.
- [23] IMHOF L A, NOWAK M A. Evolutionary game dynamics in a wright-fisher process[J]. *J Math Biol*, 2006, 52(5): 667-681.
- [24] WU B, ALTROCK P M, WANG L, et al. Universality of weak selection[J]. *Phys Rev E*, 2010, 82(4): 046106.
- [25] LESSARD S, LADRET V. The probability of fixation of a single mutant in an exchangeable selection model[J]. *J Math Biol*, 2007, 54(5): 721-744.
- [26] WOELFING B, TRAUlsen A. Stochastic sampling of interaction partners versus deterministic payoff assignment[J]. *J Theor Biol*, 2009, 257(4): 689-695.
- [27] IMMANUEL B, CHRISTINA P. One-third rules with equality: second-order evolutionary stability conditions in finite populations[J]. *J Theor Biol*, 2008, 254(3): 616-620.
- [28] TRAUlsen A, PACHECO J M, IMHOF L A. Stochasticity and evolutionary stability[J]. *Phys Rev E*, 2006, 74(2): 021905.
- [29] OHTSUKI H, BORDALO P, NOWAK M A. The one-third law of evolutionary dynamics[J]. *J Theor Biol*, 2007, 249(2): 289-295.
- [30] SELLA G, HIRSH A E. The application of statistical physics to evolutionary biology[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2005, 102(27): 9541-9546.
- [31] FUDENBERG D, IMHOF L A. Imitation processes with small mutations[J]. *J Econ Theory*, 2006, 131(1): 251-262.
- [32] IMHOF L A, FUDENBERG D, Nowak M A. Evolutionary cycles of cooperation and defection[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2005, 102(31): 10797-10800.
- [33] FUDENBERG D, NOWAK M A, TAYLOR C, et al. Evolutionary game dynamics in finite populations with strong selection and weak mutation[J]. *Theor Popu Bio*, 2006, 70(3): 352-363.
- [34] WANG J, WU B, CHEN X, et al. Evolutionary dynamics of public goods games with diverse contributions in finite populations[J]. *Phys Rev E*, 2010, 81(5): 056103.
- [35] WU B, CHAITANYA S G, WANG L, et al. How small are small mutation rates[J]. *J Math Biol*, 2012, 64(5): 803-827.
- [36] KINGMAN J F C. On the genealogy of large populations[J]. *J Appl Prob*, 1982(19): 27-43.
- [37] KINGMAN J F C. The coalescent[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 1982, 13(3): 235-248.
- [38] WAKELEY J. Coalescent theory: an introduction[M].

- Englewood: Roberts and Company Publishers, 2008.
- [39] ANTAL T, NOWAK M A, TRAUlsen A. Strategy abundance in 2×2 games for arbitrary mutation rates[J]. *J Theor Biol*, 2009, 257(2): 340-344.
- [40] ANTAL T, TRAUlsen A, OHTSUKI H, et al. Mutation-selection equilibrium in games with multiple strategies[J]. *J Theor Biol*, 2009, 258(4): 614-622.
- [41] TRAUlsen A, HAUERT C. Coevolutionary dynamics: from finite to infinite populations[J]. *Phys Rev Letter*, 2005(95): 238701.
- [42] TRAUlsen A, HAUERT C. Coevolutionary dynamics in large, but finite populations[J]. *Phys Rev E*, 2006, 74(1): 011901.
- [43] TRAUlsen A, CLAUSSEN J C, HAUERT C. Stochastic differential equations for evolutionary dynamics with demographic noise and mutations[J]. *Phys Rev E*, 2012, 85(4): 041901.
- [44] TARNITA C E, OHTSUKI H, ANTAL T, et al. Strategy selection in structured populations[J]. *J Theor Biol*, 2009, 259(3): 570-581.
- [45] ANTAL T, OHTSUKI H, WAKELEY J, et al. Evolution of cooperation by phenotypic similarity[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2009, 106(21): 8597-8600.
- [46] TARNITA C E, ANTAL T, OHTSUKI H, et al. Evolutionary dynamics in set structured populations[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2009, 106(21): 8601-8604.
- [47] NOWAK M A, TARNITA C E, ANTAL T. Evolutionary dynamics in structured populations[J]. *Phil Trans R Soc B*, 2010, 365(1537): 19-30.
- [48] OHTSUKI H, HAUERT C, LIEBERMAN E, et al. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks[J]. *Nature*, 2006(441): 502-505.
- [49] NATHANSON C G, TARNITA C E, NOWAK M A. Calculating evolutionary dynamics in structured populations[J]. *PLoS Comput Biol*, 2009, 5(12): e1000615.
- [50] TARNITA C E, WAGE N, NOWAK M A. Multiple strategies in structured populations[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2011, 108(6): 2334-2337.
- [51] TANG C B, LI X, CAO L, et al. The σ law of evolutionary dynamics in community-structured population [J]. *J Theor Biol*, 2012, 306(7): 1-6.
- [52] TAYLOR C, NOWAK M A. Evolutionary game dynamics with non-uniform interaction rates[J]. *Theor Popul Biol*, 2006, 69(3): 243-252.
- [53] OHTSUKI H, NOWAK M A. The replicator equation on graphs[J]. *J Theor Biol*, 2006, 243(1): 86-97.
- [54] OHTSUKI H, NOWAK M A. Evolutionary stability on graphs[J]. *J Theor Biol*, 2008, 251(4): 698-707.
- [55] GORDON H S. The economic theory of a common-property resource: the fishery[J]. *J Polit Econ*, 1954, 62(2): 124-142.
- [56] HARDIN G. The tragedy of the commons[J]. *Science*, 1968(162): 1243-1248.
- [57] HAUERT C, SCHUSTER H G. Effects of increasing the number of players and memory size in the iterated prisoner's dilemma: a numerical approach[J]. *Proc R Soc Lond B Biol Sci*, 1997, 264(1381): 513-519.
- [58] KOLLOCK P. Social dilemmas: the anatomy of cooperation[J]. *Annu Rev Sociol*, 1998(24): 183-214.
- [59] ROCKENBACH B, MILINSKI M. The efficient interaction of indirect reciprocity and costly punishment[J]. *Nature*, 2006(444): 718-723.
- [60] MILINSKI M, SOMMERFELD R D, KRAMBECK H J, et al. The collective risk social dilemma and the prevention of simulated dangerous climate change[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2008, 105(7): 2291-2294.
- [61] GOKHALE C S, TRAUlsen A. Evolutionary games in the multiverse[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2010, 107(12): 5500-5504.
- [62] VEELLEN M A, NOWAK M A. Multi-player games on the cycle[J]. *J Theor Biol*, 2012(292): 116-128.
- [63] OHTSUKI H, PACHECO, J A, NOWAK, M A. Evolutionary graph theory: breaking the symmetry between interaction and replacement[J]. *J Theor Biol*, 2007, 246(4): 681-694.
- [64] KUROKAWA S, IHARA Y. Emergence of cooperation in public goods games[J]. *Proc R Soc B*, 2009, 276(1660): 1379-1384.
- [65] BARABASI AL. Taming complexity[J]. *Nature Physics*, 2005(1): 68-70.
- [66] ANDERSON P, ARROW K J, PINES D. The economy as an evolving complex system[M]. New York: Addison-Wesley, 1988.
- [67] AXELORD R M. The complexity of cooperation: agent-based models of competition and collaboration[M]. New Jersey: Princeton Univ Press, 1997.
- [68] WALDROP M M. Complexity: the emerging science at the edge of order and chaos[M]. New York: Youchstone Books, 1993.
- [69] HOLLAND J H. Hidden order: how adaptation builds Complexity[M]. New York: Addison-Wesley, 1996.
- [70] KAUFFMAN S. At home in the universe: the search for laws of self-organization and complexity[M]. Oxford, UK: Oxford Univ Press, 1996.
- [71] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 网络科学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
WANG Xiao-fan, LI Xiang, CHEN Guan-rong. Network science: an introduction[M]. Beijing: Higher Education Press, 2012.
- [72] TEMBINE H, ALTMAN E, EL-AZOUZI R, et al. Evolutionary games in wireless networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, 2010, 40(3): 634-646.
- [73] WANG W J, CHATTERJEE M, KWIAT K. Cooperation in wireless networks with unreliable channels[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2011, 59(10): 2808-2817.
- [74] FU F, ROSENBLUM D I, WANG L, et al. Imitation dynamics of vaccination behavior on social networks[J]. *Proc R Soc B*, 2011, 278(1702): 42-49.
- [75] WU B, FU F, WANG L. Imperfect vaccine aggravates the long-standing dilemma of voluntary vaccination[J]. *PLoS ONE*, 2011, 6(6): e20577.
- [76] VINCENT T L, VINCENT T L S. Evolution and control system design[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2000, 20(5): 20-35.
- [77] YANG Y, LI X. Towards a snowdrift game optimization to vertex cover of networks[J/OL]. *IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS MAN AND CYBERNETICS PART B: CYBERNETICS*, 2012, 99: 1-9 [2012-08-27]. [http://ieeexp.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?reload=true & arnumber=6334484](http://ieeexp.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?reload=true&arnumber=6334484).
- [78] WANG W, CHEN Y, HUANG J P. Heterogeneous preferences, decision-making capacity, and phase transitions in a complex adaptive system[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2009, 106(21): 8423-8428.