

# 基于实验的PCB板动态性能等效建模方法

刘孝保<sup>1,2</sup>, 杜平安<sup>2</sup>

(1. 昆明理工大学机电工程学院 昆明 650500; 2. 电子科技大学机械电子学院 成都 611731)

**【摘要】** PCB板因内部结构复杂而有限元建模困难或无法进行建模, 为此提出了基于实验数据的PCB板动态性能等效建模方法。该方法利用原PCB板的外观主尺寸构建等效几何模型, 利用质量相等原则获得等效密度, 并通过有限元理论和振动理论推导了等效模型的等效刚度求解公式。在此基础上, 分析了约束方式对等效刚度的影响。等效实例分析结果证明该等效方法是切实可行的。

**关键词** 等效刚度; 等效结构; 实验数据; 频率; PCB板

中图分类号 V241.03

文献标志码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2013.05.028

## Equivalent Modeling Method of PCB for Dynamic Property Based on Experimental Data

LIU Xiao-bao<sup>1,2</sup> and DU Ping-an<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical & Electrical Engineering, Kunming University of Science & Technology Kunming 650500;

2. School of Mechatronics Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

**Abstract** Finite-element modeling of printed circuit board (PCB) often very difficult due to the complexity of its structure, so an equivalent modeling method of PCB based on experimental data for dynamic property analysis is presented. In the method, the equivalent dimension is obtained from main dimension of real PCB structure, the equivalent density is calculated by the principle of mass equality, and the equivalent stiffness formula is derived based on the theory of vibration and finite element method. Additionally, the influences of joint constrain on equivalent stiffness are studied. In the end, an example shows this method is a good way and available in engineering projects.

**Key words** equivalent stiffness; equivalent structure; experimental data; frequency; printed circuit board

由于电子元器件结构形式和构成材料复杂多样, 因此 PCB 板组件很难或者无法进行精确地有限元建模<sup>[1]</sup>。为此, 常利用等效 PCB 板模型替代实际模型, 并参与结构的整体分析<sup>[2-3]</sup>。

目前, 等效建模方法主要包括经验方法和基于静力凝聚等效建模方法<sup>[3]</sup>。前者仅利用经验建立等效模型, 因而对经验的依赖程度较大; 而后的实现过程复杂, 对于无法有限元建模的 PCB 板将束手无策。

为此, 本文提出了基于实验数据的PCB板动态性能等效建模方法, 利用原PCB的外观主尺寸构建等效模型的几何模型, 利用质量相等原则获得等效密度, 并利用有限元理论和振动理论推导了基于实验数据的等效刚度计算公式。同时, 分析了支撑方式对等效刚度的影响。最后利用实例分析验证了该方法的可行性和有效性。

## 1 PCB板动态性能等效模型

### 1.1 等效建模的基本思路

如图1所示的复杂PCB板结构, 采用图2所示的均匀等效模型代替, 并参与电子设备整体结构的动态性能分析。



图1 复杂PCB板



图2 等效PCB板

工程中主要关注低频, 特别是一阶频率<sup>[4]</sup>, 因此, PCB板结构动态特性等效主要是结构的模态频率等效, 即等效后的结构模态频率和原结构的模态频率相等, 动态性能等效的数学模型可表示为:

$$f(V_{\text{equi}}, E_{\text{equi}}, \rho_{\text{equi}}, \nu_{\text{equi}}) \approx f_{\text{real}} \quad (1)$$

式中,  $f$ 表示模态频率;  $V$ 表示模型的几何结构;  $E$ 表示材料杨氏模量;  $\rho$ 表示材料密度;  $\nu$ 表示泊松比; 下标 $\text{equi}$ 和 $\text{real}$ 分别表示等效模型和实际模型, 实际模型用实验模型(即下标 $\text{expe}$ )表示<sup>[5-6]</sup>。

为了接近实际, 等效模型采用与原PCB板模型相同的几何主尺寸。为了减少等效模型质量对整体分析的影响, 通过质量相等原则获得等效材料密度。等效模型材料泊松比采用与PCB板基板材料相同。因此, 等效数学模型可简化为:

$$\begin{cases} f(V_{\text{equi}}, E_{\text{equi}}, \rho_{\text{equi}}, \nu_{\text{equi}}) = f_{\text{expe}} \\ V = V_0 \\ \rho = \rho_0 \\ \nu = \nu_0 \end{cases} \quad (2)$$

式中, 下标0表示实际PCB板。

## 1.2 等效刚度的理论推导

由振动理论可知<sup>[7-8]</sup>, 图2所示的等效模型振动特征方程可表示为:

$$|\mathbf{K}_{\text{equi}} - (\omega)_{\text{equi}}^2 \mathbf{M}_{\text{equi}}| = 0 \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{K}_{\text{equi}}$ 为等效模型的刚度矩阵;  $\mathbf{M}_{\text{equi}}$ 为等效模型的质量矩阵;  $\omega$ 为振动圆频率。与固有频率 $f$ 的关系为:

$$\omega = 2\pi f \quad (4)$$

求解式(3), 可获得等效模型的模态方程<sup>[9]</sup>为:

$$(\mathbf{K}_{\text{equi}} - (\omega_j)_{\text{equi}}^2 \mathbf{M}_{\text{equi}})(\mathbf{u}_j)_{\text{equi}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

式中,  $(\omega_j)_{\text{equi}}$ 表示等效模型的第 $j$ 阶模态圆频率;  $(\mathbf{u}_j)_{\text{equi}}$ 为第 $j$ 阶模态频率对应的特征向量, 即振型。

将式(5)两边都左乘 $(\mathbf{u}_j)_{\text{equi}}^T$ , 可得:

$$\mathbf{K}_{\text{equi}}(\mathbf{u}_j)_{\text{equi}} = (\omega_j)_{\text{equi}}^2 (\mathbf{u}_j)_{\text{equi}}^T \mathbf{M}_{\text{equi}}(\mathbf{u}_j)_{\text{equi}} \quad (6)$$

本文引入单位等效模型的概念, 即当 $E=1$ 、 $\rho=1$ 、 $\nu=\nu_0$ 时的PCB板等效模型。相应地, 单位等效模型的模态方程可表示为:

$$(\mathbf{K}_{\text{unit}} - (\omega_j)_{\text{unit}}^2 \mathbf{M}_{\text{unit}})(\mathbf{u}_j)_{\text{unit}} = \mathbf{0} \quad (7)$$

式中, 用下标 $\text{unit}$ 表示单位等效模型;  $\mathbf{K}_{\text{unit}}$ 为单位等效模型刚度矩阵;  $\mathbf{M}_{\text{unit}}$ 为单位等效模型的质量矩阵;  $(\omega_j)_{\text{unit}}$ 为单位等效模型的第 $j$ 阶振动圆频率;  $(\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}$ 为单位等效模型的第 $j$ 阶模态振型。

根据有限元理论<sup>[10]</sup>, 对均匀材料模型, 等效模型刚度矩阵和单位等效模型刚度矩阵成正比, 即有:

$$\mathbf{K}_{\text{equi}} = (E_j)_{\text{equi}} \mathbf{K}_{\text{unit}} \quad (8)$$

式中,  $(E_j)_{\text{equi}}$ 表示第 $j$ 阶等效刚度。由于工程中最关注第一阶的模态频率, 因此在大多数情况下, 取一

阶模态等效刚度即可满足工程需要。

同样, 根据有限元理论, 等效模型的质量矩阵和单位等效模型的质量矩阵成正比关系, 即有:

$$\mathbf{M}_{\text{equi}} = \rho_0 \mathbf{M}_{\text{unit}} \quad (9)$$

将式(8)、式(9)代入式(6), 则等效模型的模态方程可表示为:

$$\begin{aligned} (E_j)_{\text{equi}} (\mathbf{u}_j)_{\text{equi}}^T \mathbf{K}_{\text{unit}} (\mathbf{u}_j)_{\text{equi}} = \\ (\omega_j)_{\text{equi}}^2 \rho_0 (\mathbf{u}_j)_{\text{equi}}^T \mathbf{M}_{\text{unit}} (\mathbf{u}_j)_{\text{equi}} \end{aligned} \quad (10)$$

根据振动理论<sup>[7]</sup>, 等效模型的振型 $(\mathbf{u}_j)_{\text{equi}}^T$ 和单位等效模型的振型 $(\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}^T$ 相同, 式(10)可表示为:

$$\begin{aligned} E_{\text{equi}} (\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}^T \mathbf{K}_{\text{unit}} (\mathbf{u}_j)_{\text{unit}} = \\ (\omega_j)_{\text{unit}}^2 \rho_0 (\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}^T \mathbf{M}_{\text{unit}} (\mathbf{u}_j)_{\text{unit}} \end{aligned} \quad (11)$$

对于等效模型, 其模态频率与实验模态频率相同, 因此等效刚度 $(E_j)_{\text{equi}}$ 可进一步表示为:

$$(E_j)_{\text{equi}} = 4\rho_0 \pi^2 (f_j)_{\text{expe}}^2 \frac{(\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}^T \mathbf{M}_{\text{unit}} (\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}}{(\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}^T \mathbf{K}_{\text{unit}} (\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}} \quad (12)$$

对于进行归一化的等效单位模型, 式(12)可以简化为:

$$(E_j)_{\text{equi}} = \frac{4\rho_0 \pi^2 (f_j)_{\text{expe}}^2}{(\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}^T \mathbf{K}_{\text{unit}} (\mathbf{u}_j)_{\text{unit}}} \quad (13)$$

## 1.3 多阶频率等效刚度的计算推导

式(13)为等效PCB板单阶频率等效刚度计算式。在工程中可能不仅关注某一阶频率, 还要同时关注某几个低阶频率。为此, 可使等效模型的某几阶等效频率相对误差的平方和最小, 即有:

$$y = \sum_{j=1}^n \left( \frac{(f_j)_{\text{real}} - (f_j)_{\text{equi}}}{(f_j)_{\text{real}}} \right)^2 \quad (14)$$

为使式(14)最小, 需满足:

$$\sum_{j=1}^n \frac{2}{(f_j)_{\text{real}}} \left( 1 - \frac{(f_j)_{\text{equi}}}{(f_j)_{\text{real}}} \right) \frac{\partial((f_j)_{\text{equi}})}{\partial(E_j)_{\text{equi}}} = 0 \quad (15)$$

利用式(15)便可求解多阶频率等效的等效刚度。

## 2 约束方式等效刚度的影响

### 2.1 约束点位置对等效刚度的影响

假设原结构如图3a所示, 将其等效为图3b所示结构。板尺寸为 $0.03 \text{ m} \times 0.02 \text{ m} \times 0.001 \text{ m}$ , 材料杨氏模量 $10 \text{ GPa}$ , 泊松比 $0.3$ , 密度 $1800 \text{ kg/m}^3$ 。PCB板主尺寸为 $0.004 \text{ m} \times 0.004 \text{ m} \times 0.003 \text{ m}$ , 元器件位于板中央, 板的长边边缘有4个对称支撑点, 支撑板结构约束点的 $y$ 坐标不变, 约束点的 $x$ 坐标可变。

采用基频等效时, 其约束点 $x$ 坐标位置与等效频

率误差 $\delta$ 的关系如图4所示。

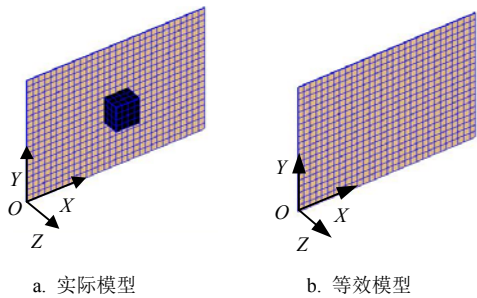


图3 实际PCB板模型与等效模型

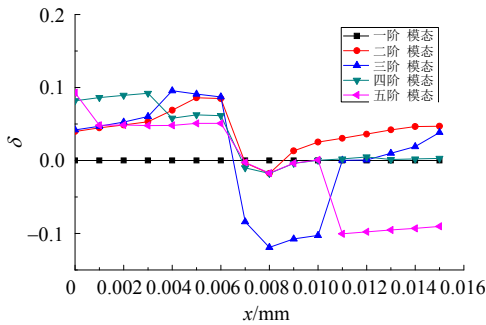


图4 约束x坐标位置与频率相对误差 $\delta$ 关系图

由图4可得: 1) 采用基频等效时, 基频误差接近零, 说明该方法的精度高; 2) 当 $x$ 位于0.07附近即等效模型和原模型的刚度分布接近时, 各阶的等效误差最小。

2.2 约束面对等效刚度的影响

结构的约束情况同样也会影响结构等效效果。假设原结构和等效结构如图3所示。板尺寸为 $0.02\text{ m} \times 0.01\text{ m} \times 0.006\text{ m}$ , 材料杨氏模量 $10\text{ GPa}$ , 泊松比 $0.3$ , 密度 $1\ 800\text{ kg/m}^3$ 。分别采用图5所示的3种约束模型, 等效频率相对误差如表1所示。

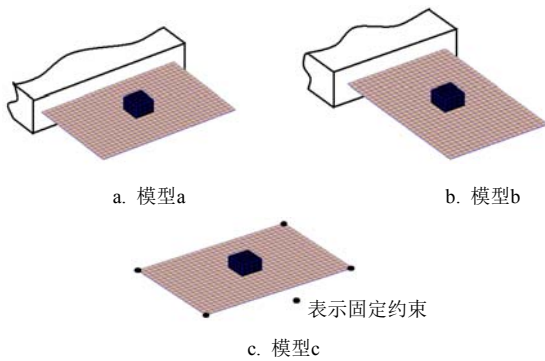


图5 约束模型

表1 各约束方案频率误差结果

模态阶数	相对误差		
	模型a	模型b	模型c
一阶频率	0	$1.171 \times 10^{-6}$	0
二阶频率	0.057 771	0.058 282	0.039 628
三阶频率	-0.011 01	0.000 966	0.041 946
四阶频率	0.010 739	-0.016 4	0.081 953
五阶频率	-0.007 56	0.016 985	0.092 849

由表1可知, 由于 $XOY$ 面约束时等效结构和原结构的刚度分布接近, 因此其等效相对误差最小。

2.3 等效阶数对等效刚度的影响

图3所示的模型当考虑阶数为前 $N$ 阶时, 频率相对误差如表2所示。

表2 考虑不同阶数的频率误差

模态阶数	相对误差				
	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
一阶	0	0.019 8	0.027 5	0.041 7	0.052 8
二阶	-0.039 6	-0.020 6	-0.013 2	0.000 4	0.011 0
三阶	-0.041 9	-0.023 0	-0.015 6	-0.002 0	0.008 6
四阶	-0.082 0	-0.063 8	-0.056 7	-0.043 7	-0.033 5
五阶	-0.092 8	-0.074 9	-0.067 9	-0.055 0	-0.045 0

由表2可知, 考虑等效频率的阶数越多, 各阶频率的相对误差越小。

3 等效数值算例

由于如图6所示服务器机箱中的PCB板组件(如图7所示)比较复杂, 有限元建模困难, 为此将其进行动态性能等效建模, 并参与整体机箱分析。

对于图7中的PCB板组件, 等效为采用如图8所示的等效模型。通过约束模态实验分析以及等效模型参数计算, 获得PCB板的前五阶模态频率以及等效模型频率, 如表3所示。经计算, 等效模型的泊松比 $0.28$ , 等效杨氏模量为 $34.479\ 5\text{ GPa}$ , 等效密度为 $6\ 572.80\text{ kg/m}^3$ 。



图6 服务器示意图



图7 复杂PCB板

表3 实验分析和等效分析结果

阶数	实验频率/Hz	等效模型频率/Hz	相对误差/(%)
一阶频率	79.9	79.698	-0.003
二阶频率	110.7	108.515	-0.020
三阶频率	145.5	115.264	-0.208
四阶频率	151.3	117.646	-0.222
五阶频率	160.2	146.998	-0.082

用等效模型替代原PCB板组件模型进行服务器整机建模分析, 整机模型如图9所示。

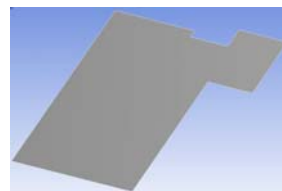


图8 PCB板等效模型

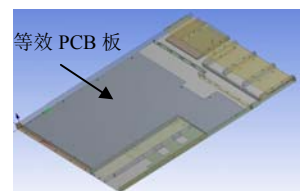


图9 采用等效PCB板的整机

去掉刚体模态后,机箱的各阶频率及误差如表4所示。

表4 采用等效PCB板的机箱频率及其误差

阶数	实验频率/Hz	等效模型频率/Hz	相对误差/(%)
一阶频率	22	22.532	0.024
二阶频率	38.1	39.531	0.038
三阶频率	42.2	45.726	0.084
四阶频率	48.6	49.813	0.025
五阶频率	51.9	52.806	0.017

由表4可看出,由于等效模型的使用,使原模型的复杂程度大为简化,并且等效前后的频率相对误差都小于5%,能满足工程精度需要。

## 4 结 论

针对动态性能有限元建模困难的PCB板,本文提出了基于实验数据的PCB板等效建模方法。该方法采用原来PCB板结构的几何主尺寸建立等效几何模型,利用质量相等原则获得等效密度,并利用有限元理论和振动理论,推导出基于实验数据的等效刚度的计算公式。并在此基础上分析了约束方式对等效刚度及频率误差的影响。利用某机箱的PCB板组件进行了等效验证分析,结果表明该等效方法能满足工程需要。

### 参 考 文 献

- [1] AMYA R A, AGLIETTIA G S, RICHARDSONB G. Sensitivity analysis of simplified printed circuit board finite element models[J]. *Microelectronics Reliability*, 2009, 49(7): 791-799.
- [2] 黄志奇, 王厚军, 陈东义. 可穿戴计算机主板振动优化模型研究[J]. *电子测量与仪器学报*, 2009, 23(10): 31-36. HUANG Zhi-qi, WANG Hou-jun, CHEN Dong-yi. The study on the vibration optimization model of the wearable computer mother board[J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2009, 23(10): 31-36.
- [3] 杜平安, 刘建涛. 电子器件振动特性有限元模型参数的等效计算方法[J]. *电子学报*, 2010, 38(8): 1867-1873. DU Ping-an, LIU Jian-tao. Equivalent computational methods of finite element model's parameters for vibration analysis of electronic module[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(8): 1867-1873.
- [4] 刘孝保, 杜平安. 基于子结构方法的PCB板支撑布局优化[J]. *电子科技大学学报*, 2011, 40(5): 796-799. LIU Xiao-bao, DU Ping-an. Support position layout optimization method of PCB based on substructure method[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2011, 40(5): 796-799.
- [5] 李彦梅, 徐英, 张立伟, 等. 上游单弯头对内锥流量计性能影响的仿真与实验研究[J]. *仪器仪表学报*, 2009, 30(12): 2629-2634. LI Yan-mei, XU Ying, ZHANG Li-wei, et al. Experimental research on the impact of upstream and downstream gate valves on the performance characteristics of a V-cone flow meter[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2009, 30(12): 2629-2634.
- [6] 杨平, 陈子夏, 谭广斌. PBGA组件的动态特性仿真与实验研究[J]. *振动与冲击*, 2009, 28(3): 168-170, 207. YANG Ping, CHEN Zhi-xia, TAN Guang-bing. Free vibration analysis of a box orthotropic rectangular plate structure[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(3): 168-170, 207.
- [7] 张义民. 机械振动[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007. ZHANG Yi-min. *Mechanical vibration*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007.
- [8] XIE Y M, STEVENF G P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems[J]. *Computers & Structures*, 1996, 58(6): 1067-1073.
- [9] ZHU J H, ZHANG W H. Maximization of structural natural frequency with optimal support layout[J]. *Struct Multidisc Optim*, 2006(31): 462-469.
- [10] GANGADHARA P B. Finite element transient dynamic analysis of laminated stiffened shells[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 248(2): 456-468.

编辑 黄 莘