

区间参数分数阶时滞系统鲁棒稳定域

梁涛年¹, 陈建军², 赵斌¹, 王蕊照¹

(1. 西北机电工程研究所 陕西 咸阳 712099; 2. 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

【摘要】对区间参数分数阶时滞系统, 提出了对分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器求其鲁棒稳定域的方法。利用边界理论将区间参数分数阶时滞系统分解为若干顶点子系统, 求出各顶点子系统特征多项式和与之相对应凸多面体棱边的集合。应用D分解方法分别求出使各子系统获得最大稳定域时的 $PI^{\lambda}D$ 和 PID^{μ} 控制器的参数 λ 和 μ , 从而获得了分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的参数。由该分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器计算各个子系统的稳定域, 各子系统稳定域的交集即为原区间参数时滞系统的稳定域; 并证明了该域为区间参数分数阶时滞系统的鲁棒稳定域。通过实例的验证表明, 该算法是可行有效的。

关键词 边界理论; 分数阶时滞系统; 区间参数; $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器; 鲁棒稳定域

中图分类号 TP391.9

文献标志码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2013.06.026

Robust Stability Region of Fractional Order Interval Plant with Time Delay

LIANG Tao-nian¹, CHEN Jian-jun², ZHAO Bin¹, and WANG Rui-zhao¹

(1. Northwest Institute of Mechanical & Electromechanical Engineering Xianyang Shanxi 712099;

2. School of Electromechanical Engineering, Xidian University Xi'an 710071)

Abstract The paper presents a method to compute the robust stability region of fractional order interval plant with time delay by using fractional order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller. The edge theorem is adopted to decompose interval plant to several vertices sub-plants. The characteristic polynomials of vertices sub-plants and the value set of exposed edge for polytope are given. The D-decomposition technique is applied to solve the stability region of each vertices sub-plant. The values of λ and μ of $PI^{\lambda}D$ and PID^{μ} controllers are obtained in the biggest stability region of all sub-plants. The fraction order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller is constructed by the values of λ and μ . The stability region of each sub-plant is plotted by using fractional order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller. Furthermore, the overlap of stability region of each sub-plant is the stability region of fractional order interval plant with time delay. The paper also proves that the overlap of stability region is the robust stability region of fraction order interval plant.

Key words edge theorem; fractional order time delay plant; interval parameter; $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller; robust stability region

由于模型误差、制造公差及工作环境等因素的影响, 控制对象的参数呈现出区间性。当控制系统的参数在区间内变化时, 则系统的稳定性通常需分析特征多项式是否稳定, 这对于分析和设计控制系统都显得十分重要。近年来, 越来越多的研究关注于控制对象或控制器是分数阶的系统, 这是由于许多控制系统或真实的物理对象更适合于用任意阶的微分或积分方程来描述。为了提高PID控制系统的性能, 文献[1]提出了广义分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器。对于分数阶控制系统的稳定性, 文献[2]采用Mikhailov稳定性条件和改善的Mikhailov稳定性条件, 分析了分数阶时滞系统的稳定性。文献[3]利用广义Gronwall

不等式, 对有限时间分数阶时滞系统推导出了新的稳定性条件。文献[4]采用一阶控制器计算了分数阶被控对象的所有稳定性区域。文献[5-6]对分数阶被控对象采用 PI^{λ} 和 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 分数阶控制器计算其稳定域, 并分析了阶次 λ 和 μ 对稳定域的影响。最近, 区间参数分数阶控制系统的稳定性引起了学者的关注。文献[7]对被控对象的参数和阶次具有区间性的分数阶控制系统, 依据Kharitonov理论分解为几个子系统, 再采用极点配置的方法分析系统的稳定性。文献[8]采用Lyapunov不等式对区间参数分数阶系统的鲁棒稳定性检测提出了解析方法。文献[9-10]对区间参数分数阶控制系统给出了鲁棒稳定性测试过程

收稿日期: 2012-04-10; 修回日期: 2013-07-25

基金项目: 国家863项目(2006AA04Z402)

作者简介: 梁涛年(1977-), 男, 博士, 主要从事分数阶控制系统方面的研究。

和稳定的充分必要条件。文献[11]对区间参数系统的鲁棒可控性进行了研究。文献[12]针对区间参数分数阶系统, 利用边界理论^[13]将分数阶系统分解为若干个顶点特征多项式, 然后采用零排除原理(zero exclusion principle)和值集概念(value set concept), 对区间参数分数阶特征多项式的稳定性进行了分析, 并给出了鲁棒稳定性的判据。从上述文献可见, 对于区间参数整数阶时滞系统求取稳定域大都集中于经典的PID控制器, 而对区间参数分数阶时滞系统稳定域的测试方法及鲁棒性研究尚为鲜见。

本文针对区间参数分数阶时滞系统, 采用分数阶PI^λD^μ控制器对鲁棒稳定域进行分析, 首先利用边界理论^[13]将区间参数分数阶时滞系统分解成若干个顶点子系统, 给出各顶点子系统的特征多项式, 并构建它们多面体的棱边, 再利用D分解方法计算各顶点子系统在最大稳定域情况下分数阶PI^λD和PID^μ控制器的参数λ和μ, 最后通过综合方法获得分数阶PI^λD^μ控制器的控制参数。采用得到的分数阶PI^λD^μ控制器计算各子系统的稳定域, 各子系统稳定域的交集即为区间参数时滞系统的稳定域, 并采用零排除原理和值集概念, 证明了所得稳定域能够对区间参数分数阶时滞系统具有鲁棒稳定性。文中通过实例验证了该算法的可行和有效性。

1 区间参数分数阶时滞系统及分数阶PI^λD^μ控制器

在工业控制过程中, 区间参数分数阶时滞系统如图1所示。其中r(t)为系统输入信号, e(t)为误差信号, u(t)为控制信号, y(t)为系统输出信号, G(s)为区间参数分数阶时滞被控对象, 则有:

$$G(s) = \frac{b_n s^{\beta_n} + b_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} e^{-Ls} = \left(\frac{\sum_{r=0}^n b_r s^{\beta_r}}{\sum_{r=0}^n a_r s^{\alpha_r}} \right) e^{-Ls} \quad (1)$$

式中, L ∈ [L̄, L̄] 为系统时滞常数, 且 L > 0; a_r ∈ [a_r, a_r], b_r ∈ [b_r, b_r], r = 0, 1, ..., n, 同时 a_r、b_r、β_n > ... > β₁ > β₀ ≥ 0 和 α_n > ... > α₁ > α₀ ≥ 0 且为任意实数。

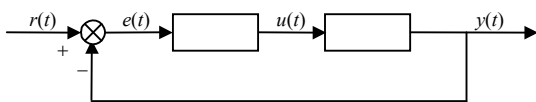


图1 时滞分数阶闭环控制系统

C(s)为分数阶PI^λD^μ控制器的传递函数, 具有以下形式的传递函数:

$$C(s) = k_p + (k_i / s^\lambda) + k_d s^\mu \quad 0 < \lambda, \mu < 2 \quad (2)$$

2 区间参数时滞系统鲁棒稳定域算法

对于图1所示的单位负反馈时滞系统, 本文的目的是采用PI^λD^μ控制器求区间参数分数阶时滞系统的稳定域, 并在PI^λD^μ控制器的参数平面上进行分析, 进而采用值集概念和零排除原理检测稳定域的鲁棒性。设时滞系统的闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = (C(s)G(s)) / (1 + C(s)G(s)) \quad (3)$$

式中的分母为单位闭环控制系统的区间参数分数阶时滞系统的特征方程式族。将式(1)、式(2)代入式(3), 则特征方程式族为:

$$P(s; \mathbf{q}) = \sum_{r=0}^n a_r s^{\alpha_r + \lambda} + \sum_{r=0}^n b_r s^{\beta_r} e^{-Ls} (k_p s^\lambda + k_i + k_d s^{\mu + \lambda}) \quad (4)$$

依据边界理论^[13]将区间参数分数阶系统分解成若干个顶点子系统。若式(1)中有2n+1个区间参数项, 则在参数空间内将有2²ⁿ⁺¹顶点子系统。为此式(1)的顶点子系统为:

$$G_1(s) = \frac{b_n s^{\beta_n} + b_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} e^{-Ls}$$

$$\vdots$$

$$G_{2^{2n+1}}(s) = \frac{\bar{b}_n s^{\beta_n} + \bar{b}_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + \bar{b}_1 s^{\beta_1} + \bar{b}_0 s^{\beta_0}}{\bar{a}_n s^{\alpha_n} + \bar{a}_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + \bar{a}_1 s^{\alpha_1} + \bar{a}_0 s^{\alpha_0}} e^{-\bar{L}s} \quad (5)$$

根据式(5), 与之对应的特征多项式族P(s; q)的所有2²ⁿ⁺¹个顶点特征方程如下:

$$P_1(s; \mathbf{q}) = s^\lambda (a_n s^{\alpha_r} + a_{n-1} s^{\alpha_{r-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}) + (k_p s^\lambda + k_i + k_d s^{\mu + \lambda}) (b_n s^{\beta_r} + b_{n-1} s^{\beta_{r-1}} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}) e^{-Ls}$$

$$\vdots$$

$$P_{2^{2n+1}}(s; \mathbf{q}) = s^\lambda (\bar{a}_n s^{\alpha_r} + \bar{a}_{n-1} s^{\alpha_{r-1}} + \dots + \bar{a}_1 s^{\alpha_1} + \bar{a}_0 s^{\alpha_0}) + (k_p s^\lambda + k_i + k_d s^{\mu + \lambda}) (\bar{b}_n s^{\beta_r} + \bar{b}_{n-1} s^{\beta_{r-1}} + \dots + \bar{b}_1 s^{\beta_1} + \bar{b}_0 s^{\beta_0}) e^{-\bar{L}s} \quad (6)$$

对2n+1个区间参数分数阶时滞系统将有(2n+1)2²ⁿ个棱边, 其特征方程族P(s; q)的所有多面体棱边的集合可定义为:

$$P_E(s, \mathbf{q}) = \{ \varepsilon(P_1(s; \mathbf{q}), P_2(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_1(s; \mathbf{q}), P_3(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_1(s; \mathbf{q}), P_5(s; \mathbf{q})), \dots, \varepsilon(P_{2^{2n}}(s; \mathbf{q}), P_{2^{2n+1}}(s; \mathbf{q})) \} \quad (7)$$

对式(1)所描述的区间参数分数阶时滞系统, 令:

$$G_i(s) \in G(s) \quad i=1,2,\dots,2^{2^{n+1}} \quad (8)$$

由式(6)得任意顶点子系统的特征方程式为:

$$P_i(s; \mathbf{q}) = \sum_{r=0}^n \hat{a}_r s^{\alpha_r + \lambda} + \sum_{r=0}^n \hat{b}_r s^{\beta_r} e^{-\hat{L}s} (k_p s^\lambda + k_l + k_d s^{\mu + \lambda}) \quad (9)$$

式中, \hat{a}_r 、 \hat{b}_r 以及 \hat{L} 分别表示任意顶点子系统 $G_i(s)$ 的参数。

由于区间参数分数阶时滞系统的稳定性依赖于 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的参数向量 \mathbf{q} , 故时滞项和分数阶次项在式(9)中的存在, 使得寻找 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的参数以判断闭环系统的鲁棒稳定性是不易的。建立特征方程式 $P_i(s; \mathbf{q})$ 的参数空间的稳定域 $S_f(C(s)G_i(s)) \in \Psi$ 对判断分数阶时滞系统的稳定性将起着重要的作用, 其中 Ψ 为 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器参数集空间的一个区域, 即:

$$\Psi = \{\mathbf{q} : k_p \in [0, \infty), k_l \in [0, \infty), k_d \in [0, \infty), \lambda \in [0, \infty), \mu \in [0, \infty)\} \quad (10)$$

本文利用D分解方法^[14]构建分数阶时滞系统的稳定域 S_f , 将控制器的参数向量 \mathbf{q} 所构成的空间 $\Psi \in R^3$ 分割成不同的稳定性区域 $D(k)$, $k=0,1,2,\dots$, 而 $D(k)$ 包含所有使顶点特征方程式(9)等于零的点。因此, 对 $D(k)$ 的边界定义如下:

$$\partial D \equiv \partial D_0 \cup \partial D_{\infty} \cup \partial D_{j\omega} \quad (11)$$

$$\partial D_0 \equiv \{\mathbf{q} \in \Psi : P_i(0; \mathbf{q}) = k_l = 0\} \quad (12a)$$

$$\partial D_{\infty} \equiv \{\mathbf{q} \in \Psi : |L| = |k_d| \neq 0\} \quad (12b)$$

$$\partial D_{j\omega} \equiv \{\mathbf{q} \in \Psi : P_i(j\omega; \mathbf{q}) = 0, \forall \omega \in (0, \infty)\} \quad (12c)$$

式中, ∂D_0 、 ∂D_{∞} 和 $\partial D_{j\omega}$ 分别是实根边界(RRB) $D(0)$ 、无限根边界(IRB) $D(\infty)$ 以及复根边界(CRB) $D(\omega)$ 的表示, 它们是一系列D分解边界的子集, 如 $\partial D(0) \subset \partial D$ 。

对于每一组控制器的参数向量 $\mathbf{q} \in S_f(C(s)G_i(s))$, 使得顶点特征方程式 $P_i(s; \mathbf{q})$ 等于零的根都有负实部, 因此, 使式(1)稳定的所有 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的参数域如下:

$$S_f(C(s)G(s)) = S_f(C(s)G_1(s)) \cap S_f(C(s)G_2(s)) \dots S_f(C(s)G_{2^{n+1}}(s)) \quad (13)$$

将D分解的稳定性边界理论应用到顶点特征多项式(9), 并通过式(12a)得到实根边界(RRB), 它可被描述为一条直线, 其方程式为:

$$P_i(0; \mathbf{q}) = \hat{b}_0 k_l = 0 \Leftrightarrow k_l = 0 \quad (14)$$

式中, 对于每一个 $G_i(s)$ 传递函数, $s^{\beta_0} = 1$ 。实根边界(RRB)是通过把 $s^{\beta_0} = 1$ 和 $s = 0$ 代入式(9), 并使式

(9)等于零获得, 其中 \hat{b}_0 为任意子系统的零次幂项的系数。

由于时滞项的存在, 使顶点特征方程式(9)有无限多个根。因此, 对于D分解的无限根(IRB)的计算不能通过解析法。但是若分数阶特征方程式的维数满足 $a_n \leq \beta_n + \mu$ 时, 无穷根(IRB)存在^[5]。此时, 无穷根边界可通过方程式表达如下:

$$k_d = \begin{cases} 0 & a_n = \beta_n \text{ or } a_n > \beta_n \text{ and } \mu > a_n - \beta_n \\ \pm \hat{a}_n / \hat{b}_n & a_n > \beta_n \text{ and } \mu = a_n - \beta_n \\ \text{none} & a_n > \beta_n \text{ and } \mu < a_n - \beta_n \end{cases} \quad (15)$$

式中, \hat{a}_n 和 \hat{b}_n 是任意顶点子系统 $G_i(s)$ 的参数。

通常情况下, 复根边界(CRB)的构建是通过把 $s = j\omega$ 代入特征方程式(9)中获得。对于 $\mathbf{q} \in \partial D_{j\omega}$, 则存在 $\omega \in (0, \infty)$, 因此通过 $P_i(j\omega; \mathbf{q}) = 0$, 可得:

$$P_i(j\omega; \mathbf{q}) = \sum_{r=0}^n [\hat{a}_r (j\omega)^{\alpha_r + \lambda}] + \sum_{r=0}^n [e^{-j\hat{L}\omega} (k_p \hat{b}_r (j\omega)^{\beta_r + \lambda} + k_l \hat{b}_r (j\omega)^{\beta_r} + k_d \hat{b}_r (j\omega)^{\beta_r + \mu + \lambda})] = 0 \quad (16)$$

对于复数 $(\sigma + j\theta)^{\delta}$ 的非整数阶次幂的计算, 可利用下式计算:

$$(\sigma + j\theta)^{\gamma} = \sqrt[\gamma]{\sigma^2 + \theta^2} \left[\cos\left(\gamma \tan^{-1} \frac{\theta}{\sigma}\right) + j \sin\left(\gamma \tan^{-1} \frac{\theta}{\sigma}\right) \right] \quad (17)$$

式中, σ 为实部; ρ 为虚部; δ 为复数的分数阶次幂。

由式(16)对 $j^{\alpha_r + \lambda}$ 、 j^{β_r} 、 $j^{\beta_r + \lambda}$ 、 $j^{\beta_r + \mu + \lambda}$ 进行计算, 可得:

$$j^{\beta_r} = \cos(\pi\beta_r/2) + j\sin(\pi\beta_r/2) = z_r + jt_r \quad (18)$$

$$j^{\alpha_r + \lambda} = \cos[\pi(\alpha_r + \lambda)/2] + j\sin[\pi(\alpha_r + \lambda)/2] = x_r + jy_r \quad (19)$$

$$j^{\beta_r + \lambda} = \cos[\pi(\beta_r + \lambda)/2] + j\sin[\pi(\beta_r + \lambda)/2] = q_r + jh_r \quad (20)$$

$$j^{\beta_r + \mu + \lambda} = \cos[\pi(\beta_r + \mu + \lambda)/2] + j\sin[\pi(\beta_r + \mu + \lambda)/2] = m_r + jk_r \quad (21)$$

则顶点特征方程式 $P_i(j\omega; \mathbf{q}) = 0$ 为:

$$\sum_{r=0}^n [\hat{a}_r \omega^{\alpha_r + \lambda} (x_r + jy_r) + e^{-j(\hat{L}\omega)} Q_r] = R \quad (22)$$

$$\{P_i(\omega; \mathbf{q})\} + jI\{P_i(\omega; \mathbf{q})\} = 0$$

其中:

$$Q_r = \hat{b}_r(k_p \omega^{\beta_r+\lambda}(z_r + j t_r) + k_l \omega^{\beta_r}(q_r + j r_r) + k_d \omega^{\beta_r+\mu+\lambda}(m_r + j l_r))$$

然后再使式(22)的实部和虚部分别等于零, 可得:

$$\begin{aligned} k_p M(\omega) + k_l N(\omega) &= k_d B(\omega) + X(\omega) \\ k_p A(\omega) + k_l H(\omega) &= k_d Z(\omega) + Y(\omega) \end{aligned} \quad (23)$$

其中:

$$M(\omega) = \hat{k} \sum_{r=0}^n [(\hat{b}_r z_r \omega^{\beta_r+\lambda} \cos(\hat{L}\omega) + \hat{b}_r t_r \omega^{\beta_r+\lambda} \sin(\hat{L}\omega))] \quad (24a)$$

$$N(\omega) = \hat{k} \sum_{r=0}^n [\hat{b}_r q_r \omega^{\beta_r} \cos(\hat{L}\omega) + \hat{b}_r h_r \omega^{\beta_r} \sin(\hat{L}\omega)] \quad (24b)$$

$$B(\omega) = -\hat{k} \sum_{r=0}^n [\hat{b}_m r \omega^{\beta_r+\mu+\lambda} \cos(\hat{L}\omega) + \hat{b}_r k_r \omega^{\beta_r+\mu+\lambda} \sin(\hat{L}\omega)] \quad (24c)$$

$$A(\omega) = \hat{k} \sum_{r=0}^n [\hat{b}_r t_r \omega^{\beta_r+\lambda} \cos(\hat{L}\omega) - \hat{b}_r z_r \omega^{\beta_r+\lambda} \sin(\hat{L}\omega)] \quad (24d)$$

$$H(\omega) = \hat{k} \sum_{r=0}^n [\hat{b}_r h_r \omega^{\beta_r} \cos(\hat{L}\omega) - \hat{b}_r q_r \omega^{\beta_r} \sin(\hat{L}\omega)] \quad (24e)$$

$$Z(\omega) = \hat{k} \sum_{r=0}^n [\hat{b}_r m_r \omega^{\beta_r+\mu+\lambda} \sin(\hat{L}\omega) - \hat{b}_r k_r \omega^{\beta_r+\mu+\lambda} \cos(\hat{L}\omega)] \quad (24f)$$

$$X(\omega) = -\sum_{r=0}^n \hat{a}_r x_r \omega^{\alpha_r+\lambda} \quad (24g)$$

$$Y(\omega) = -\sum_{r=0}^n \hat{a}_r y_r \omega^{\alpha_r+\lambda} \quad (24h)$$

对式(23)求解, 可获得 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的参数 k_p 、 k_l 依赖于 λ 、 μ 及 k_d 的关系式为:

$$k_p = \frac{X(\omega)H(\omega) - Y(\omega)N(\omega) + k_d(B(\omega)H(\omega) - Z(\omega)N(\omega))}{M(\omega)H(\omega) - A(\omega)N(\omega)} \quad (25)$$

$$k_l = \frac{X(\omega)A(\omega) - Y(\omega)M(\omega) + k_d(B(\omega)A(\omega) - Z(\omega)M(\omega))}{N(\omega)A(\omega) - H(\omega)M(\omega)} \quad (26)$$

在上述两方程式中, 当 ω 从 $0 \sim \infty$ 连续取值时, 对于每一个固定的 k_d 、 λ 和 μ , 可在 (k_p, k_l) 平面上绘出一条复根边界曲线。

式(9)的稳定域由实根边界(RRB)、无限根边界

(IRB)以及复根边界(CRB)构成, 这些边界将 (k_p, k_l) 平面分成为稳定与不稳定区域。在由边界曲线构成的区域内任意选取测试点 (k_p, k_l) , 则可确定该区域是否为稳定性区域。

定理 1 若 $G(s)$ 是一个区间参数分数阶时滞系统族, 如果整个区间参数分数阶时滞系统组 $G(s)$ 能够被指定的分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器稳定且获得的稳定域具有鲁棒稳定域, 则当且仅当每一个顶点子系统 $G_i(s) \in G(s)$ 能被在稳定域内取值的同一个分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器所稳定且具有鲁棒性。

证明: 考虑图1中的闭环控制系统的准特征多项式, 在式(3)中, $\Phi(s)$ 的分母为:

$$P(s; \mathbf{q}) = 1 + C(s)G(s) =$$

$$\sum_{r=0}^n a_r s^{\alpha_r+\lambda} + \sum_{r=0}^n b_r s^{\beta_r} e^{-Ls} (k_p s^\lambda + k_l + k_d s^{\mu+\lambda}) \quad (27)$$

式中, a_r 、 b_r 、 L 为区间参数, 并且 $\underline{a}_r < a_r < \bar{a}_r$ 、 $\underline{b}_r < b_r < \bar{b}_r$ 、 $\underline{L} < L < \bar{L}$ 。根据边界理论^[2], 顶点特征多项式族 $P(s; \mathbf{q})$ 可被写成式(6)形式。如果被控对象 $G(s)$ 族稳定, 则当且仅当式(6)中的每一个顶点准特征多项式都稳定。因此, 可通过构建使各个顶点特征多项式都稳定的控制器 $C_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 2^{2n+1}$), 然后取各个控制器的交集 $C(s) = C_1(s) \cap C_2(s) \cap \dots \cap C_{2^{2n+1}}(s)$, 便可获得使整个区间参数分数阶时滞系统都稳定的稳定域。据此, 可采用文献[5]的方法找到使 $G(s)$ 中, 每一个顶点子系统 $G_i(s)$ 都取得最大稳定域的参数 λ 和 μ , 然后以这两个参数构建分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 求取各个顶点子系统的稳定域, 而各个顶点子系统稳定域的交集即为区间参数系统的稳定域。在求取的稳定域内任取分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的参数, 都能使区间参数分数阶特征多项式组 $P(s; \mathbf{q})$ 稳定, 且由文献[12]中的定理3可知, 要使在稳定域内任取分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的参数值具有稳定性, 则至少能使一个顶点特征多项式 $P_i(s; \mathbf{q})$ 稳定, 且在所有频率下 $P_E(s, \mathbf{q})$ 的值集都不包含原点。由此可得出结论, 所得到的分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器在稳定域内取值都可以使区间参数分数阶时滞系统稳定, 且其稳定域为鲁棒稳定域。

将上述的区间参数分数阶时滞系统的分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的鲁棒稳定域算法求解步骤归纳如下:

- 1) 用边界理论把区间参数分数阶时滞系统, 依据区间参数数目分解成若干顶点子系统。
- 2) 给出各个顶点子系统对应的顶点特征多项式和所有棱边的集合 $P_E(s, \mathbf{q})$ 。
- 3) 构建顶点子系统的稳定域:

① 据式(14)和式(15)分别调查子系统的RRB和IRB曲线;

② 依据 k_d 、 λ 和 μ 且用式(25)、式(26)获得 k_p 和 k_I 的方程式;

③ 固定 k_d 、 λ 和 μ ，在 (k_p, k_I) 平面内绘制RRB、IRB及CRB曲线，并且在此区域内取任意点测试稳定域;

④ 固定 k_d 和 μ ，用 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的不同的 λ 值，求各顶点子系统的稳定域，并且找出最大稳定域时的 λ 值;

⑤ 固定 k_d 和 λ ，用 PID^{μ} 控制器的不同的 μ 值求各顶点子系统的稳定域，并且找出最大稳定域时的 μ 值;

4) 重复步骤3)求出各个顶点子系统的稳定域，由各个子系统在最大稳定域时的 λ 和 μ 值构成新的分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器。

5) 用新的分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器求各个子系统的稳定域，而各个子系统稳定域的交集为区间参数时滞系统的稳定域。

6) 用所有棱边集合 $P_E(s, \mathbf{q})$ ，在复平面上绘制出顶点特征多项式 $P(s; \mathbf{q})$ 在频率范围内的值集，并用文献[12]中的定理3测试其稳定性。

3 算例

考虑分数阶时滞系统^[15]的传递函数为： $G(s) = ke^{-Ls}/Ts^{1.5}$ ，假设区间参数为 k 、 L 和 T 的名义值为： $k=1$ ， $L=0.5$ 和 $T=1.5$ ，且分别有 20%、15% 和 30% 的变化范围，即 $k \in [\underline{k}, \bar{k}] = [0.8, 1.2]$ ， $L \in [\underline{L}, \bar{L}] = [0.425, 0.575]$ ， $T \in [\underline{T}, \bar{T}] = [1.05, 1.95]$ 。根据边界理论，该系统有3个区间参数，故有 $2^3 = 8$ 个顶点子系统和 $3 \times 2^2 = 12$ 条棱边，各个顶点子系统为： $G_i = \underline{k}e^{-Ls}/Ts^{1.5}$ ， $i=1, 2, \dots, 8$ 。与之相应的顶点特征多项式为：

$$P_i(s; \mathbf{q}) = \underline{T}s^{1.5} + \underline{k}e^{-Ls}(k_p + k_I s^{-\lambda} + k_d s^{\mu}) \quad (28)$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

则多面体棱边的集合为：

$$P_E(s; \mathbf{q}) = \{\varepsilon(P_1(s; \mathbf{q}), P_2(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_1(s; \mathbf{q}), P_3(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_1(s; \mathbf{q}), P_5(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_2(s; \mathbf{q}), P_4(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_2(s; \mathbf{q}), P_6(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_3(s; \mathbf{q}), P_4(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_3(s; \mathbf{q}), P_7(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_4(s; \mathbf{q}), P_8(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_5(s; \mathbf{q}), P_6(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_5(s; \mathbf{q}), P_7(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_6(s; \mathbf{q}), P_8(s; \mathbf{q})), \varepsilon(P_7(s; \mathbf{q}), P_8(s; \mathbf{q}))\} \quad (29)$$

任意顶点子系统的闭环特征方程多项式为：

$$P_i(s; \mathbf{q}) = \hat{T}s^{1.5} + \hat{k}e^{-Ls}(k_p + k_I s^{-\lambda} + k_d s^{\mu}) \quad (30)$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

式中， \hat{T} 、 \hat{k} 和 \hat{L} 分别表示任意子系统的参数。

根据式(14)和式(15)可得到该系统的实根边界(RRB)和无限根边界(IRB)分别为：

实根边界(RRB): $k_I = 0 \quad (s^{\beta_0} = 1)$

无限根边界(IRB):

$$k_d = \begin{cases} 0 & \mu > 1.5 \\ \pm \hat{T}/\hat{k} & \mu = 1.5 \\ \text{none} & \mu < 1.5 \end{cases}$$

式中， $\hat{T} \in [0.7, 1.3]$ ， $\hat{k} \in [0.8, 1.2]$ 在区间内取值。

通过式(25)、式(26)，求出复根边界(CRB)。对于最简单的情况是采用整数阶PID控制器，即 $\lambda = \mu = 1$ ，则可以得到不同 k_d 情况下的CRB曲线和RRB直线，并将其绘制在 (k_p, k_I) 平面中。在图2中任意选择一测试点，用文献[16]中的方法测试，发现CRB曲线和RRB直线所构成的区域为稳定性区域。同时，随 k_d 的增大，系统的稳定域也增大。

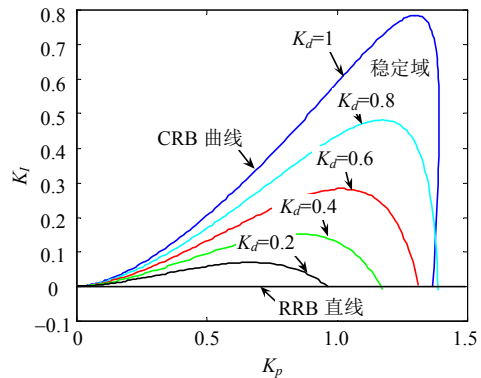


图2 PID控制系统稳定域(k_d 变化)

任意选择 k_d 的值，如 $k_d = 1$ 和 $\mu = 1$ 情况下，分别计算 $PI^{\lambda}D$ 控制器在不同 λ 值所对应的稳定域。由于8个子系统的稳定域趋势基本一致，仅取其中 G_3 子系统予以代表。从图3中可以看出， λ 取值在(0,2)的范围内时，当 $\lambda < 0.2$ 时系统的稳定域将显著增大，而当 $\lambda > 1.6$ 时系统的稳定域将逐步缩小。因此，系统将在 $\lambda = 0.2$ 处获得最大的稳定域，即分数阶 $PI^{0.2}D$ 控制器提供了最大的稳定域。同理，任意选择 $k_d = 1$ 和 $\lambda = 1$ 的情况下，分别计算 PID^{μ} 控制器在不同的 μ 值所对应的稳定域。从图4看出，当 μ 值在(0,2)范围内取值时，当 $\mu < 0.3$ 和 $\mu > 1.7$ 时系统的稳定域将变小，当 $1.1 < \mu < 1.5$ 时，系统将获得最大的稳定域，即分数阶 $PID^{1.35}$ 控制器提供了最大的稳定域。综合考虑上述两种情况可知，分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控

制器最大稳定域是在 $\lambda = 0.2$ 和 $\mu = 1.35$ 处获得。

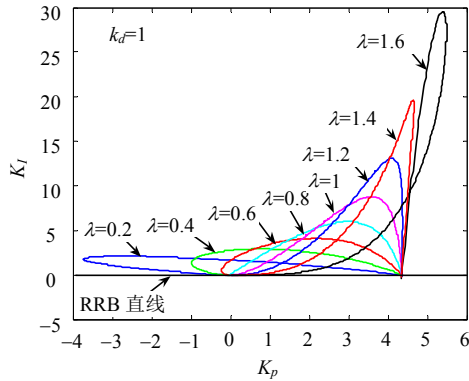


图3 G_3 子系统 $PI^\lambda D$ 稳定域

在 (k_p, k_I) 平面上, 用分数阶 $PI^{0.2}D^{1.35}$ 控制器分别计算8个子系统的稳定域, 而这8个子系统的稳定域的交集, 即为该区间参数时滞系统的稳定域, 如图5所示。在此区域上, 任意选取分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的参数 $(k_p, k_I, k_d, \lambda = 0.2, \mu = 1.35)$ 时, 该系统均是稳定的。

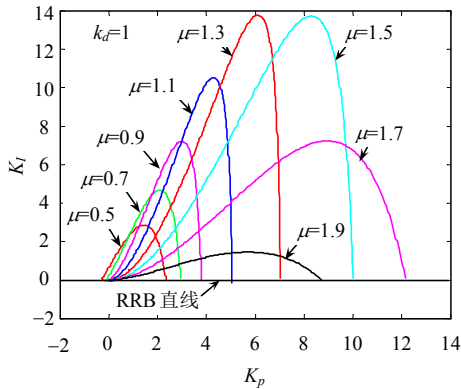


图4 G_3 子系统 PID^μ 稳定域

最后, 可采用文献[12]中的定理3测试区间参数分数阶时滞系统在分数阶 $PI^{0.2}D^{1.35}$ 控制器控制下的鲁棒稳定性。在图5获得的区间参数时滞系统的稳定域内任取分数阶 $PI^{0.2}D^{1.35}$ 控制器的参数, 如取 $k_p = 2$ 、 $k_I = 0.5$ 、 $k_d = 1$, 则区间参数分数阶时滞系统的特征方程式 $P(s; q)$ 在频率 $\omega = 1$ rad/s 时为图6所示的凸多面体。该多面体表明分数阶时滞系统的参数在区间内取任何值时, 其所对应每一个顶点特征多项式的值都在这个凸多面体的表面或内部。图7为当 $0 \leq \omega \leq 4$ 时分数阶特征多项式 $P(s; q)$ 的值集, 零点不含在值集里。根据文献[12]中的定理3, 可得出所给出的区间参数分数阶时滞系统的特征多项式 $P(s; q)$ 是鲁棒稳定的。为此, 图7中获得的稳定域即为区间参数分数阶时滞系统在 $PI^\lambda D^\mu$ 控制下的鲁棒稳定域。

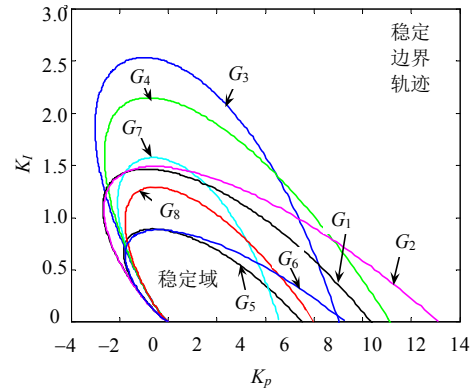


图5 分数阶 $PI^{0.2}D^{1.35}$ 控制器的稳定域

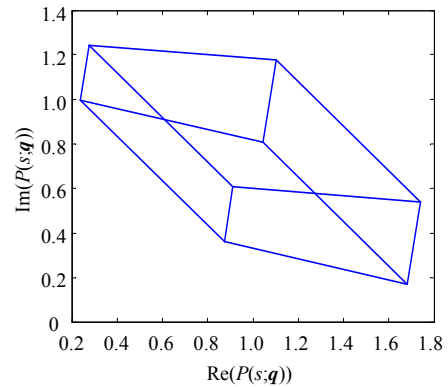


图6 在 $\omega=1$ 时 $P(s; q)$ 的值集空间

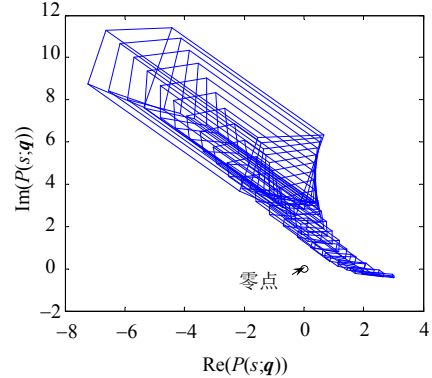


图7 在 $0 \leq \omega \leq 4$ 时 $P(s; q)$ 的值集

4 结 论

本文利用边界理论及值集概念的几何结构, 对分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器求取区间参数时滞系统的鲁棒稳定域分析提出了一种有效的算法。通过集值概念和零排除原理, 稳定域的鲁棒性得以测试。算例的数值结果表明, 该方法对于分析和验证稳定域的鲁棒性是简单且有效的, 同时使用该方法可为设计鲁棒性分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 提供鲁棒稳定性的理论支持, 且所获得的鲁棒稳定域能够有效地确定控制器参数的范围, 从而大大缩短了参数的寻找时间, 进而提高了鲁棒 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器的设计效率。

参 考 文 献

- [1] PODLUBNY I. Fractional-order system and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.
- [2] BUSLOWICZ M. Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, 2008, 56(4): 319-324.
- [3] LAZAREVIĆ M P, SPASIĆ A M. Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems: Gronwall's approach[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2009, 49(3-4): 475-481.
- [4] HAMAMCI S E, KANTHABHABHA P, VAITHIYANATHAN K. Computation of all stabilizing first order controllers for fractional order systems [C]//Proceedings of the 27th Chinese Control Conference. Kunming, China: IEEE, 2008: 123-128.
- [5] HAMAMCI S E. An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(10): 1964-1969.
- [6] HAMAMCI S E. Stabilization using fractional order PI and PID controller[J]. Nonlinear Dyn, 2008, 51(1-2): 329-343.
- [7] PETRAS I, CHEN Y Q, VINAGRE B M, et al. Stability of linear time invariant systems with interval fractional orders and interval coefficients[C]//Proceedings of International Conference on Computation Cybernetics. Vienna, Austria: IEEE, 2004: 341-346.
- [8] AHN H S, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Robust stability test of a class of linear time-invariant interval fractional-order system using Lyapunov inequality[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 187(1): 27-34.
- [9] CHEN Y Q, AHN H S, PODLUBNY I. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties[J]. Signal Processing, 2006, 86(10): 2611-2618.
- [10] AHN H S, CHEN Y Q. Necessary and sufficient stability condition of fractional order interval linear systems[J]. Automatica, 2008, 44(11): 2985-2988.
- [11] CHEN Y Q, AHN H S, XUE D. Robust controllability of interval fractional order linear time invariant systems[J]. Signal Processing, 2006, 86(10): 2794-2802.
- [12] TAN N, ÖZGÜVEN Ö F, ÖZYETKIN M M. Robust stability analysis of fractional order interval polynomials[J]. ISA Transactions, 2009, 48(2): 166-172.
- [13] BARTLETT A C, HOLLOT C V, LIN H. Root location of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges[J]. Math Control Signals Systems, 1988(1): 61-71.
- [14] CHENG Y C, HWANG C. Stabilization of unstable first-order time-delay systems using fractional-order PD controllers[J]. Journal of Chinese Institute of Engineers, 2006, 29(2): 241-249.
- [15] MANABE S. Early development of fractional order control[C]//Proceedings ASME 2003 Design Eng Tech Conf. Chicago, USA: ASME, 2003: 609-616.
- [16] HWANG C, CHENG Y C. A Numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems[J]. Automatica, 2006, (42): 825-831.

编辑 黄 莘