

# 非线性系统全状态线性化内模扰动抑制

雷靖<sup>1,2</sup>, 白雪玲<sup>3</sup>

(1. 云南民族大学数学与计算机科学学院 昆明 650500; 2. 云南省软件工程重点实验室 昆明 650091;

3. 日照职业技术学院机电工程学院 山东 日照 276826)

**【摘要】**运用全状态线性化方法对在外部扰动持续作用下的非线性系统设计了扰动抑制控制器,利用非线性控制项消除开环系统的非线性因素。根据内模原理构造与扰动动态特性相同的内模补偿器,再利用Pontryagin极小值原理对增广系统设计最优调节器,得到非线性的内模扰动抑制控制器,其中的内模补偿控制项抵消了扰动对系统的影响。仿真中使用非线性内模扰动抑制控制器与非线性前馈反馈扰动抑制控制器进行比较,结果证明前者能够消除非线性因素影响且实现无静差扰动抑制。

**关键词** 扰动抑制; 全状态线性化; 内模原理; 非线性系统; 最优控制

中图分类号 O231.2

文献标志码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2014.01.012

## Internal-Model Disturbance Rejection for Nonlinear Systems via Full-States Linearization

LEI Jing<sup>1,2</sup> and BAI Xue-ling<sup>3</sup>

(1. School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Nationalities University Kunming 650500;

2. Key Laboratory in Software Engineering of Yunnan Province Kunming 650091;

3. School of Electromechanical Engineering, Rizhao Polytechnic Rizhao Shandong 276826)

**Abstract** The paper considers the controller design problem of disturbance rejection for nonlinear systems under external persistent disturbance by using the full-state linearization approach. The disturbance rejection controller with nonlinear term is designed, in which the nonlinear control term cancels the open-loop nonlinearity. According to the internal-model principle, the internal-model compensator is constructed which has the same dynamical characteristic with disturbance. The optimal regulator of the augmented system is designed by using Pontryagin minimum principle. Then the nonlinear disturbance rejection controller based on internal model is obtained, in which the internal-model compensation control term cancels the effect produced by disturbance. Comparing with the nonlinear feedforward and feedback disturbance rejection controller, the designed nonlinear internal-model-based disturbance rejection controller can eliminate eliminating the nonlinearity and rejecting disturbance with zero steady-state error.

**Key words** disturbance rejection; full-state linearization; internal-model principle; nonlinear systems; optimal control

扰动抑制是控制的基本目的之一。对于具有复杂动态特性的扰动,通常的方法<sup>[1-6]</sup>都会不同程度地存在静差,然而内模原理却可以在伺服补偿器中构造出与外部扰动动态特性相同的信号,以抵消扰动从而达到无静差的扰动抑制<sup>[7-8]</sup>。随着计算机、微电子技术的高速发展,非线性控制取得了实质性的进展<sup>[9-12]</sup>,不同于Jacobi线性化、数值逼近等通过系统线性逼近得到线性的控制器,反馈线性化<sup>[13]</sup>则是将

一个非线性系统代数地转化为一个(全部或部分)线性系统,通过状态变换和反馈得到非线性的控制器,这样得到的控制器更精确和符合实际。

### 1 问题形成

考虑受持续扰动作用的非线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t), \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{y}$ 、 $\mathbf{v}$ 分别为状态向量、控制输入向量、

收稿日期: 2012-04-28; 修回日期: 2013-04-09

基金项目: 国家自然科学基金(61364012); 国家留学基金(201208535084); 云南省自然科学基金(2011FZ169); 云南省教育厅科学研究项目重点基金(2013Z034); 云南省软件工程重点实验室开放基金(2011SE15)

作者简介: 雷靖(1969-), 女, 博士, 主要从事时滞、非线性、网络控制系统的综合与应用方面的研究。

输出向量和外部扰动输入,  $D$ 、 $C$ 为常量矩阵。 $f: \mathbb{D}_x \times \mathbb{D}_u \rightarrow \mathbb{R}^n$  是从  $\mathbb{D}_x \times \mathbb{D}_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  到  $\mathbb{R}^n$  的连续可微映射,  $\mathbb{D}_x \times \mathbb{D}_u$  为原点  $(x, u) = (0, 0)$  的一个邻域,  $f(0, 0) = 0$ 。 $h: \mathbb{D}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  是从  $\mathbb{D}_x \subset \mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^n$  的连续可微映射。外系统为:

$$\dot{w}(t) = Gw(t), \quad v(t) = Fw(t) \quad (2)$$

描述了扰动的动态特性。其中,  $w(t)$  为扰动向量;  $G$ 、 $F$  为常量矩阵,  $(G, F)$  完全可观测。本文目的是设计非线性扰动抑制控制器使其消除系统的非线性因素, 同时实现无静差扰动抑制。

## 2 非线性内模扰动抑制控制律的设计

### 2.1 准备工作

引理 1<sup>[13]</sup> 系统式(1)可全状态线性化的充要条件是存在函数  $h(x)$  满足:

$$\begin{cases} L_g L_f^{i-1} h(x) = 0 & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ L_g L_f^n h(x) \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中,

$$L_f^0 h(x) = h(x)$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x)$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g(x)$$

引理 2<sup>[13]</sup> 系统式(1)可全状态线性化的充要条件是存在  $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ , 使得:

1) 对于所有  $x \in \mathbb{D}_0$ , 矩阵:

$$\mathcal{G}(x) = [g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)]$$

的秩为  $n$ 。

2) 分布  $\mathcal{D} = \text{span}\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g\}$  在  $\mathbb{D}_0$  上是对合的, 其中:

$$ad_f^0 g(x) = g(x)$$

$$ad_f g(x) = [f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x) \quad k \geq 1$$

式中,  $[f, g]$  为李括号, 其中的概念如李括号、对合、分布等, 可参见文献[13]。

运用引理1或引理2即可判断系统是否可全状态线性化。这里, 假设系统式(1)可全状态线性化。由引理1可知, 非线性系统式(1)存在微分同胚  $T(x)$ :

$$z(t) = [h^T(x) \quad L_f h^T(x) \quad \dots \quad L_f^{n-1} h^T(x)] \triangleq T(x) \quad (4)$$

使其转换为如下标准型:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) = L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x)u(t) + L_D L_f^{n-1} h(x)v(t) \\ y(t) = z_1(t) \end{cases} \quad (5)$$

也即等价形式为:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + B[L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x)u(t) + \\ L_D L_f^{n-1} h(x)v(t)] \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为相应的标准型矩阵, 且  $(A, B, C)$  为完全可控可观测。由反馈线性化原理知, 非线性控制:

$$u(t) = -(L_g L_f^{n-1} h(x))^{-1} [L_f^n h(x) - \zeta(t)] \quad (7)$$

能够将标准型非线性系统式(6)转变为线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + B[\zeta(t) + L_D L_f^{n-1} h(x)v(t)] \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (8)$$

再根据内模原理构造与外系统式(2)动态特性相同的内模补偿器<sup>[8]</sup>

$$\dot{\xi}(t) = Y\xi(t) + Ny(t) \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (9)$$

式中,  $\xi(t)$  为内模状态向量;  $Y$ 、 $N$  为适当维数的矩阵且  $(Y, N)$  为完全可控。系统式(8)与内模补偿器式(9)组成增广系统:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ NC & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \zeta(t) + \\ \begin{bmatrix} BL_D L_f^{n-1} h(x) \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} z(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

令

$$\begin{cases} \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ NC & Y \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C} = [C \quad 0], \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} BL_D L_f^{n-1} h(x) \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

能够证明  $(\bar{A}, \bar{B})$  为完全可控<sup>[8]</sup>。

这样, 考虑增广系统式(10)与外系统式(2)关于有限时域二次型性能指标:

$$J(\zeta(\cdot)) = \frac{1}{2} \varphi(t_f)^T Q_f \varphi(t_f) +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\varphi(t)^T Q \varphi(t) + \zeta^T(t) R \zeta(t)] dt \quad (12)$$

下的最优调节问题, 其中,

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{f1} & \mathbf{Q}_{f12} \\ \mathbf{Q}_{f12}^T & \mathbf{Q}_{f2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

为半正定矩阵,  $\mathbf{R}$  为正定矩阵, 即得到定理1。

## 2.2 非线性内模扰动抑制控制律的设计

**定理 1** 受持续扰动系统式(2)作用的非线性系统式(1)在有限时域非线性内模扰动抑制控制律为:

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{n-1} \mathbf{h}(x))^{-1} \{ \mathbf{L}_f^n \mathbf{h}(x) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \times [\mathbf{P}_1(t) \mathbf{T}(x) + \mathbf{P}_2(t) \boldsymbol{\xi}(t)] \} \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{P}_1(t)$ 、 $\mathbf{P}_2(t)$  是矩阵微分方程:

$$\begin{cases} -\dot{\mathbf{P}}_1(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_1(t) + \mathbf{P}_1(t) \mathbf{A} + \mathbf{P}_{12}(t) \mathbf{N} \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{N}^T \mathbf{P}_{12}^T(t) - \\ \quad \mathbf{P}_1(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_1(t) + \mathbf{Q}_1(t) \\ -\dot{\mathbf{P}}_{12}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{12}(t) + \mathbf{P}_{12}(t) \mathbf{Y} + \mathbf{C}^T \mathbf{N}^T \mathbf{P}_2(t) - \\ \quad \mathbf{P}_1(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{12}(t) + \mathbf{Q}_{12}(t) \\ -\dot{\mathbf{P}}_2(t) = \mathbf{Y}^T \mathbf{P}_2(t) + \mathbf{P}_2(t) \mathbf{Y} - \mathbf{P}_{12}^T(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_{12}(t) + \mathbf{Q}_2(t) \\ \mathbf{P}_1(t_f) = \mathbf{Q}_{f1}, \quad \mathbf{P}_{12}(t_f) = \mathbf{Q}_{f12}, \quad \mathbf{P}_2(t_f) = \mathbf{Q}_{f2} \end{cases} \quad (15)$$

的唯一半正定解, 其相应的二次型性能指标为式(12)。

**证明** 考虑系统式(10)和式(2)关于二次型性能指标式(12)的最优调节问题, 根据Pontryagin极小值原理, 首先构造Hamilton函数:

$$\mathbf{H}[\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\zeta}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{Q}(t) \boldsymbol{\varphi}(t) +$$

$$\boldsymbol{\zeta}^T(t) \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\zeta}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varphi}(t) + \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\zeta}(t) + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{v}(t)] \quad (16)$$

由极值条件得到控制方程:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\zeta}(t)} = \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}(t) + \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad (17)$$

最优控制:

$$\boldsymbol{\zeta}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (18)$$

使Hamilton函数取得极小值; 得到正则方程为:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)} = \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\varphi}(t) - \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\lambda}(t) + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{v}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\varphi}(t)} = -\mathbf{Q} \boldsymbol{\varphi}(t) - \bar{\mathbf{A}}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \end{cases} \quad (19)$$

由于终端  $\boldsymbol{\varphi}(t_f)$  自由, 所以横截条件为:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}(t_f)} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \boldsymbol{\varphi}(t_f) \right] = \mathbf{Q}_f \boldsymbol{\varphi}(t_f) \quad (20)$$

式中,  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$  与  $\boldsymbol{\varphi}(t_f)$  为线性关系, 且正则方程(19)亦为线性方程, 因此假设伴随向量:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\varphi}(t) \quad (21)$$

式中,

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) & \mathbf{P}_{12}(t) \\ \mathbf{P}_{12}^T(t) & \mathbf{P}_2(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

为待定矩阵。正则方程(19)与终端条件式(20)组成如下两点边值问题:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{L}_D \mathbf{L}_f^{n-1} \mathbf{h}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0 \\ \mathbf{Q}_f \boldsymbol{\varphi}(t_f) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (23)$$

求解两点边值问题(23)得到最优调节器:

$$\boldsymbol{\zeta}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{P}(t) [\mathbf{z}(t) \quad \boldsymbol{\xi}(t)]^T \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{P}(t)$  是Riccati矩阵微分方程:

$$\begin{cases} -\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}_1(t_f) = \mathbf{Q}_{f1}, \quad \mathbf{P}_{12}(t_f) = \mathbf{Q}_{f12}, \quad \mathbf{P}_2(t_f) = \mathbf{Q}_{f2} \end{cases} \quad (25)$$

的唯一半正定解, 将式(22)代入式(25)得到:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{P}}_1(t) & -\dot{\mathbf{P}}_{12}(t) \\ -\dot{\mathbf{P}}_{12}^T(t) & -\dot{\mathbf{P}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) & \mathbf{P}_{12}(t) \\ \mathbf{P}_{12}^T(t) & \mathbf{P}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{N} \mathbf{C} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \mathbf{N}^T \\ 0 & \mathbf{Y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) & \mathbf{P}_{12}(t) \\ \mathbf{P}_{12}^T(t) & \mathbf{P}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) & \mathbf{P}_{12}(t) \\ \mathbf{P}_{12}^T(t) & \mathbf{P}_2(t) \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(t) & \mathbf{P}_{12}(t) \\ \mathbf{P}_{12}^T(t) & \mathbf{P}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_1(t_f) = \mathbf{Q}_{f1}, \quad \mathbf{P}_{12}(t_f) = \mathbf{Q}_{f12}, \quad \mathbf{P}_2(t_f) = \mathbf{Q}_{f2} \end{cases} \quad (26)$$

进一步展开式(26)即得到矩阵微分方程(15)。

再将式(22)代入式(24)得到最优控制:

$$\boldsymbol{\zeta}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T [\mathbf{P}_1(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{P}_{12}(t) \boldsymbol{\xi}(t)] \quad (27)$$

将式(27)代入非线性控制式(7)得到系统式(1)的非线性内模扰动抑制控制器:

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{n-1} \mathbf{h}(x))^{-1} \{ \mathbf{L}_f^n \mathbf{h}(x) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \times [\mathbf{P}_1(t) \mathbf{z}(t) + \mathbf{P}_{12}(t) \boldsymbol{\xi}(t)] \} \quad (28)$$

将转换式(4)代入式(28)即得到控制律式(14)。证毕。

由2.2节可见,  $t_f$  有限时增益矩阵  $\mathbf{P}(t)$  是时变的; 但随着  $t_f \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{P}(t)$  最终趋于一常数矩阵, 即  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{P}^{[8]}$ , 因而不加证明地给出无限时域非线性内模扰动抑制控制律:

**定理 2** 受持续扰动式(2)作用的非线性系统式(1)在无限时域的非线性内模扰动抑制控制律为:

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{n-1} \mathbf{h}(x))^{-1} \{ \mathbf{L}_f^n \mathbf{h}(x) + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \times [\mathbf{P}_1 \mathbf{T}(x) + \mathbf{P}_{12} \boldsymbol{\xi}(t)] \} \quad (29)$$

其中,  $\mathbf{P}_1$ 、 $\mathbf{P}_{12}$  是矩阵方程:

$$\begin{cases} A^T P_1 + P_1 A + P_{12} N C + C^T N^T P_{12}^T - P_1 B R^{-1} B^T P_1 + Q_1 = 0 \\ A^T P_{12} + P_{12} Y + C^T N^T P_2 - P_1 B R^{-1} B^T P_{12} + Q_{12} = 0 \\ Y^T P_2 + P_2 Y - P_{12}^T B R^{-1} B^T P_{12} + Q_2 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

的唯一正定解, 其相应的二次型性能指标为:

$$J(\zeta(\cdot)) = \int_0^\infty [\varphi^T(t) Q \varphi(t) + \zeta^T(t) R \zeta(t)] dt \quad (31)$$

或平均二次型性能指标为:

$$J(\zeta(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\varphi^T(t) Q \varphi(t) + \zeta^T(t) R \zeta(t)] dt \quad (32)$$

### 3 仿真示例

考虑非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) + Dv(t) \\ \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -6x_1^2(t) - 4x_1(t) + 2x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) = [1 \ 0]x(t) \end{cases} \quad (33)$$

则

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 12x_1 + 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

对所有  $x(t)$ , 有矩阵:

$$\mathcal{G}(x) = [g, ad_f g] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的秩为2, 所以分布  $\mathcal{D} = \text{span}\{g\}$  是对合的, 由引理2可知系统式(33)可全状态线性化。令  $h(x) = x_1$ , 则变量代换:

$$z_1 = h(x) = x_1, \quad z_2 = L_f h(x) = x_2$$

将状态方程式(33)转换为标准型:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -6z_1^2(t) - 4z_1(t) + 2z_2(t) + u(t) + v(t) \end{cases} \quad (34)$$

由反馈线性化原理可知, 状态反馈控制为:

$$u(t) = 6z_1^2(t) + \zeta(t)$$

使得非线性系统式(34)的闭环系统为线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -4z_1(t) + 2z_2(t) + \zeta(t) + v(t) \end{cases} \quad (35)$$

考虑系统式(33)受到正弦扰动:

$$\dot{w}_1(t) = w_2(t), \quad \dot{w}_2(t) = -w_1(t), \quad v(t) = w_1(t) \quad (36)$$

的持续作用, 也即正弦扰动信号为:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega = 1$$

由该构造与其动态特性相同的内模补偿器为:

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

选择平均型二次型性能指标式(32), 其中权重矩阵  $Q_1 = Q_2 = \text{diag}(1, 1)$ ,  $Q_{12} = Q_{12}^T = -Q_1$ ,  $R = 1$ 。根据定理2设计非线性内模扰动抑制控制器(IMCC)为:

$$u(t) = 6x_1^2 - R^{-1} B^T [P_1 x(t) + P_{12} \xi]$$

同时设计非线性前馈反馈扰动抑制控制器(FFOC), 将二者作用下的系统响应进行比较, 得到的闭环系统状态、控制器输入及扰动状态和内模状态的轨迹曲线如图1~图4所示。

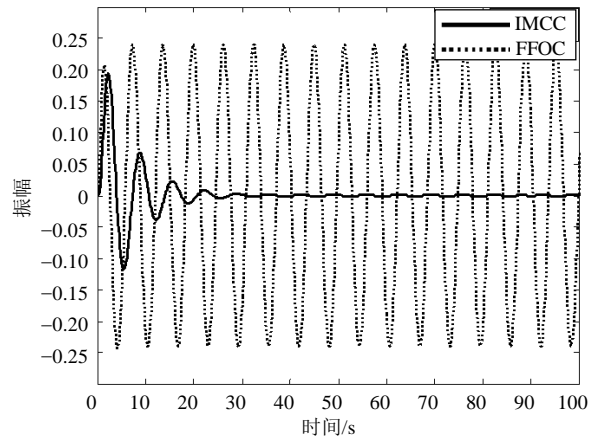


图1 正弦扰动作用下状态  $x_1$  的轨迹曲线

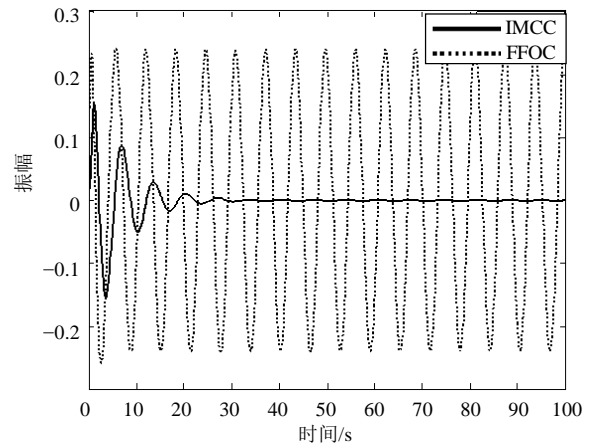


图2 正弦扰动作用下状态  $x_2$  的轨迹曲线

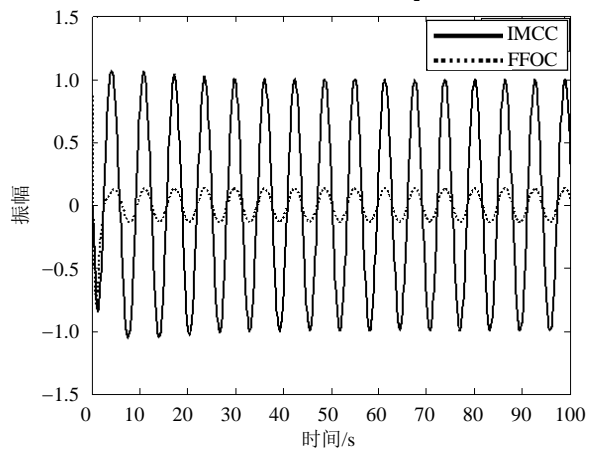


图3 控制器输入  $u$  的轨迹曲线

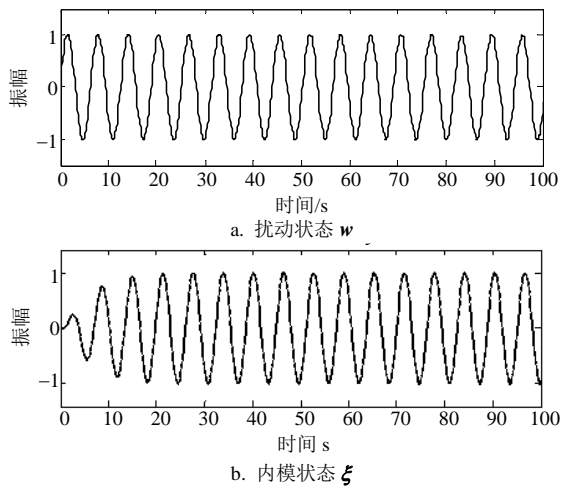


图4 两种状态下的轨迹曲线

从仿真结果可以看出, 非线性内模扰动抑制控制器作用下的闭环系统渐近稳定, 不存在系统静差; 而非线性前馈反馈扰动抑制控制器作用下的闭环系统虽然得到稳定, 但是仍然存在系统静差, 不能够完全消除扰动对系统的影响。并且, 内模控制付出的能量多于前馈反馈控制的控制量; 内模补偿器与扰动的动态特征相近。

## 4 结论

运用全状态线性化原理所设计的非线性内模扰动抑制控制器能够消除系统的开环非线性因素; 且能够消除系统静差; 仿真证实了其有效性和简便性。

### 参考文献

- [1] 雷靖, 刘云飞, 郑茂堡, 等. 基于全状态线性化的非线性系统扰动抑制[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2012, 21(3): 220-225.  
LEI Jing, LIU Yun-fei, ZHENG Mao-fa, et al. Disturbance rejection for nonlinear systems via full-state linearization[J]. Journal of Yunnan University of Nationalities(Natural Sciences Edition), 2012, 21(3): 220-225.
- [2] SUI D, FENG L, HOVD M, et al. Decomposition principle in model predictive control for linear systems with bounded disturbances[J]. Automatica, 2009, 45(8): 1917-1922.

- [3] LI H, HU S J, CHENG Z. Multiple-step predictive control for offshore structures[J]. China Ocean Engineering, 1999, 13(3): 231-246.
- [4] WANG Y, FENG G, CHENG D, et al. Adaptive  $L_2$  disturbance attenuation control of multi-machine power systems with SMES units[J]. Automatica, 2006, 42(7): 1121-1132.
- [5] LEVIN J, PEREZ-ARANCIBIA N O, IOANNOU P A, et al. A neural-networks-based adaptive disturbance rejection method and its application to the control of hard disk drives[J]. IEEE Transactions on Magnetics, Part 1, 2009, 45(5): 2140-2150.
- [6] XIA C, YAN Y, SONG P, et al. Voltage disturbance rejection for matrix converter-based PMSM drive system using internal model control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2012, 59(1): 361-372.
- [7] LANDAU I D, CONSTANTINESCU A, RET D. Adaptive narrow band disturbance rejection applied to an active suspension-an internal model principle approach[J]. Automatica, 2005, 41(4): 563-574.
- [8] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2002.  
ZHENG Da-zhong. Linear system theory[M]. 2nd ed. Beijing: Tsing University Press, 2002.
- [9] WANG Z, HO D W C, LIU Y, et al. Robust  $H_\infty$  control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements[J]. Automatica, 2009, 45(3): 684-691.
- [10] CHANG P H, JUNG J H. A systematic method for gain selection of robust PID control for nonlinear plants of second-order controller canonical form[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, 17(2): 473-483.
- [11] CHEN M, GE S S, HOW B. Robust adaptive neural network control for a class of uncertain MIMO nonlinear systems with input nonlinearities[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2010, 21(5): 796-812.
- [12] CIMEN T, BANKS S P. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria[J]. Systems & Control Letters, 2004, 53(5): 327-346.
- [13] KHALIL H K. Nonlinear Systems[M]. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.

编辑 张俊