

时域磁场积分方程时间步进算法后时稳定性研究

李金艳, 聂在平, 赵延文

(电子科技大学电子工程学院 成都 611731)

【摘要】从理论上推导得到时域磁场积分方程时间步进算法感应电流后时稳定的充分必要条件, 该条件可以有效地判断时域磁场积分方程时间步进算法的后时稳定性。基于时域磁场积分方程时间步进算法及稳定性条件提出了一种改进算法, 该算法可以保证感应电流后时稳定。通过数值算例验证了推导的时域磁场积分方程时间步进算法后时稳定条件的正确性, 改进算法比原算法有更好的计算精度。

关键词 电磁散射; 后时不稳定性; 时间步进算法; 时域磁场积分方程

中图分类号 TM15

文献标志码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2014.02.007

Stability of Time-Domain Magnetic Field Integral Equations Based Marching On-In Time Algorithm

Li Jin-yan, Nie Zai-ping, and Zhao Yan-wen

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract The necessary and sufficient condition of late-time stability of time-domain magnetic field integral equations (TDMFIE) based marching on-in time (MOT) algorithm is obtained through theoretical derivation. Using the condition, the late-time stability of TDMFIE-MOT algorithm can be estimated accurately. Based on the condition, an improved algorithm is proposed to ensure that the transient currents are stable in the late-time. The stability condition is validated by numerical results. It is also validated that the improved algorithm is more accurate than TDMFIE-MOT algorithm.

Key words electromagnetic scattering; late-time instability; marching on-in time (MOT); time-domain magnetic field integral equations (TDMFIE)

随着宽带电磁信号以及非线性系统的工程应用越来越广泛, 用于分析瞬态电磁散射问题的时域积分方程方法^[1-3]研究日趋活跃。时域积分方程方法相比时域微分方程方法, 具有计算精度高、自动满足辐射边界条件、更适合分析表面散射体等特点。但是, 利用时间步进(MOT)算法在求解时域积分方程时, 会存在两个主要问题: 后时不稳定问题以及存储量、计算量大的问题。为降低算法计算量, 基于算法的加速算法等改进方法成为近十几年时域积分方程研究领域一项重要研究内容, 其中时域平面波(PWTD)^[4]算法、FFT-MOT^[5]方法等对时域积分方程方法的计算效率都有较大的提高。关于改进MOT算法后时不稳定的研究也很多, 早期的研究主要采用隐式时间步进算法代替显示时间步进算法^[6-8], 稳定性虽有所改善, 但不能完全解决TDIE-MOT算法的后时不稳定问题。近期关于精确计算时域阻抗元素可以消除TDIE-MOT算法后时不稳定^[9-11]的研究具

有较大进展, 但是这些研究还没有从理论上得到阻抗元素与算法稳定性定量关系。本文首先从理论上推导得到时域磁场积分方程(TDMFIE)MOT算法后时电流稳定的充分必要条件, 该条件与入射波无关, 而仅与时域阻抗矩阵相关。其次本文基于TDMFIE-MOT算法, 提出了一种针对计算误差导致后时不稳定性的改进算法, 该算法可以保证感应电流后时稳定。最后通过数值算例验证了本文推出的时域磁场积分方程MOT算法稳定性条件的正确性, 本文提出的改进算法比原算法有更好的计算精度。

1 TDMFIE-MOT算法

假设闭金属导体的表面为 S , 其外法线方向为 \hat{n} , 入射磁场为 $\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$, 该磁场在理想导体表面 S 所产生的感应电流为 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, 利用理想导体表面磁场所满足的边界条件, 可以得到时域磁场积分方程(TDMFIE)为:

收稿日期: 2011-11-14; 修回日期: 2013-03-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(60971033, 61171046); 教育部长江学者和创新团队发展计划(IRT1113)

作者简介: 李金艳(1981-), 女, 博士生, 主要从事计算电磁学、新型天线待方面的研究。

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{2} - \hat{\mathbf{n}} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \left(\frac{\mu}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dS' \right) \quad (1)$$

式中, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$; $t - R/c$ 为推迟时间; $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 为光在媒质中传播的速度。

将感应电流用空间基函数 $f_n(\mathbf{r})$ 、时间基函数 $T(t)$ 展开后, 带入式(1), 可得到以下矩阵方程:

$$\mathbf{M}_0^H \cdot \mathbf{J}_k = \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{M}_l^H \cdot \mathbf{J}_{k-l} \quad (2)$$

式中,

$$\mathbf{V}_k^{\text{inc,H}}(m) = \int_{S_m} f_m(\mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t_k)) dS \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_l^H(m, n) = \frac{T(l\Delta t)}{2} \times$$

$$\int_{S_m} f_m(\mathbf{r}) \cdot f_n(\mathbf{r}) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_m} \int_{S_n} f_m(\mathbf{r}) \times \left[\hat{\mathbf{n}} \times f_n(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}} \left(\frac{T(t)}{R^2} + \frac{1}{cR} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right) \right]_{t=l\Delta t - \frac{R}{c}} dS' dS \quad (4)$$

式(2)即为MOT算法的基础矩阵方程, 通过时间步的递推, 可以得到每一时间步上的感应电流 \mathbf{J}_k 。

2 TDMFIE-MOT算法的稳定性条件

根据TDMFIE-MOT算法所产生的阻抗矩阵的性质^[12]: 当 $0 \leq l \leq N$ 时, (其中 $N = \text{int}(R/c\Delta t) + 1$), 矩阵 \mathbf{M}_l^H 会随参数 l 的变化而变化; 而当 $l > N$ 时, 矩阵 \mathbf{M}_l^H 为零矩阵。因此, 假设时刻 $k > N$ 时, 式(2)做适当变化, 可得:

$$\mathbf{J}_k = (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} - (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \sum_{l=1}^N \mathbf{M}_l^H \cdot \mathbf{J}_{k-l} \quad (5)$$

根据式(5)可以看出, 感应电流 \mathbf{J}_k 由入射波贡献(式中等号右端第一项)与之前时刻感应电流的累积(式中等号右端第二项)相关。当 k 足够大时, 入射波贡献相对较小, 这是由于脉冲形式的入射波当时间大于某一值时衰减非常快(例如高斯脉冲、调制高斯脉冲等)或已经为零(如方波、三角波等), 因此感应电流 \mathbf{J}_k 的稳定性主要取决于前面时刻电流的累积。当 k 足够大时, 可以将式(5)写为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k-N+1} \\ \mathbf{J}_{k-N+2} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_k \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k-N} \\ \mathbf{J}_{k-N+1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, 矩阵 \mathbf{A} 为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_s} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_s} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_{N_s} \\ \mathbf{P}_N^H & \mathbf{P}_{N-1}^H & \mathbf{P}_{N-2}^H & \cdots & \mathbf{P}_1^H \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中 \mathbf{I}_{N_s} 为 N_s 阶单位矩阵; N_s 为未知量总数; $\mathbf{P}_i^H = -(\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_i^H$; $i = 1, 2, \dots, N$ 。矩阵 \mathbf{A} 与 k 无关, 因此, 可以将式(6)看作迭代求解的迭代格式, 矩阵 \mathbf{A} 为迭代矩阵, 根据矩阵理论, 序列 \mathbf{J}_k 收敛的充分必要条件是矩阵 \mathbf{A} 的谱半径小于1, 即:

$$\rho(\mathbf{A}) < 1 \quad (8)$$

上式即为判断TDMFIE-MOT算法后时是否稳定的充分必要条件。从式(7)可以看出决定TDMFIE-MOT算法稳定性的是时域阻抗矩阵, 而与入射波形式无关。

3 基于时域磁场积分方程时间步进算法的后时稳定性改进算法

从式(8)可以看出, 若要改善TDMFIE-MOT算法的稳定性, 最直接的方法即为减小矩阵 \mathbf{A} 的谱半径。对于由计算误差导致的TDMFIE-MOT算法后时不稳定性, 通常情况下矩阵 \mathbf{A} 的谱半径略大于1, 在该情况下可以通过增加后时收敛因子保证TDMFIE-MOT算法的稳定性。改进算法可以表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_k = (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} - (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \sum_{l=1}^N \mathbf{M}_l^H \cdot \mathbf{J}_{k-l} & k \leq k_{\text{late}} \\ \mathbf{J}_k = (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} - \beta (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \sum_{l=1}^N \mathbf{M}_l^H \cdot \mathbf{J}_{k-l} & k > k_{\text{late}} \\ \mathbf{J}_{k-i} = \beta \mathbf{J}_{k-i} (i = 1, 2, \dots, N-1) \end{cases} \quad (9)$$

式中, k_{late} 表示后时响应起始时刻; β 表示后时收敛因子。根据式(9)可以得到, 当 k 足够大时, 改进算法对应的迭代矩阵的谱半径为 $\beta \cdot \rho(\mathbf{A})$ 。这样可以通过适当选取 β 使迭代矩阵谱半径小于1, 从而保证改进算法后时稳定。算法中需要确定两个参数:

1) 后时响应起始时刻 k_{late} 可以通过下式计算:

$$k_{\text{late}} = (k_{\text{in}} + \alpha N) \quad (10)$$

式中, k_{in} 为入射波峰值过后, 下降到峰值千分之一时对应的时间步数; α 为考虑的耦合次数, 通常可以取5~8。

2) 后时收敛因子 β 需要满足:

$$\beta < \frac{1}{\rho(\mathbf{A})} \quad (11)$$

对于由计算误差导致的TDMFIE-MOT算法的后时不稳定性, β 可以直接选取为接近1的常数(如0.99、0.95), 这样对于未知量数目较大的目标, 无需计算矩阵 \mathbf{A} 的谱半径, 可以提高计算效率。

改进后的算法计算结果总能保证感应电流后时稳定, 符合能量有限原理。与原算法相比改进方法仅针对后时响应有所改变, 前面时刻响应与原算法的计算精度相同, 而后时计算结果优于发散的原结果, 因此改进算法与原算法相比有更好的计算精度。

4 数值算例

假定入射电场为:

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\hat{\mathbf{x}}}{T\sqrt{\pi}} \exp(-\gamma^2) \quad (12)$$

式中, $\gamma = 4(ct - ct_w - \mathbf{r} \cdot \mathbf{k})/T$; 参数 $T = 4$ 。入射方向 $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$ 。

4.1 TDMFIE-MOT算法稳定性条件的验证

首先计算边长为1.0 m、中心位于原点的立方体, 立方体被剖分为240个三角形单元, 未知电流数目为360个。图1比较了不考虑感应电流的累积(式(2)右端第二项)而仅仅考虑入射波项(式(2)右端第一项)的情况下, 与TDMFIE-MOT算法在时间步长分别取0.3、0.5、0.7 ns时, 立方体表面(0.5 m, 0, 0)处的感应电流大小的计算结果。从图中可以看出, 仅考虑入射波时, 感应电流在 t 较大($t > 100$ ns)时, 已经变得很小, 这说明后时感应电流的稳定性主要是由之前时刻的感应电流累积项所决定的。当时间步长分别取0.3、0.5、0.7 ns时, 计算出的矩阵 \mathbf{A} 的谱半径分别为1.004 7、0.995 9、0.986 2。从图1中可以看出, 当时间步长为0.5 ns与0.7 ns时, 感应电流收敛, TDMFIE-MOT算法后时稳定, 而当时间步长为0.3 ns时, 感应电流后时不稳定, 这与利用式(8)判断的结果一致, 同时还可以看出, 矩阵 \mathbf{A} 的谱半径越小, 感应电流收敛越快。

然后再利用TDMFIE-MOT算法计算底面半径为0.2 m, 高为0.8 m且沿 z 方向, 中心位于原点的圆柱目标, 圆柱被剖分为420个三角形单元, 未知电流数目为630个。图2给出了时间步长分别取0.3、0.5、0.7 ns时, 位于圆柱表面(0.2 m, 0, 0)处的感应电流大小计算结果。当时间步长分别为0.3、0.5、0.7 ns时, 计算出的矩阵 \mathbf{A} 的谱半径分别为1.006 7、0.994 3、0.997 4。同样地, 图2给出的计算结果与采用式(8)判断出的TDMFIE-MOT算法稳定性一致。

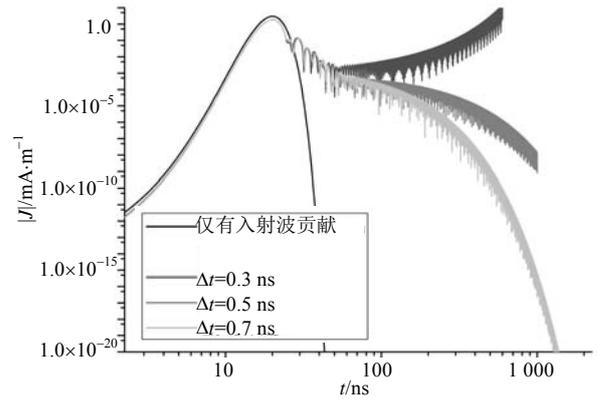


图1 中心位于原点、边长1 m的立方体表面(0.5 m,0,0)处的感应电流大小计算结果

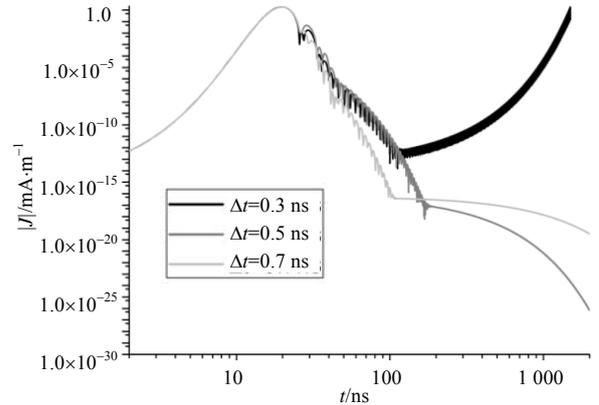


图2 中心位于原点、边长为1 m的立方体表面(0.5 m,0,0)处的感应电流大小

从以上两个算例可以看出, 本文推导的TDMFIE-MOT算法稳定性条件可以准确地判断该算法的后时稳定性。

4.2 基于TDMFIE-MOT算法的后时稳定性改进算法精度验证

首先以4.1节中的立方体目标为例, 时间步长取0.3 ns, 利用本文的后时稳定性改进算法。首先由式(10)可以得到 $k_{\text{late}} = (k_{\text{in}} + \alpha N) = 100 + 5 \times 19 = 195$; 其次 β 选取为0.99, 立方体表面(0.5 m, 0, 0)处的感应电流大小计算结果如图3所示。从图中可以看出, 后时感应电流的计算结果已经变得稳定。图4给出了TDMFIE-MOT算法后时稳定性改进算法取前500时间步计算的结果进行傅里叶变换得到的100 MHz和200 MHz在扫描面 XOZ 面的双站RCS与仿真软件FEKO计算的结果比较。从图中可以看出, 在100 MHz时, TDMFIE-MOT算法、后时稳定性改进算法计算结果非常接近并且与FEKO计算的结果基本吻合; 而在200 MHz时, TDMFIE-MOT算法的结果与FEKO计算的结果已经相差很大, 后时稳定性改进算法的计算结果仍与FEKO计算的结果比较吻合, 说明本文提出的基于TDMFIE-MOT算法的后时稳定性

改进算法不仅可以保证感应电流的后时稳定性同时具有更好的计算精度。

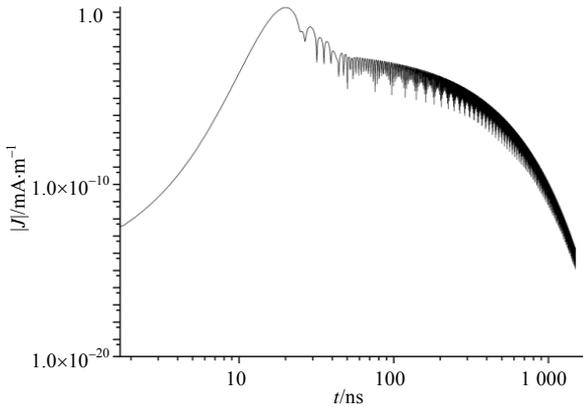
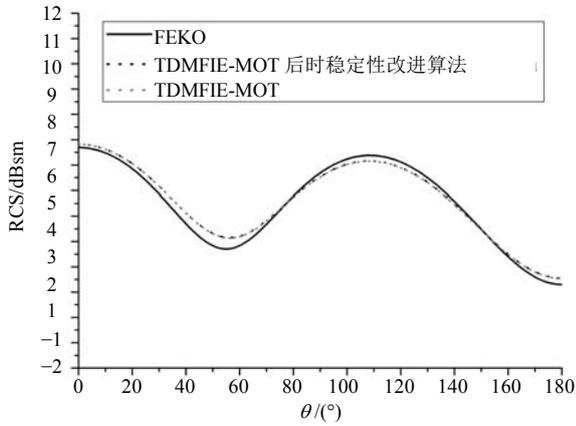
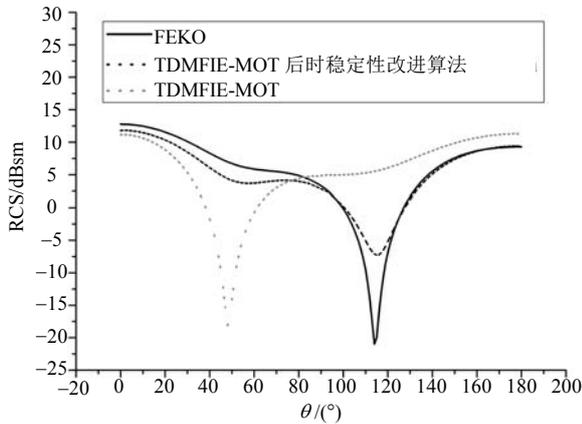


图3 利用后时稳定性改进算法计算中心位于原点、边长为1 m的立方体表面(0.5 m,0,0)处的感应电流大小(时间步长为0.3 ns)



a. 频率为100 MHz



b. 频率为200 MHz

图4 分别利用TDMFIE-MOT算法与后时稳定性改进算法计算的位于原点、边长为1m的立方体 XOZ 面的双站RCS与FEKO软件计算结果的对比

然后以4.1节中的圆柱目标为例。时间步长取0.3 ns。利用本文的后时稳定性改进算法,首先由式(10)可以得到 $k_{late} = (k_{in} + \alpha N) = 100 + 5 \times 10 = 150$,其次 β 选取为0.99,计算得到的圆柱表面(0.2 m, 0, 0)处的感应电流大小随时间变化的结果如图5所示,从图中可以看出感应电流后时计算结果也已经变得

稳定。图6给出了TDMFIE-MOT算法、后时稳定性改进算法取前500时间步计算的结果进行傅里叶变换得到的100 MHz和200 MHz在扫描面 XOZ 面的双站RCS与仿真软件FEKO计算的结果比较,从图中可以看出, TDMFIE-MOT算法与后时稳定性改进算法的计算结果基本一致,而且都与FEKO计算的结果比较吻合。

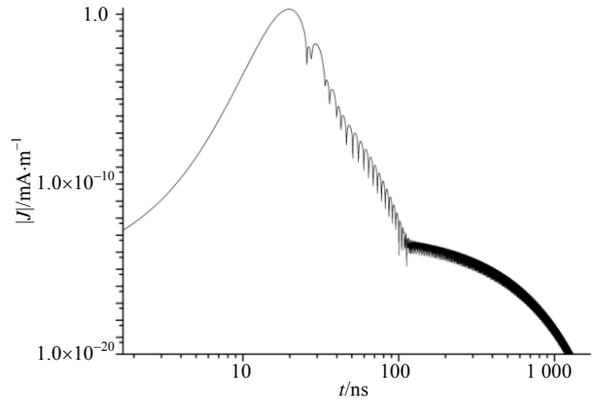
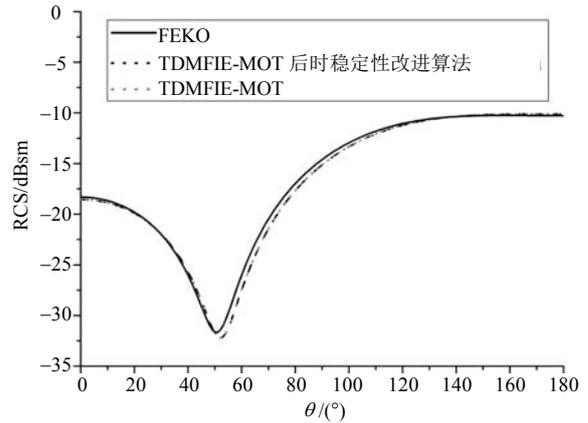
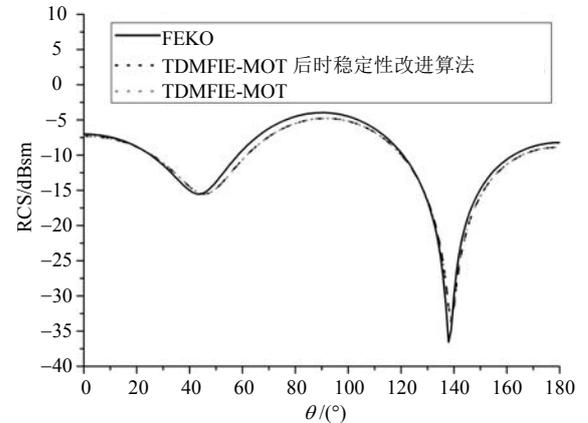


图5 利用基于TDMFIE-MOT算法的后时稳定性改进算法计算的底面半径为0.2 m、高为0.8 m且沿z方向、中心位于原点的圆柱体表面(0.2 m,0,0)处的感应电流大小随时间变化的结果(时间步长为0.3 ns)



a. 频率为100 MHz



b. 频率为200 MHz

图6 利用TDMFIE-MOT算法、后时稳定性改进算法计算的底面半径为0.2 m、高为0.8 m且沿z方向、中心位于原点的圆柱体 XOZ 面的双站RCS与FEKO软件计算结果的对比

从以上两个算例可以看出, 本文提出的后时稳定性改进算法可以确保感应电流后时稳定。在计算目标RCS时, 改进算法的计算精度不低于原算法的计算精度。

5 结 论

本文通过推导得到TDMFIE-MOT 算法的后时稳定性充分必要条件, 即矩阵 \mathbf{A} 的谱半径小于1, 并通过算例验证了上述结论。该条件可以作为时域磁场积分方程时间步进算法稳定性的理论基础, 开展更深层次的研究。根据TDMFIE-MOT算法后时稳定的条件, 本文提出了一种解决由计算误差(矩阵 \mathbf{A} 的谱半径大于1, 但与1非常接近)导致的后时不稳定性的改进算法, 通过算例验证了该改进算法既可以保证感应电流后时稳定, 同时具有更好的计算精度。

参 考 文 献

- [1] SHI Y, JIN J M. A time-domain volume integral equation and its marching-on-in-degree solution for analysis of dispersive dielectric objects[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(3): 969-978.
- [2] WANG Q Q, SHI Y F, ZHANG H H, et al. Size reduction technique for the marching-on-in-order time-domain integral equation method in analysis of transient electromagnetic scattering[J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2012, 6(5): 541-548.
- [3] PRAY A J, NAIR N V, SHANKER B. Stability properties of the time domain electric field integral equation using a separable approximation for the convolution with the retarded potential[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(8): 3772-3781.
- [4] SHANKER B, ERGIN A A, LU M Y, et al. Fast analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using the multilevel plane wave time-domain algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(3): 628-641.
- [5] YILMAZ A E, JIN J M, MICHELSEN E. A fast fourier transform accelerated marching-on in-time algorithm for electromagnetic analysis[J]. Electromagnetics, 2001(21): 181-197.
- [6] RYNNE B P, SMITH P D. Stability of time marching algorithms for the electric field integral equations[J]. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 1990(12): 1181-1205.
- [7] BLUCK M J, WALKER S P. Time-domain BIE analysis of large three dimensional electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997(45): 894-901.
- [8] VECHINSKI D A, RAO S M. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1992(40): 661-665.
- [9] ZHANG G H, XIA M Y, JIANG X M. Transient analysis of wire structures using time domain integral equation method with exact elements[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2009(92): 281-298.
- [10] SHI Y F, XIA M Y, CHEN R S, et al. Stable electric field TDIE solvers via quasi-exact evaluation of MOT matrix elements[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(2): 574-585.
- [11] 赵庆广, 赵延文, 毕海燕, 等. 利用时间步进算法精确稳定求解时域积分方程[J]. 电子学报, 2008, 36(6): 1135-1140.
ZHAO Qing-guo, ZHAO Yan-wen, BI Hai-yan, et al. Accurate and stable solution of time-domain integral equation using marching-on-in-time method[J]. Acta Electronica Sin, 2008, 36(6): 1135-1140.
- [12] LI J Y, ZHAO Y W, NIE Z P. A new memory method of impedance elements for marching-on-in-time solution of time-domain integral equation[J]. Electromagnetics, 2010, 30(5): 448-462.

编辑 税 红