

周期场中片状束输运的非线性行为

李广明¹, 李秀平², 王善进²

(1. 东莞理工学院计算机学院 广东 东莞 523808; 2. 东莞理工学院电子工程学院 广东 东莞 523808)

【摘要】冷腔束流动力学问题是微波器件和太赫兹器件的基本问题。在经典物理学框架内把周期场中片状束的运动方程化为Duffing型Mathieu方程。利用摄动法讨论了系统在 $\nu=1$ 共振线附近的运动行为, 导出了系统频率响应和振幅响应, 揭示了系统的跳跃现象和不稳定性。对线性近似下得到的部分结果进行了修正。

关键词 周期场; 共振; 片状束; 稳定性

中图分类号 TN12

文献标志码 A

doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2015.04.012

Nonlinear Transport Behavior of Sheet-Beam in Periodic Field

LI Guang-ming¹, LI Xiu-ping², and WANG Shan-jin²

(1. School of Computer Science, Dongguan University of Technology Dongguan Guangdong 523808;

2. School of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology Dongguan Guangdong 523808)

Abstract The beam dynamics problem for cold cavity is the basic problems of microwave devices and terahertz devices. The motion equation of the sheet-beam in the periodic field is reduced into Mathieu equation with Duffing-type in the classical physics framework. The motion behavior of the system in the vicinity of the $\nu=1$ resonance is discussed by using perturbed method; the frequency response and the amplitude response for the system are derived; the jumping phenomenon and instability of the system are revealed. The partial results obtained in the linear approximation are modified.

Key words periodic field; resonance; sheet-beam; stability

随着片状束的广泛应用, 冷腔束流动力学的稳定性问题成为人们热点讨论。由于片状束具有电流强度大、高频电场低、能量分散小和易小型化等优点引起了广泛关注。强流技术的关键问题之一是空间电荷效应。半个世纪前, 人们就提出了片状束概念, 并试图利用这一概念把空间电荷效应减至最小。但是, 利用传统聚焦方法系统出现了Diocotron不稳定性。采用周期永久磁场(PPM)使问题得到了消减^[1-10]。美国洛斯阿拉莫斯国家实验室(Los Alamos National Laboratory)的研究小组对该问题进行了讨论^[1-5], 在线性近似下, 把冷腔电子运动方程化为Mathieu方程, 并根据Mathieu方程的稳定性导出了系统的临界条件。由于系统的非线性, 本文进一步考虑了运动阻尼和空间电荷的影响。在经典物理学框架内和小振幅近似下, 把电子运动方程化为广义Mathieu方程。利用摄动法讨论了周期磁场中片状束冷腔束流输运的动力学稳定性。特别是对电子在共振线 $\nu=1$ 附近的行为进行了分析。导出了系统的频

率响应和振幅响应; 揭示了系统的跳跃现象和不稳定行为; 分析了束流稳定传输的临界条件。

1 运动方程

引入直角坐标 (x, y, z) , 假设 z 方向是束流运动方向, x 方向位于水平面内, 而 y 方向与水平面垂直。在这个坐标系中, 摆动场的磁感应强度 \mathbf{B} 可表示为:

$$\mathbf{B} = \nabla \chi_m \quad (1)$$

其中磁势为:

$$\chi_m = \frac{B_w}{k_z} \cosh(k_x x) \cos(k_z z) \times [a \sinh(k_y y) + b \cosh(k_y y)] \quad (2)$$

式中, 波数 $k_z = 2\pi/d$, 且满足 $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$; d 是磁场周期。 $a=1, b=0$ 描述的是摆动场, 而 $a=0, b=1$ 描述的是PPM场。假设高频(RF)场工作在TM模式上, 利用无源Maxwell方程, 3个场分量可分别为:

$$B_x = -\frac{k_x}{k_z} B_w \sinh(k_x x) \cos(k_z z) \times [a \sinh(k_y y) + b \cosh(k_y y)] \quad (3)$$

$$B_y = -\frac{k_y}{k_z} B_w \cosh(k_x x) \cos(k_z z) \times [a \cosh(k_y y) + b \sinh(k_y y)] \quad (4)$$

$$B_z = B_w \cosh(k_x x) \sin(k_z z) \times [a \sinh(k_y y) + b \cosh(k_y y)] \quad (5)$$

当 $k_x = 0$ 时, $B_x = 0$, 三维场退化为二维场, 且 B_y, B_z 与 x 无关, 描写了垂直方向 (y 方向) 的平面聚焦情形; $k_x \neq 0$ 时, 描写了垂直方向和水平方向 (x 方向) 二维聚焦情形。考虑到阻尼和空间电荷的影响, 对于平面聚焦情形, 粒子的垂直运动方程为^[1-2]:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{B_0^2}{k} [a \cosh(ky) + b \sinh(ky)] \times [a \sinh(ky) + b \cosh(ky)] \cos^2(kz) + \frac{\eta \rho}{\varepsilon_0} \frac{r_x}{r_x + r_y} y - 2\mu_0 \frac{dy}{dt} \quad (6)$$

式中, $B_w = B_0$ 是磁感应强度幅值; $k_z = k_y = k$ 是“波数”; ρ 是电荷密度; $\eta = e/m$ 是电子的荷质比; r_x, r_y 分别是椭圆片状束沿 x 方向和 y 方向的半长度和半厚度。令 $\tau = kz = kv_b t$ (v_b 是束流速度), 在小振幅近似下, 电子运动方程式(6)可进一步推导为:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\mu \frac{dy}{d\tau} + (v^2 - 2\varepsilon \cos 2\tau)y - \alpha y^3 = 0 \quad (7)$$

其中, 有:

$$\begin{cases} v^2 = \frac{\omega_0^2}{2k^2 v_b^2} - \frac{\eta \rho}{\varepsilon_0 k^2 v_b^2} \frac{r_x}{r_x + r_y} \\ \varepsilon = \frac{\omega_0^2}{4k^2 v_b^2}; \quad \alpha = -\frac{\omega_0^2}{3v_b^2}; \quad \mu = \frac{\mu_0}{3v_b} \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\omega_0 = \frac{eB_0}{m}$ 是电子回旋频率。

在弱激励(即 ε 为小量)情形下, 如果系统阻尼和非线性也比较弱, 用 ξ 代替 y , 式(7)可改写为:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + (v^2 - 2\varepsilon \cos 2\tau)\xi = \varepsilon(-2\mu \frac{d\xi}{d\tau} - \alpha \xi^3) \quad (9)$$

这是一个带有弱激励、弱阻尼和弱非线性的Duffing型Mathieu方程。

2 线性近似与工作条件的选择

在线性近似和无阻尼($\alpha = \mu = 0$)情况下, 式(9)

推导为标准的Mathieu方程:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + (v^2 - 2\varepsilon \cos 2\tau)\xi = 0 \quad (10)$$

在参数(v^2, ε)平面上, 系统出现了一系列稳定和 unstable 区^[11-12], 如图1所示。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 这些不稳定区退化为一, 且全都落在 $\varepsilon = 0$ 的横轴上, 这些点由方程 $v^2 = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 给出, 并分别称为零阶、一阶和二阶等不稳定区。当 $v = 0, 1, 2, \dots$ 时, 系统存在整数共振, 工程设计应当尽量远离这些共振线。周期磁场中片状束的工作状态可能位于 $v = 1$ 共振线附近。文献[1-2]指出, 只有在零阶和一阶不稳定区之间的三角形区域内, 片状束稳定输运条件才能满足, 并当参数 $v^2 < 0.66$ 时, 系统是稳定的。考虑空间电荷效应, 束流稳定传输条件可表示为 $0 \leq \varepsilon \leq 0.91$, $0 \leq v \leq 1$, $v \leq -1.1\varepsilon + 1$ 。文献[7]将这些条件具体化为:

$$0 \leq \frac{\omega_0^2}{4k^2 v_b^2} \leq 3.64 \quad (11)$$

$$0 \leq \frac{\omega_0^2}{2k^2 v_b^2} - \frac{\eta \rho}{\varepsilon_0 k^2 v_b^2} \frac{r_x}{r_x + r_y} \leq 1 \quad (12)$$

$$\frac{3.1\omega_0^2}{4k^2 v_b^2} - \frac{\eta \rho}{\varepsilon_0 k^2 v_b^2} \frac{r_x}{r_x + r_y} \leq 1 \quad (13)$$

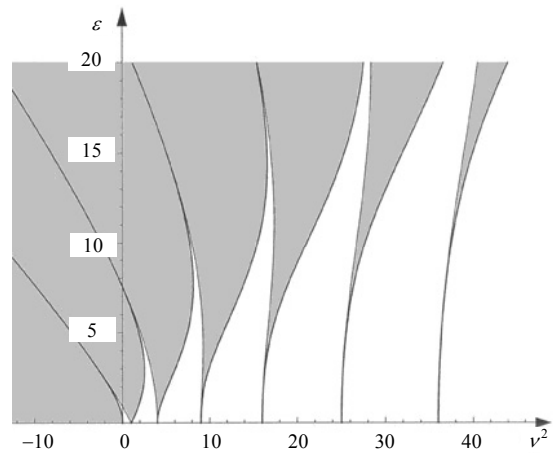


图1 Mathieu方程的稳定与不稳定区(阴影区域)

3 非线性近似与系统稳定性

3.1 非线性近似

线性方程描述了系统的基本特征, $\alpha = \mu = 0$ 的方程是线性方程, 当 $\varepsilon \neq 0$ (或 $\alpha \neq 0, \mu \neq 0$) 时, 由式(9)描述的非线性系统出现了一系列新的特征, 其中包括共振、分叉和混沌等。下面用摄动法讨论系统在 $v = 1$ 共振线附近的运动行为。

3.1.1 摄动解

利用多尺度法^[13-16]讨论非线性和参数激励对系统振幅和相位的影响。令:

$$\xi(\tau, \varepsilon) = \xi_0(T_0, T_1) + \varepsilon \xi_1(T_0, T_1) + \dots \quad (14)$$

式中, $T_0 = \tau$; $T_1 = \varepsilon\tau$ 。将式(14)带入式(9), 令 ε 的同次幂系数相等, 可得:

$$D_0^2 \xi_0 + \nu^2 \xi_0 = 0 \quad (15)$$

$$D_0^2 \xi_1 + \nu^2 \xi_1 = -2D_0 D_1 \xi_0 - 2\xi_0 \cos 2T_0 + f(\xi_0, D_0 \xi_0) \quad (16)$$

其中, 有:

$$f(\xi_0, D_0 \xi_0) = -2\mu \frac{d\xi}{d\tau} - \alpha \xi^3 \quad (17)$$

式(15)的一般解为:

$$\xi_0 = A(T_1) \exp(i\nu T_0) + A^*(T_1) \exp(-i\nu T_0) \quad (18)$$

式(16)变为:

$$\begin{aligned} D_0^2 \xi_1 + \nu^2 \xi_1 = & -2i\nu A' \exp(i\nu T_0) - \\ & A \exp(i(-\nu + 2)T_0) - A^* \exp(-i(-\nu + 2)T_0) + \\ & cc + f[A \exp(i\nu T_0) + A^* \exp(-i\nu T_0), \\ & i\nu(A \exp(i\nu T_0) - A^* \exp(-i\nu T_0))] \end{aligned} \quad (19)$$

式中, 字母右上角一撇表示对 T_1 的微商。为了描写粒子在共振线 $\nu=1$ 附近的行为, 可通过关系 $\nu + \varepsilon\sigma = 1$, 引入解谐参数 σ 。解谐参数 σ 描写系统接近共振线的程度。式(19)中的 $(2-\nu)T_0$ 可表示为:

$$(2-\nu)T_0 = \nu T_0 + 2\varepsilon\sigma T_0 = \nu T_0 + 2\sigma T_1$$

消去式(19)中的久期项, 并利用式(18), 可得:

$$2i\nu A' = -A^* \exp(2i\sigma T_1) + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f \exp(-i\nu T_0) dT_0$$

令 $A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta)$, $\phi = \nu T_0 + \beta$, 带入上式, 并将实部和虚部分开, 可得:

$$a' = -\frac{a}{2\nu} \sin \psi - \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \sin \phi f(a \cos \phi, -\nu a \sin \phi) d\phi \quad (20)$$

$$a\psi' = 2\sigma a - \frac{a}{\nu} \cos \psi +$$

$$\frac{1}{\pi\nu} \int_0^{2\pi} \cos \phi f(a \cos \phi, -\nu a \sin \phi) d\phi \quad (21)$$

式中, $\psi = 2\sigma T_1 - 2\beta$ 。系统的一次近似解可表示为:

$$\xi = a \cos(\nu T_0 + \beta) + O(\varepsilon)$$

式中, a 和 β 由式(20)、式(21)和 $\psi = 2\sigma T_1 - 2\beta$ 给出。

将式(17)代入式(20)和式(21), 完成积分可得:

$$a' = -\frac{a}{2\nu} \sin \psi - \mu a \quad (22)$$

$$a\psi' = 2\sigma a - \frac{a}{\nu} \cos \psi - \frac{3\alpha}{4\nu} a^3 \quad (23)$$

3.1.2 静态解的稳定性

从式(22)、式(23)和式(9)可以看出, 问题已从一个二阶微分方程简化为两个一阶微分方程。虽然降阶了, 由于方程右端依然是两个变量 a 和 ψ 的函数, 要把它积分到最终形式仍然困难。如果关心定常振动, 情况就较简单。对于定常振动, 系统的振幅 a 和相位 ψ 为常数, 即式(22)和式(23)中的 $a' = 0$, $\psi' = 0$ 。可简化为:

$$\begin{cases} \sin \psi = -2\nu\mu \\ \cos \psi = 2\sigma\nu - \frac{3}{4}\alpha a^2 \end{cases} \quad (24)$$

因 $\nu = 1 + \varepsilon\sigma$, 在一级近似下, 将式(24)平方相加, 消去三角函数, 可得^[16]:

$$a = \left[\frac{8\sigma}{3\alpha} \pm \frac{4}{3\alpha} (1 - 4\mu^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (25)$$

引入新变数 $\hat{\sigma} = \varepsilon\sigma$, $\hat{\alpha} = \varepsilon\alpha$, $\hat{\mu} = \varepsilon\mu$, 式(25)可改写为:

$$a = \left[\frac{8\hat{\sigma}}{3\hat{\alpha}} \pm \frac{4}{3\hat{\alpha}} (\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (26)$$

式(25)和式(26)是振幅 a 的二次方程, 要静态解存在振幅 a 必须为实数, 即 $a^2 > 0$ 。这就要求 $2\hat{\mu} < \varepsilon$

和 $\frac{8\hat{\sigma}}{3\hat{\alpha}} \pm \frac{4}{3\hat{\alpha}} (\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} > 0$ 。前者意味着只有激励振幅大于衰减强度时, 系统才可能存在稳定解; 后者

意味着当 $\hat{\sigma} > \frac{1}{2} (\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2}$ 时, 系统存在两个静态解, 而当 $|\hat{\sigma}| < \frac{1}{2} (\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2}$ 时, 则只有一个静态解存在。

3.1.3 系统响应

1) 频率响应

图2给出了系统振幅与频率之间的关系(频率响应曲线或共振曲线)。实线和虚线分别表示系统的稳定解和不稳定解。从图2可以看出, 共振曲线向右弯曲, 当激励强度 ε 保持不变, 激励频率 $\hat{\sigma}$ 从小到大或从大到小变化时系统出现了跳跃现象。当 $\hat{\sigma}$ 从小到大于点 A_1 和点 A_2 之间时, 系统只有一个(稳定的)平凡解存在; 从点 A_2 开始, 系统存在两个解(分叉), 一个是稳定的静态解, 另一个是不稳定的平凡解; 当 $\hat{\sigma}$ 增加时, 系统将沿着曲线 $A_2 A'_3$ 变化直到无穷。相反, 当 $\hat{\sigma}$ 从大到小变化时, 系统将沿着 $E A_3$ 变化, 平凡解是稳定的。在 A_3 点平凡解变得不稳定, 当 $\hat{\sigma}$ 继续减小时系统发生突变, 并从 A_3 跳到 A'_3 ; 当 $\hat{\sigma}$ 继续减小时, 系统将沿曲线 $A'_3 A_2$ 变化, 直到 A_2 点; 当 $\hat{\sigma}$ 再继续减小时, 系统回到初始

的平凡解状态。

当系统通过分叉和跳跃回到原来状态的过程是不可逆的。这种不可逆性正好揭示了系统的弛豫行为。弛豫现象在自然界中普遍存在，在光电子技术中也经常碰到，双稳态光电子器件便是典型例子。对于微波器件跳跃应当尽量避免。因为跳跃就意味着不稳定。文献[17]表明，系统从点 A_2 开始出现倍

分叉，并通过级联分叉进入混沌状态。为了保证束流的动力学稳定性，分叉和混沌是不允许存在的。因系统的稳定性与参数有关，适当调整参数系统稳定性就可得到改善。事实上，从式(25)和式(26)可以看出，系统响应与系统阻尼、非线性大小、激励强度和离开共振线的程度等因素有关，适当调节这些参数，就可提高系统稳定性。

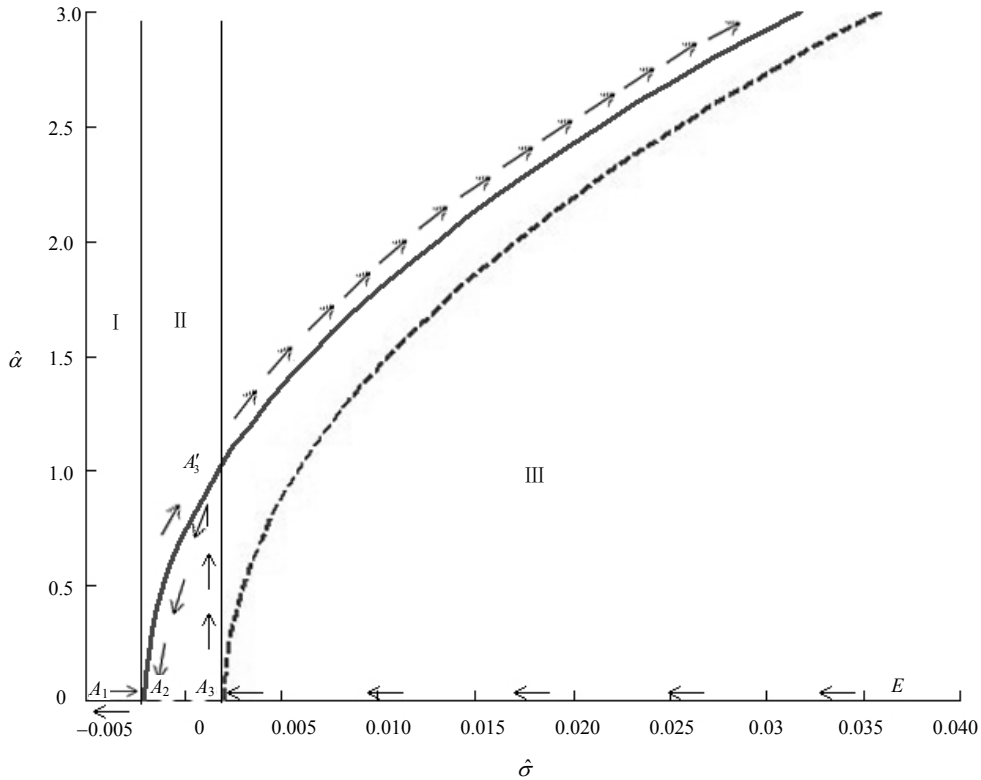


图2 Duffing型参数激励系统的频率响应曲线

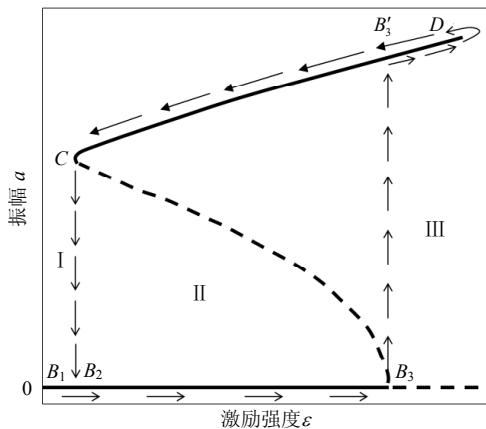


图3 Duffing型参数激励系统的振幅响应曲线示意图

2) 振幅响应。图3给出了系统的振幅响应曲线。从图3可以看出系统存在多值(分叉)和跳跃现象。当 ϵ 从小到大变化，状态位于 B_1 和 B_2 之间时，系统只有稳定的平凡解存在；在 B_2 和 B_3 之间时，除了稳定

的平凡解外，还存在两个静态解(分叉)，振幅较大的一个稳定(实线)，较小的一个不稳定(虚线)。离开 B_3 平凡解变得不稳定，系统只存在一个稳定的静态解。当 ϵ 继续增加，状态发生突变(从 B_3 跳到 B_3')，并将沿着曲线 $B_3' D$ 继续变化，直至无穷。相反，当 ϵ 从大到小变化时，系统将沿着 $D B_3' C$ 变化，直到 C 点；当 ϵ 继续减小时，系统发生突变(从 C 点跳跃到 B_2 点)，且沿着 $B_2 B_1$ 继续变化。系统回到初始的平凡解状态。

以上分析表明，当激励振幅(强度)从小到大和从大到小变化时，系统将通过分叉和跳跃回到原来状态，但过程不可逆。这种不可逆也正好揭示了系统振幅与激励强度之间的弛豫行为。图3给出了 $|\sigma| = \frac{1}{2}(1 - 4\mu^2)^{1/2}$ 时的响应曲线。当 $|\sigma|$ 增加时， C 点向 B_3 点靠近，多值区域减小，跳跃现象消失，即随

着 $|\sigma|$ 值增加, 系统越来越远离共振区域, 非线性影响变弱, 系统回到线性状态。

3.2 工作条件的选择

考虑到激励强度、运动阻尼和非线性时, 系统的稳定性与片状束工作点离开 $\nu=1$ 共振线的距离 $\hat{\sigma}$ 有关, 有:

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} > \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} & \text{稳定} \\ = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} & \text{临界} \\ < \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} & \text{不稳定} \end{cases} \quad (27)$$

式(27)表明, 仅当 $\hat{\sigma} > \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2}$ 时, 系统才是稳定的。于是, 周期场中片状束稳定传输条件式(12)和式(13)修改为:

$$0 \leq \frac{\omega_0^2}{2k^2v_b^2} - \frac{\eta\rho}{\varepsilon_0k^2v_b^2} \frac{r_x}{r_x + r_y} \leq 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 4\mu^2)^{1/2} \quad (28)$$

$$\frac{3.1\omega_0^2}{4k^2v_b^2} - \frac{\eta\rho}{\varepsilon_0k^2v_b^2} \frac{r_x}{r_x + r_y} \leq 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 4\mu^2)^{1/2} \quad (29)$$

文献[6]指出, 要保证片状束的稳定输运, 它的Betatron振动频率 ν 可以位于 $0 \leq \nu \leq 1$ 范围内, 即可选择 $\nu=0$ 或 $\nu=1$ 。本文指出不管系统是线性还是非线性, ν 都不能等于零或1。因为 $\nu=0$ 的系统是聚焦为零的系统, 而 $\nu=1$ 的系统是处于共振状态的系统。本文分析表明, 仅当条件式(28)和式(29)满足时, 系统才是稳定的。

4 结 论

在经典物理学框架内和小振幅近似下, 考虑到电子的运动阻尼和系统非线性, 把周期场中片状束的电子运动方程化为Duffing型的Mathieu方程。用摄动法分析了电子在 $\nu=1$ 共振线附近的运动行为。结果表明, 系统的频率响应和振幅响应存在分叉和跳跃, 揭示了系统的不可逆性、不稳定性和弛豫特征; 导出了片状束稳定传输的临界条件; 修正了线性近似下得到的部分结果; 指出了只需适当调节参数, 系统的稳定性在原则上可以得到保证。

参 考 文 献

[1] CARSTEN B E, EARLEY L M, KRAWCZYK F L, et al. Stability of an emittance-dominated sheet-electron beam in planar wiggler and periodic permanent magnet structures with natural focusing[J]. Phys Rev STAB, 2005(8): 062001-062005.
 [2] CARSTEN B E, EARLEY L M, KRAWCZYK F L, et al. Stable two-plane focusing for emittance-dominated sheet-beam transport[J]. Phys Rev STAB, 2005(8):

062002-062007.
 [3] HUMPHRIES S, RUSSELL S, CARSTEN B E, et al. Circular-to-planar transformations of high-perveance electron beams by asymmetric solenoid lenses[J]. Phys Rev STAB, 2003(7): 060401-060405.
 [4] RUSSELL S J, WANG Z F, HAYNES W B, et al. First observation of elliptical sheet beam formation with an asymmetric solenoid lens[J]. Phys Rev STAB, 2005(8): 080401-080406.
 [5] BRINKMAN R, DERBENEV Y, FLOTTMAN K. A low emittance, flat-beam electron source for linear colliders[J]. Phys Rev STAB, 2001(4): 053501-053507.
 [6] BOOSKE J H, BRIAN D M. Stability and confinement of nonrelativistic sheet electron beams with periodic cusped magnetic focusing[J]. J Appl Phys, 1993, 73(9): 4140-4144.
 [7] WANG Z L, GONG Y B, WEI Y Y. The conditions for stable sheet electron beams transport in periodic permanent magnet fields[J]. Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves, 2010, 31(6): 649-658.
 [8] BOOSKE J H. Plasma physics and related challenges of millimeter-wave to terahertz and high power microwave generation[J]. Physics of Plasmas, 2008(15): 055502-055506
 [9] 肖仁珍, 腾雁, 宋志敏, 等. 速调型相对论反波管理论研究[J]. 强激光与粒子束, 2012, 24(3): 747-751.
 XIAO Ren-zhen, TENG Yan, SONG Zhi-min, et al. Theoretical study of Klystron-like relativistic backward wave oscillator[J]. High Laser and Particle Beams, 2012, 24(3): 747-751.
 [10] 刘盛纲. 太赫兹科学技术的发展[J]. 中国基础科学, 2006, 8(1): 7-12.
 LIU Sheng-gang. Recent development of Terahertz science and technology[J]. China Basic Science, 2006, 8(1): 7-12.
 [11] 刘慧杰, 罗诗裕, 邵明珠. 高频电压调制对同步运动的影响[J]. 原子核物理评论, 2011, 28(2): 191-195.
 LIU Hui-jie, LUO Shi-yu, SHAO Ming-zhu. The effect on synchrotron motion by modulation of high frequency voltage[J]. Nucl Phys Rev, 2011, 28(2): 191-195.
 [12] 张梅, 罗晓华, 邵明珠, 等. 晶体摆动场的辐射衰减与能量增益[J]. 发光学报, 2010, 31(3): 454-458.
 ZHANG Mei, LUO Xiao-hua, SHAO Ming-zhu, et al. The radiation attenuation and energy gain for crystalline undulator field[J]. Chinese Journal of Luminescence, 2010, 31(3): 454-458.
 [13] NAYFEH A H. Introduction to perturbation techniques[M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.
 [14] LUO Xiao-hua, HE Wei, SHAO Ming-zhu, et al. Crystalline undulator radiation and possibility as short wavelength laser[J]. Chin Phys B, 2013, 22(6): 064210-1-4.
 [15] 罗晓华, 罗诗裕. 三束储存与电子同步运动的动力学稳定性[J]. 中国科学: 物理学, 力学和天文学, 2014, 44(2): 169-175.
 LUO Xiao-hua, LUO Shi-yu. Three-beam storage and dynamical stability of electron synchronized motion in storage rings[J]. Sci Chin Physics: Mechanics & Astronomy, 2014, 44(2): 169-175.
 [16] NAYFEH A H, MOOK D T. Nonlinear oscillations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.
 [17] 罗晓华. Schrodinger方程的一般解与超晶格多量子阱的电子跃迁[J]. 物理学报, 2014, 63(1): 017302-017306.
 LUO Xiao-hua. General solution of Schrodinger equation and electron transition in superlattice multi-quantum well [J]. Chin Phys Soc, 2014, 63(1): 017302-017306.