

# I<sup>2</sup>控制Buck变换器的一阶动力学分析

周群<sup>1</sup>, 徐懿<sup>1</sup>, 张金保<sup>2</sup>, 宁佳<sup>1</sup>, 曾雪洋<sup>1</sup>

(1. 四川大学电气信息学院 成都 610065; 2. 国电光伏有限公司 江苏 宜兴 214203)

**【摘要】**通过降阶处理,建立了I<sup>2</sup>控制Buck变换器的一阶离散映射迭代模型,研究了该模型的非线性动力学行为。通过分析检测电阻 $R_s$ 和误差放大器比例系数 $k_1$ 为变量参数的分岔图,研究了系统从稳定周期1进入倍周分岔,从连续导电模式(CCM)鲁棒混沌进入断续导电模式(DCM)阵发混沌的动力学行为。通过 $R_s-V_o$ 和 $k_1-V_o$ 参数空间分析和离散迭代映射空间分析,得到了稳定性和工作模式的变化情况,验证了理论分析的正确性。

**关键词** 稳定分析; 混沌; 离散映射模型; 一阶模型; 开关DC-DC变换器

**中图分类号** TM77 **文献标志码** A **doi**:10.3969/j.issn.1001-0548.2016.02.013

## One-Dimensional Dynamic Analysis of I<sup>2</sup> Controlled Buck Converter

ZHOU Qun<sup>1</sup>, XU Yi<sup>1</sup>, ZHANG Jin-bao<sup>2</sup>, NING Jia<sup>1</sup>, and ZENG Xue-yang<sup>1</sup>

(1. Institute of electrical information, Sichuan University Chengdu 610065; 2. GD SOLAR CO., LTD. Yixing Jiangsu 214203)

**Abstract** After dimension reduction, the I<sup>2</sup> controlled buck converter is studied and its one-dimensional discrete iterative map model is established in this paper. Based on the model, the nonlinear dynamic characteristics of the I<sup>2</sup> controlled buck converter is studied. Through the bifurcation analysis with the variations sensing resistance  $R_s$  and proportional coefficient  $k_1$  of error amplifier, the operation states from the stable period-1 to the period-double bifurcation and from the robust chaos in continuous conduction mode (CCM) to the intermittent chaos in discontinuous conduction mode (DCM) are studied. Through analysis of  $R_s-V_o$  and  $k_1-V_o$  parameter spaces and discrete-time iterative mappings, the stability and operation mode transitions can be studied, the correctness of the theoretical analysis can be verified.

**Key words** analysis of stability; chaos; discrete map model; one-dimensional model; switched DC-DC converter

开关DC-DC变换器作为非线性时变系统的一种典型,运行状态非常复杂。近年来,通过对开关DC-DC变换器的非线性动力学研究,其非线性现象及其产生机理<sup>[1-11]</sup>被人们所认识,为工程设计和应用提供了可靠的理论依据。

综合了峰值电流和平均电流控制<sup>[5,8-12]</sup>的优点,文献[13]提出了I<sup>2</sup>平均电流控制技术,实现了快速、准确的电流控制。本文研究的I<sup>2</sup>控制实质为输出恒压的电流控制技术,控制电路采用一个电压外环反馈和两个电流内环反馈,进行三环反馈控制,其中两个电流反馈分别作为电流误差反馈信号和PWM调制信号。I<sup>2</sup>控制Buck变换器引入了电压误差反馈增益,使其能够控制输出电压,实现过压和欠压保护;引入了电感电流误差反馈增益,使其能够控制电感电流,实现过流保护;直接引入电感电流作为PWM

调制信号,使其具有较快的响应速度。

文献[13]提出I<sup>2</sup>控制Buck变换器拓扑,并建立了小信号等效模型,但没有对I<sup>2</sup>控制Buck变换器的非线性动力学特性进行研究。本文建立了I<sup>2</sup>控制Buck变换器一阶等效离散迭代模型,研究了其动力学特性。以检测电阻 $R_s$ 和比例系数 $k_1$ 作为变量参数,利用数值仿真软件MATLAB进行分岔分析<sup>[6-11]</sup>;通过工作状态域分析<sup>[8-10]</sup>,验证了分岔分析的正确性。

### 1 I<sup>2</sup>控制Buck变换器一阶模型

#### 1.1 工作原理

图1a为I<sup>2</sup>控制Buck变换器的工作原理图,主电路由输入电压源 $V_g$ 、开关管S、二极管D、电感L、电容C(含等效串联电阻 $r$ )和负载R构成。

图1b为工作于CCM模式下I<sup>2</sup>控制Buck变换器的

稳态工作波形。输出电压  $v_o$  与基准电压  $V_{ref}$  经误差放大器1得到误差信号  $v_{k1}$ ， $v_{k1}$  与电感电流检测电阻  $R_s$  两端电压  $v_s$  经误差放大器2得到误差信号  $v_{k2}$ ， $v_{k2}$  与  $v_s$  通过比较器得到控制开关管S导通与关断的PWM信号。当  $r$  较大时，输出电压纹波与电感电流纹波的变化趋势相同。在每一个开关周期开始时刻，时钟信号使RS锁存器置位，开关管S导通，续流二极管D关断，电感电流  $i_L$  和输出电压  $v_o$  上升。当  $v_{k2}$  与  $v_s$  相等时，比较器输出高电平，使锁存器复位，开关管S关断，二极管D导通，输出电压  $v_o$  与电感电流  $i_L$  下降，直到下一个时钟使开关管S导通。

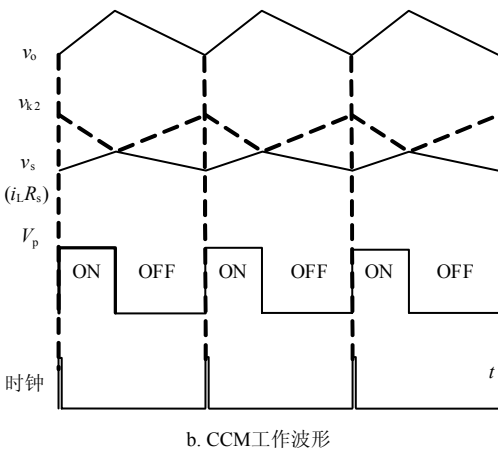
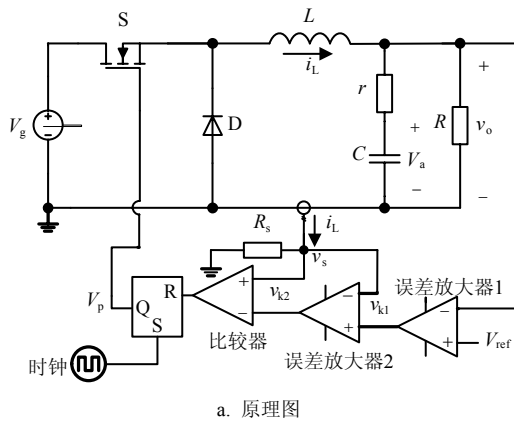


图1  $I^2$ 控制Buck变换器

1.2 工作模式

为简化系统建模，本文只考虑误差放大器的比例环节。当开关频率远高于Buck变换器的特征频率时，可以认为在一个开关周期内电容电压  $V_c$  恒定，即把  $V_c$  当作直流电压源。经简化处理，原有的高阶系统等效为只含有电感电流一个状态变量的一阶系统。负载  $R$  往往远大于  $r$ ， $r$  上产生的电压纹波即为输出电压的纹波。由于  $r$  很小， $i_L$  在  $r$  上产生的电压较小，可以近似认为输出电压平均值  $V_o$  等于输出电容电压  $V_c$ 。把电容电压  $V_c$  和电感电流  $i_L$  分别看作给负

载供电的两个独立电源，则输出电压  $v_o = V_a + i_L r$ ，其中， $V_a = V_c R / (r + R)$ 。

图2给出了电感电流  $i_L$  纹波的一阶线性等效波形。开关管S导通时， $i_L$  线性上升；开关管S关断时， $i_L$  线性下降。在不同的工作模式下，Buck变换器有不同的  $i_L$  波形。当Buck变换器工作于CCM模式时， $i_L$  始终大于零，如图2a所示(其中  $i_n$  为上周期结束时的电感电流， $I_k$  为控制电流)；在DCM模式时，如图2b所示， $i_L$  下降到零后将持续为零，直到下一个时钟周期的开始。

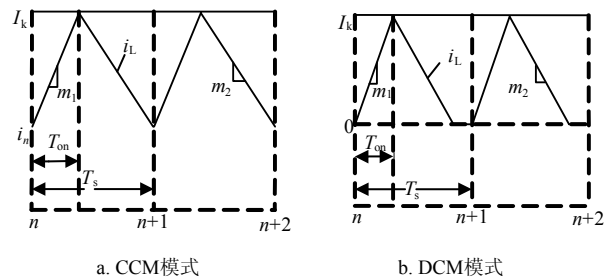


图2 电感电流纹波图

在开关管S导通和关断期间，电感电流  $i_L$  的上升斜率  $m_1$  和下降斜率  $m_2$  分别为：

$$m_1 = \frac{V_g - V_o}{L}, \quad m_2 = -\frac{V_o}{L} \tag{1}$$

1.3 开关切换条件

如图1a所示，误差信号  $v_{k1}$  和  $v_{k2}$  分别为：

$$v_{k1} = k_1 (V_{ref} - v_o) \tag{2}$$

$$v_{k2} = k_2 (v_{k1} - v_s) \tag{3}$$

式中， $k_1$  和  $k_2$  是误差放大器1和误差放大器2的比例系数； $v_s = i_L R_s$ 。

当导通时间  $T_{on}$  小于时钟周期  $T_s$  时， $v_{k2}$  与  $v_s$  通过比较器得到翻转信号。在开关管S切换时有：

$$i_L R_s = v_{k2} \tag{4}$$

把  $v_o$  代入式(2)，结合式(2)~式(4)，可得开关切换条件为：

$$i_L = I_k = -\frac{k_1 k_2 (V_a - V_{ref})}{R_s + k_2 (R_s + k_1 r)} \tag{5}$$

式中， $I_k$  为开关状态切换时的电感电流，即控制电流。当Buck变换器的电感电流  $i_L$  上升到  $I_k$  时，开关状态发生切换。从式(5)可以看出，控制电流  $I_k$  随电路参数变化而变化。

1.4 电感电流边界

在CCM模式下工作的  $I^2$  控制Buck变换器，只有一个电感电流边界  $I_{b1}$ ；处于DCM模式时，有两个电感电流边界  $I_{b1}$ 、 $I_{b2}$ 。定义电感电流边界  $I_{b1}$  为开关

导通一个开关周期  $T_s$  后, 检测电阻  $R_s$  两端电压  $v_s$  与误差信号  $v_{k2}$  相等时, 开关周期开始时的电感电流, 如图3a所示; 定义电感电流边界  $I_{b2}$  为时钟周期结束时刻电感电流下降到零时, 时钟周期开始时的电感电流, 如图3b所示。

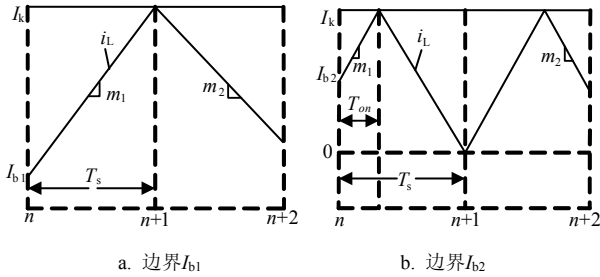


图3 电感电流边界

当导通时间  $T_{on}$  小于时钟周期  $T_s$  时, 结合式(5), 由两边界的定义可得:

$$I_{b1} = -m_1 T_s + \chi_1 (V_a - V_{ref}) \quad (6)$$

$$I_{b2} = -m_1 T_s + \chi_2 (V_a - V_{ref}) \quad (7)$$

式中,

$$\chi_1 = -\frac{k_1 k_2}{R_s (k_2 + 1) + k_1 k_2 r}$$

$$\chi_2 = -\frac{k_1 k_2 (m_1 + m_2) (V_a - V_{ref})}{(R_s + k_2 R_s + k_1 k_2 r) m_2}$$

从式(6)和式(7)可以看出,  $I_{b1}$  和  $I_{b2}$  随电路参数的变化而变化。

### 1.5 一阶离散迭代模型

采用频闪映射<sup>[7]</sup>建立  $I^2$ 控制Buck变换器的离散迭代模型。将  $nT_s$  时刻输出电压和电感电流的采样值设为  $v_n = v_o(nT_s)$  和  $i_n = i_L(nT_s)$ ;  $(n+1)T_s$  时刻输出电压和电感电流的采样值设为  $v_{n+1} = v_o[(n+1)T_s]$  和  $i_{n+1} = i_L[(n+1)T_s]$ 。在一个开关周期  $T_s$  内, 不同的条件下  $I^2$ 控制Buck变换器存在不同的运行轨道:

1) 当  $i_n \leq I_{b1}$  时, 在一个开关周期内, 开关管S一直导通,  $v_o$  与  $i_L$  增大, 有:

$$i_{n+1} = i_n + m_1 T_s \quad (8)$$

$$v_{n+1} = V_a + r i_n + r m_1 T_s \quad (9)$$

2) 当  $I_{b1} < i_n < I_{b2}$  时, Buck变换器工作于CCM模式。  $i_L$  上升到  $I_k$  时, 开关管S从导通状态进入关断状态,  $v_o$  与  $i_L$  下降, 直到开关周期结束, 有:

$$i_{n+1} = i_L(nT_s + T_{on}) - m_2 (T_s - T_{on}) \quad (10)$$

$$v_{n+1} = V_a + r i_L(nT_s + T_{on}) - r m_2 (T_s - T_{on}) \quad (11)$$

3) 当  $I_{b2} \leq i_n < I_k$  时, Buck变换器进入DCM工作模式,  $i_L$  下降到零,  $v_o$  下降到  $V_a$ , 并维持到下一个开关周期的开始, 有:

$$i_{n+1} = 0 \quad (12)$$

$$v_{n+1} = V_a \quad (13)$$

4) 当  $i_n \geq I_k$  时, 控制回路中比较器输出高电平, 锁存器不能被当前周期的时钟信号置位, 开关管S一直关断,  $i_L$ 、 $v_o$  一直下降, 有:

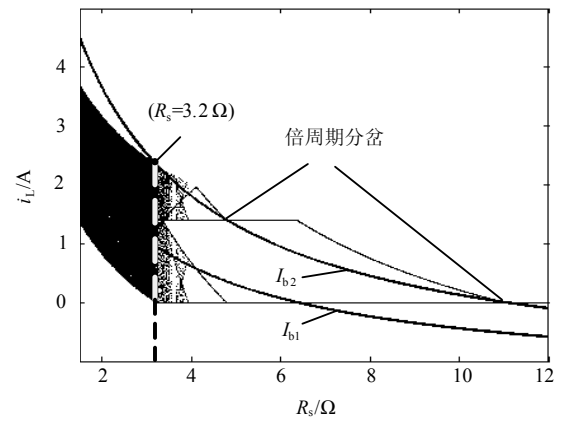
$$i_{n+1} = i_n - m_2 T_s \quad (14)$$

$$v_{n+1} = V_a + r i_n - r m_2 T_s \quad (15)$$

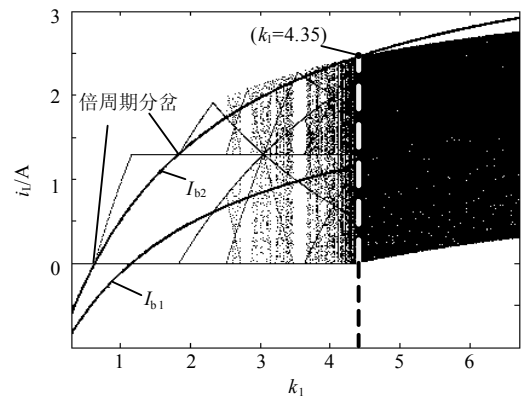
容易证明式(8)~式(15)在两个边界处是连续的。

## 2 分岔分析

基于  $I^2$ 控制Buck变换器的离散迭代模型, 利用MATLAB数值仿真软件, 以检测电阻  $R_s$  和比例系数  $k_1$  为分岔参数, 研究  $I^2$ 控制Buck变换器的动力学行为。电路参数为  $V_g = 7.5 \text{ V}$ ,  $V_{ref} = 5 \text{ V}$ ,  $L = 100 \mu\text{H}$ ,  $C = 3\ 000 \mu\text{F}$ ,  $r = 0.05 \Omega$ ,  $R = 3 \Omega$ ,  $k_1 = 30$ ,  $k_2 = 30$ ,  $R_s = 0.1 \Omega$ ,  $T_s = 50 \mu\text{s}$ 。



a. 分岔参数  $R_s$



b. 分岔参数  $k_1$

图4  $R_s$ 和 $k_1$ 为参数的分岔图

图4a为以检测电阻  $R_s$  为分岔参数的分岔图,  $V_o = 4.7 \text{ V}$ 、 $R_s = 1.5 \sim 12 \Omega$ 。当  $R_s = 12 \Omega$  时, Buck变换器运行在DCM工作模式。随着  $R_s$  的减小, 在  $R_s = 11 \Omega$  时, Buck变换器的运行轨道与  $I_{b2}$  碰撞, Buck变换器从稳定周期1进入周期2运行轨道; 周期2运行轨道在  $R_s = 6.36 \Omega$  时与  $I_{b1}$  碰撞折叠, 在

$R_s=4.79\ \Omega$ 时与边界  $I_{b2}$  碰撞分岔后, 形成周期4分岔运行轨道; 周期4运行轨道在  $R_s=4.11\ \Omega$ 时与  $I_{b1}$  碰撞折叠。随着  $R_s$  减小, 运行轨道形成DCM阵发混沌, 在  $R_s=3.2\ \Omega$ 时与边界  $I_{b2}$  碰撞, 形成CCM鲁棒混沌,  $R_s=3.2\ \Omega$ 为混沌状态转变的分界点。

图4b为以误差放大器1比例系数  $k_1$  为分岔参数的分岔图,  $V_o=4.9\ \text{V}$ 、 $k_1=0.3\sim 6.7$ 。当  $k_1=0.3$ 时, 系统处于DCM工作模式。随着  $k_1$  的增大, 在  $k_1=0.64$ 时, 稳定的周期1运行轨道与边界  $I_{b2}$  发生碰撞, 形成周期2运行轨道; 周期2运行轨道在  $k_1=1.16$ 时与边界  $I_{b1}$  碰撞折叠, 在  $k_1=1.84$ 时与边界  $I_{b2}$  碰撞, 形成周期4运行轨道, 在  $k_1=2.33$ 时与边界  $I_{b1}$  碰撞折叠。随着  $k_1$  的增大, Buck变换器的运行轨道形成DCM阵发混沌, 在  $k_1=4.35$ 时与边界  $I_{b2}$  碰撞, 形成CCM鲁棒混沌,  $k_1=4.35$ 为混沌状态转变的分界点。

从图4看出, 可以通过调节  $I^2$ 控制Buck变换器控制回路中的  $R_s$  和  $k_1$  转变系统的运行状态。在一定的范围内, 减小  $R_s$  或者增大  $k_1$  可以使电路的运行状态由DCM阵发混沌转变为CCM鲁棒混沌; 增大  $R_s$  或者减小  $k_1$  可以使系统由混沌状态返回稳定运行状态。 $I^2$ 控制与  $V^2$ 控制比较, 多引入了电流控制。从混沌状态的变化特性可以看出,  $I^2$ 控制可以通过控制检测电阻  $R_s$  控制系统的状态变化, 拓宽系统的稳定性。

### 3 工作状态域分析

变换器的稳定性分析只有在  $I_{b2} > i_n > I_{b1}$ 时才有意义<sup>[6,8-9]</sup>。根据  $i_L$  与  $v_o$  的关系, 可知系统只有  $i_L$  一个状态变量。由式(10)可得  $I^2$ 控制Buck变换器的特征根为:

$$\lambda = \frac{\partial i_{n+1}}{\partial i_n} = -\frac{m_2}{m_1} \quad (16)$$

为了使  $I^2$ 控制Buck变换器工作于周期1, 必须使  $|\lambda| < 1$ 。当  $\lambda$  从  $-1$  穿出此区域时, 系统发生倍周期分岔现象。 $\lambda=-1$ 时, 把式(1)代入式(16), 可得:

$$V_o = 0.5V_g \quad (17)$$

$I^2$ 控制Buck变换器发生CCM至DCM的工作模式转移是由边界碰撞分岔行为所引起。从图4中两个分岔图也可以看出, 当运行轨道与边界  $I_{b2}$  发生碰撞时, 系统从DCM阵发混沌态进入CCM鲁棒混沌态。此时电感电流  $i_L$  处于最大值, 满足条件方程:

$$I_{b2} = i_{n,\max} = I_k \quad (18)$$

将式(5)、式(7)代入式(18), 可得:

$$(V_g - V_o) \frac{\eta_2 T_s + \eta_3 V_{\text{ref}} + \eta_4}{\eta_1} = 0 \quad (19)$$

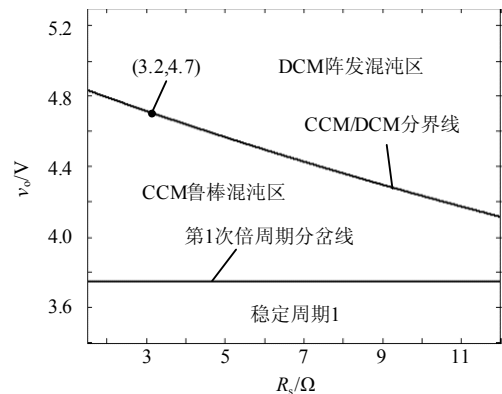
式中,

$$\eta_1 = L(R+r)(R_s V_o + k_2 R_s V_o + V_g k_1 k_2 - k_1 k_2 V_o)$$

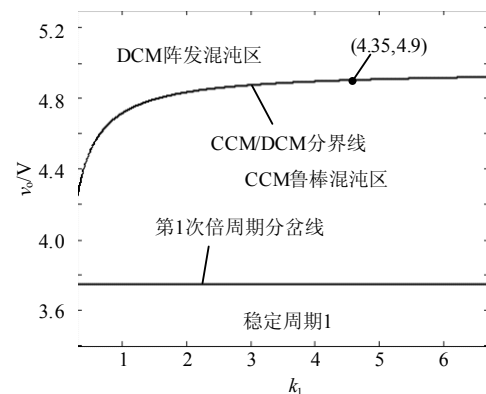
$$\eta_2 = V_o(R+r)(R_s + k_2 R_s) + V_o k_1 k_2 r(R+1)$$

$$\eta_3 = -(R+r)k_1 k_2 L, \quad \eta_4 = k_1 k_2 L R V_o$$

选取与分岔分析相同的参数, 由式(17)和式(19)确定的临界条件, 可以得到  $R_s - V_o$  和  $k_1 - V_o$  为参数空间的参数域, 如图5所示。参数空间表明系统工作模式是随参数的变化而变化的。图5可以看出两条边界把系统的运行状态分为3个状态区域, 稳定周期1、CCM鲁棒混沌区和DCM阵发混沌区。由图5a可以看出, 当  $V_o=4.7\ \text{V}$ 时,  $R_s=3.2\ \Omega$ 为图4a中DCM阵发混沌态与CCM鲁棒混沌态的分界点; 由图5b可得, 当  $V_o=4.9\ \text{V}$ 时,  $k_1=4.35$ 为图4b中DCM阵发混沌态与CCM鲁棒混沌态的分界点。对比分析, 证明了分岔分析的正确性。



a.  $R_s - V_o$ 参数空间



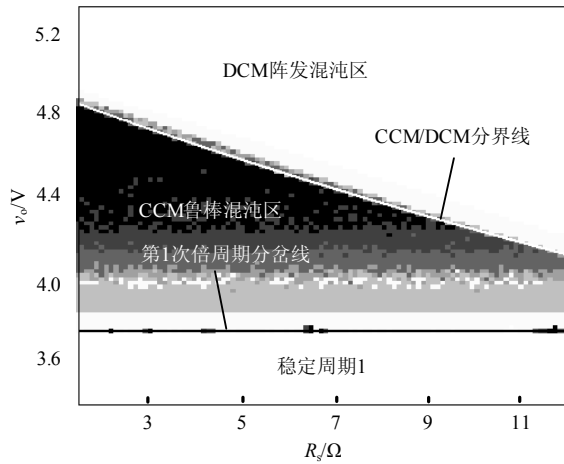
b.  $k_1 - V_o$ 参数空间

图5 工作状态域分布

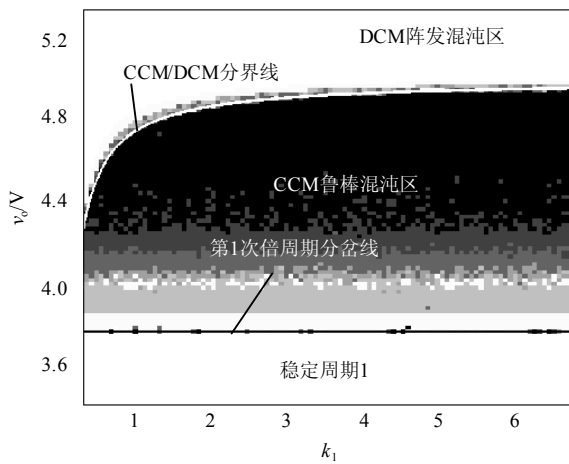
选取  $I^2$ 控制Buck变换器的输出电压  $V_o$ 、检测电阻  $R_s$  和误差放大器1比例系数  $k_1$  为可变参数, 利用参数空间离散迭代映射图, 进行  $I^2$ 控制Buck变换器的动力学研究。根据图4参数的选取, 分别选择两组

相同的参数变量, 变化范围为:  $R_s=1.5\sim 12\ \Omega$ ,  $V_o=3.4\sim 5.3\ \text{V}$ 及 $k_1=0.3\sim 6.7$ ,  $V_o=3.4\sim 5.3\ \text{V}$ 。

由式(8)~式(15)所描述的 $I^2$ 控制Buck变换器的离散迭代映射方程, 可得如图6a和图6b所示 $R_s-V_o$ 和 $k_1-V_o$ 参数空间上的参数空间映射图。图6中, 使用不同的黑白灰度表示相应的周期数, 在两参数平面中绘映射点时, 用白色和灰度较浅区域表示低周期, 黑色和灰度较深区域表示高周期, 周期数越大则灰度越深。为了图象的清晰表达, 图6中给出了两条分界线划分不同状态的边界, CCM/DCM分界线以上为DCM阵发混沌区。对比图5和图6可以看出, 状态变化一致, 状态域分析正确。



a.  $R_s-V_o$ 映射空间



b.  $k_1-V_o$ 映射空间

图6 离散迭代映射空间

### 4 结论

基于 $I^2$ 控制Buck变换器, 研究了其一阶等效动力学建模和分岔行为。通过MATLAB建模仿真, 进行了分岔分析; 根据离散迭代模型和边界碰撞情况, 分析了参数空间和离散迭代映射空间。

本文建立了以电感电流边界的一阶离散模型; 由动力学分析可得, 系统存在稳定周期1、周期2、周期4、CCM鲁棒混沌和DCM阵发混沌, 通过调节控制回路可以有效地调节系统的稳定性; 与 $V^2$ 控制相比,  $I^2$ 控制可以通过调节电流反馈拓宽系统的稳定性。本文以 $I^2$ 控制Buck变换器的工作原理出发研究其动力学形为, 对 $I^2$ 控制Buck变换器的理论分析和优化设计有重要的理论与实践价值。

### 参 考 文 献

- [1] TSE C K, BERNARDO M D. Complex behavior in switching power converters[J]. Proceeding of IEEE, 2002, 90(5): 768-781.
- [2] BAO B, ZHOU G, XU J, et al. Unified classification of operation-state regions for switching converters with ramp compensation[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2011, 26(7): 1968-1975.
- [3] MANDAL K, BANERJEE S, CHAKRABORTY C, et al. Bifurcations in frequency controlled load resonant DC-DC converters[C]//2012 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. [S.l.]: IEEE, 2012: 1135-1138.
- [4] SAJID I, MASOOD A, SUHAIL A Q. Investigation of chaotic behavior in DC-DC converters[J]. Int Journal of Electrical, Computer and Systems Engineering, 2007, 3: 166-169.
- [5] GIAOURIS D, BANERJEE S, IMRAYED O, et al. Complex interaction between tori and onset of three-frequency quasi-periodicity in a current mode controlled Boost converter[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I; Regular Papers, 2012, 59(1): 207-214.
- [6] 何圣仲, 周国华, 许建平, 等.  $V^2$ 控制Buck变换器等效建模与分岔分析[J]. 物理学报, 2013, 62(11): 110503. HE Sheng-zhong, ZHOU Guo-hua, XU Jian-ping, et al. Equivalent modeling and bifurcation analysis of  $V^2$  controlled buck converter[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(11): 110503.
- [7] 张波, 李萍, 齐群. DC-DC变换器分叉和混沌现象的建模和分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(11): 81-86. ZHANG Bo, LI Ping, QI Qun. Methods for analyzing and modeling bifurcations and chaos in DC-DC converter[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(11): 81-86.
- [8] 包伯成, 周国华, 许建平, 等. 斜坡补偿电流模式控制开关变换器的动力学建模与分析[J]. 物理学报, 2010, 59(6): 3769-3777. BAO Bo-cheng, ZHOU Guo-hua, XU Jian-ping, et al. Dynamical modeling and analysis of current mode controlled switching converter with ramp compensation[J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(6): 3769-3777.
- [9] 包伯成, 杨平, 马正华, 等. 电路参数宽范围变化时电流控制开关变换器的动力学研究[J]. 物理学报, 2012, 61(22): 220502.

- BAO Bo-cheng, YANG Ping, MA Zheng-hua, et al. Dynamics of current controlled switching converters under wide circuit parameter variation[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(22): 220502.
- [10] YESODHA V, KAVIPRIYA R, JOSHNA T S, et al. Analysis of chaos and bifurcation in DC-DC converter using matlab[C]//2013 International Conference on Circuits, Power and Computing Technologies. [S.l.]: [s.n.], 2013: 481-487.
- [11] 向俊杰, 毕闯, 向勇, 等. 峰值电流模式控制同步开关Z源变换器的动力学研究[J]. 物理学报, 2014, 63(12): 120507.
- XIANG Jun-jie, BI Chuang, XIANG Yong, et al. Dynamical study of peak-current-mode controlled synchronous switching Z-source convertver[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(12): 120507.
- [12] 周国华, 许建平. 开关变换器调制与控制技术综述[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(6): 815-831.
- ZHOU Guo-hua, XU Jian-ping. A Review of modulation and control techniques for switching converters[J]. Proceedings of the CSEE, 2014, 34(6): 815-831.
- [13] YING Y Y, FRED C L, PAOLO M, et al.  $I^2$  average current mode control for switching converters[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2014, 29(4): 2027-2036.

编辑 漆蓉

-----  
(上接第381页)

- [7] LIN Q G. Infinite integrals involving Bessel functions by contour integration[J]. Integral Transforms and Special Functions, 2013, 24(10): 783-795.
- [8] CHEN Ru-yun, AN Cong-pei. On evaluation of Bessel transforms with oscillatory and algebraic singular integrands[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 264: 71-81.
- [9] BARICZ A, POGANY T. On a sum of modified Bessel functions[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2014, 11(2): 349-360.
- [10] NICULESCU C, POPOVICI F. The asymptotic behavior of integrable functions[J]. Real Analysis Exchange, 2012, 38(1): 157-168.
- [11] XIANG Shu-huang. Laplace transforms for approximation of highly oscillatory Volterra integral equations of the first kind[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 944-954.
- [12] GIULIANO R, MACCI C. Large deviation principles for sequences of maxima and minima[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2014, 43(6): 1077-1098.
- [13] KOWALENKO V. Exactification of the asymptotics for Bessel and Hankel functions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 133(2): 487-518.
- [14] CORMEN T H, LEISERSON C E, RIVEST R L, et al. Introduction to algorithms[M]. 3rd ed. Beijing: China Machine Press, 2013: 16-21.
- [15] 王志刚, 罗清旺, 师奕兵. 铁磁性管道内涡流线圈耦合分析与管道参数检测[J]. 仪器仪表学报, 2014, 135(12): 2843-2851.
- WANG Zhi-gang, LUO Qing-wang, SHI Yi-bing. Analysis of eddy current coil coupling in ferromagnetic pipe and parameter detection[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 35(12): 2843-2851.
- [16] 仇海亮. 复宗量贝塞尔函数的数值解法及在测井解释中的应用[J]. 中国石油和化工标准与质量, 2013(17): 128.
- QIU Hai-liang. Numerical solution of complex argument Bessel function and its application in the log interpretation[J]. China Petroleum and Chemical Standard and Quality, 2013(17): 128.

编辑 漆蓉