测量不确定度估计的极限费舍尔信息方法

谢 暄[1]，高 乐[1]，吕 珏[1]，李西峰[1]，谢三山[2]，谢永乐[1]

(1. 电子科技大学自动化工程学院 成都 611731；2. 成都工业学院机械工程学院 成都 610031)

【摘要】极限费舍尔信息(EFI)是源于极限物理信息理论下的一种信息测度。由于在测量实践中，很难一一准确且高效地定义与补偿所有影响测量结果的因素并估计测量不确定度。因此，该文提出了采用根据EFI推导的概率密度函数(PDFs)来估计被测量的测试边界信息，即待测系统的测量不确定度。该方法能够根据不同的不确定度影响因素以及待测系统的物理规则更加动态地刻画测量不确定性。从物理应用角度进行了详细的数理推导与讨论，相比不考虑物理意义的数学模型，该方法更适用于实际应用。最后，用两组实例验证了该EFI方法的有效性。

关 键 词 极限Fisher信息；信息论；测量不确定度；参数估计；可靠性

中图分类号 TM930 **文献标志码** A doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2016.05.012

Extreme Fisher Information Approach for Measurement Uncertainty Evaluation

XIE Xuan[1], GAO Le[1], LÜ Jue[1], LI Xi-feng[1], XIE San-shan[2], and XIE Yong-le[1]

(1. School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731;

2. College of Mechanical Engineering, Chengdu Technological University Chengdu 610031)

Abstract The extreme Fisher information (EFI) is originally a measure within the theory of extreme physical information (EPI). In measurement activities, it is hard to accurately and efficiently identify and compensate every effect in measurement and evaluate the incompleteness of the measurement results. So we propose to employ the probability density functions (PDFs) derived from the EFI for estimating the boundary information of the measurement results, that is, the associated measurement uncertainty. The proposed method can characterize the measurement uncertainty more dynamically, with considering the different behaviors of the uncertainty effects and the law governing the system under measurement at the same time. The proposed approach yields the possible distribution of the measurement result in a more practical way rather than the pure mathematical approach, which is more applicable. Finally, the effectiveness of the proposed EFI method is demonstrated by the numerical results of two practical instances.

Key words extreme Fisher information (EFI); information theory; measurement uncertainty; parameter estimation; reliability

在测量学科中通常认为测量结果仅能提供一个被测量的近似情况，即仅能无限接近真值。测量学科遭遇的挑战之一是对这种知识的不完备性的估计[1]，即对测量结果的有效性评估[2-3]。

测量不确定度来源于两个方面：1) 随机影响(随机误差的来源)。在看似相同的重复观测条件下，其实有不可预测的或随机的时间和空间变量而造成的随机影响。2) 系统影响(系统误差的来源)。由测量仪器性能的局限性、对已知系统效应的不完备补偿、对系统效应的忽视引起的未知的系统影响。

从数学观点的角度分析，为了确定测量不确定度，GUM(guide to the expression of uncertainty in measurement)中推荐的方法是一种概率论框架下的方法，并假设所有对测量不确定度有贡献的系统效应都是已知的且已补偿的[2]。然而这种对系统影响的修正在实际中几乎不能实现[1]。近年来，已有不少文献提出一些解决方法，如用概率论和模糊变量来处理未知影响和系统影响，但却难以处理随机效应[4-6]。文献[7-10]中提出的用证据理论框架下的随机–模糊变量(random-fuzzy variable, RFV)方法来计

收稿日期：2016 – 01 – 01；修回日期：2016 – 03 – 04

基金项目：国家自然科学基金(60871056,61371049)；高等学校博士学科点专项科研基金(20120185110013)；中央高校基本科研业务费专项资金(267ZYGX2015KYQD021)；四川应用基础研究项目(2013JY0058)

作者简介：谢暄(1983 –)，女，博士，主要从事混合电路故障诊断、测试测量不确定度等方面的研究.

算和表征测量不确定度，可以用于处理随机和系统效应都存在的一般情况，但对于该方法，如何更有效地获得后验信息还有更多工作要做[10]。

从物理的角度来看，测量是一种对含有由随机影响和系统影响引起的噪声和波动的观测数据的量化[11]。从这种意义上，很自然地将因随机影响和系统影响引起的不完全知识或信息看作一个已知概率密度函数(PDF)的随机变量，这个不完全信息就是测量不确定度。

事实上，测量不确定度通常被表示为一个置信区间，它通过被分配给被测量的PDF获得。为了获得不确定度，难以避免地要将PDF分配给所有可能影响测量结果的输入量，并计算感兴趣的量的PDF[12]。在某些先验信息已获得的情况下，极限费舍尔信息(EFI)方法可以根据不同的情况，给所有的输入量分配一个合适的PDF。

1　EFI方法

Fisher信息被公认为是信息的一个测度，在信息领域获得广泛应用。Fisher信息曾经被用来描述复杂系统[13]，用于信号重建、处理[14]和参数估计[15]。Fisher信息矩阵和它的标量形式“Fisher信息数”近年来也持续得到关注[16-17]。在文献[18]中，EFI即最小值Fisher信息第一次被用到鲁棒性估计中。但是EFI尚未被用于评估测量的性能。本文将应用文献[11]提出的EFI方法来确定测量不确定度。

EFI方法可以简单理解为：在所有包含了先验信息的PDF中，最小值Fisher信息对应的PDF至少包含了与其他PDF相同的信息(即最小Fisher信息对应的PDF包含的信息等于或者多于其他PDF)。因为任何一个参数估计的均方误差都会大于或等于Cramer-Rao界，而用最小值Fisher信息方法估计的均方误差能够达到Cramer-Rao界，因此，EFI方法推导的PDF所包含的信息多于或等于其他可能的PDF。

如果一个PDF $f(x)$ 被分配给被测量X，则X的Fisher信息被定义为：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \tag{1}$$

在已获得的先验信息的约束下，相比于其他可能的PDF，使用EFI对应的PDF可以获得更好的估计。

约束条件取决于已确定的先验信息，如：

1) 仅有归一化条件；2) 包括归一化条件与已知的一阶矩；3) 包括归一化条件、一些已知的高阶统计矩和PDF的非零范围。

为了在某种约束下，获得按照式(1)定义的Fisher信息的EFI，必须采用一种更一般形式的拉格朗日算子[19]，其通过引入与约束数目一致的一系列拉格朗日乘数来获得。并可以按照文献[20]用Levenberg-Marquardt方法得到一般解[21-22]。

在实际中，当一个量的范围是半无限的(称为情况1)或者有限的(称为情况2)，基于一阶矩先验信息的PDF可以被直接分配给相关的被测量。

2　EFI方法产生的PDF

首先在期望已知的前提下用EFI方法推算PDF的形式，然后基于得到的PDF的形式具体阐述上面提到的两种情况。

定义 1　用 $f(x)$ 表示一个随机变量X的PDF。式(1)中的Fisher信息可以表示为：

$$I[f]=\int_l \frac{1}{f(x)}(f'(x))^2 \mathrm{d}x \tag{2}$$

式中，$l=\mathrm{Support}[f]$ 是概率分布的支撑集。假设 $f(x)$ 可微，且它的导数 $f'(x)$ 在l上是均方可积的。因为Fisher信息是严格凸函数[23]，对于$q(x)$和$r(x)$，当 $\lambda\in(0,1)$ 有：

$$I[\lambda q+(1-\lambda)r]<\lambda I[q]+(1-\lambda)I[r] \tag{3}$$

本文的目标是确定一个特定期望下的分布，也就是解决下面的变化性问题(VP)：

$$I(\mu)=\inf_f\{I(f):\mathrm{Support}[f]=l, f\in D, E[f]=\mu\} \tag{4}$$

式中，$I(\mu)$ 表示由一个给定的期望μ中得到的EFI值；$\inf_f\{\}$ 表示 $\{\}$ 的最小值；D表示所有的分布；$E[f]$ 表示期望函数。求解VP问题是为了在所有分布中用EFI方法找到给定的期望μ和l支撑下的一个分布。但是式(4)的唯一解难以获得，因为即使 $I[f]$ 是凸的，约束条件 $E[f]=\mu$ 定义的集合也不是凸的。但当l受限于一个区间(测量实践中，一般被测量值会被约束在一定范围内)，则能够得到式(4)的唯一解。

2.1　EFI的微分方程表示

由于分布函数均为正，引入变换 $f(x)=v^2(x)$，并在EFI中使用 $v(x)$ 而不是 $f(x)$。

命题 1　如果 $f(x)=v^2(x)$，Fisher信息可以重写成：

$$I[f]=4\int_l (v'(x))^2 \mathrm{d}x \tag{5}$$

式中，$v'(x)$ 是 $v(x)$ 的一阶导数。由命题1，VP式(4)可以重写为：

$$I(\mu)=\inf_{v:v^2\in l}\left\{4\int_l (v'(x))^2\mathrm{d}x:\int_l v^2(x)\mathrm{d}x=1, E[v^2(x)]=\mu\right\} \tag{6}$$

为了确保$v(x)$是一个适当的可积分布并保证它在边界点处的连续性，当支撑集受限于$l=[a,b]$，设$v(a)=v(b)=0$。然后，构建VP式(6)的拉格朗日函数：

$$L(v;\alpha,\beta)=\int_l (v'(x))^2\mathrm{d}x+\alpha(\int_l v^2(x)\mathrm{d}x-1)+\beta(\int_l xv^2(x)\mathrm{d}x-\mu) \tag{7}$$

式中，α和β分别是归一化约束条件和期望值约束条件的拉格朗日参数。由文献[24]，根据变分理论，式(7)的最小值可以通过求解欧拉−拉格朗日方程得到，有：

$$\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial v'}\right)=0 \tag{8}$$

进一步得到：

$$v''(x)-(\alpha+\beta x)v(x)=0 \tag{9}$$

2.2 通解

命题 2 根据文献[25]，通过替换变量和函数：

$$\alpha+\beta x=\beta^{2/3}y \tag{10}$$

$$v(x)=q(y)=q((\alpha+\beta x)/\beta^{2/3}) \tag{11}$$

微分方程式(9)可以化简为艾里微分方程(Airy's differential equation)：

$$q''(y)-yq(y)=0 \tag{12}$$

证明：应用全微分有：

$$\alpha+\beta x=\beta^{2/3}y\Rightarrow$$

$$\beta\mathrm{d}x=\beta^{2/3}\mathrm{d}y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\beta}{\beta^{2/3}}=\beta^{1/3} \tag{13}$$

利用微分的链式法则和式(11)容易得到：

$$v'(x)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\beta^{1/3}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\beta^{1/3} \tag{14}$$

于是：

$$v''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\beta^{1/3}\right)\beta^{1/3}=q''(y)\beta^{2/3} \tag{15}$$

将式(10)和式(15)代入到式(9)中即可得到式(12)。

命题 3[26] 微分方程式(12)的解可以表示为艾里函数Ai(y)和Bi(y)的线性组合：

$$q(y)=c_1\mathrm{Ai}(y)+c_2\mathrm{Bi}(y) \tag{16}$$

式中，c_1和c_2是常数。证明从略。

命题 4 方程式(9)的解具有以下形式：

$$v(x)=c_1\mathrm{Ai}((\alpha+\beta x)/\beta^{2/3}) \tag{17}$$

且最终满足式(4)的PDF是：

$$f(x)=c\mathrm{Ai}^2((\alpha+\beta x)/\beta^{2/3}) \tag{18}$$

式中，Ai(·)是艾里函数；c是常数。

证明：用式(16)中的艾里函数验证式(9)的解。首先确认解的范围局限在$\mathbb{R}^+$。艾里函数Bi(y)的渐近展开式为[27]：

$$\mathrm{Bi}(y)=\frac{1}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}\left(1+\frac{y^3}{6}+\frac{y^6}{180}+O(y^9)\right)+\frac{3^{1/6}y}{\Gamma(1/3)}\left(1+\frac{y^3}{12}+\frac{y^6}{504}+O(y^9)\right) \tag{19}$$

式中，$\Gamma(\cdot)$表示Gamma函数；$O(\cdot)$是可以忽略的高阶项。易得当$y\to+\infty$时Bi(y)趋于无穷。因为该解为完全可积的，考虑式(16)中c_2应为0以舍弃第二个艾里函数，再利用式(10)和式(11)即可得到式(17)。将$f(x)=v^2(x)$代入到式(17)得到式(18)。

在式(18)中，由于α仅提供原始解的任意移位形式，所以可以令α=0。参数β和c可以分别由一阶矩条件和归一化条件唯一确定。

2.3 定义在正半轴上的解——变量范围是半无限的情况

命题 5 满足条件式(6)的概率分布为：

$$f(x)=c\mathrm{Ai}^2(\beta^{1/3}x) \tag{20}$$

式中，$\beta=\dfrac{3^{1/2}\Gamma^6(1/3)}{(6\pi\mu)^3}$；$c=\dfrac{3^{5/6}\Gamma^4(1/3)}{6\pi\mu}$；$\Gamma(\cdot)$表示Gamma函数。

证明：根据式(4)中对概率分布的约束有：

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_0^\infty c\mathrm{Ai}^2(\beta^{1/3}x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_0^\infty \mathrm{Ai}^2(x)\mathrm{d}x=\beta^{1/3}/c \tag{21}$$

$$\int_0^\infty xf(x)\mathrm{d}x=\mu\Rightarrow\int_0^\infty xc\mathrm{Ai}^2(\beta^{1/3}x)\mathrm{d}x=\mu\Rightarrow\int_0^\infty x\mathrm{Ai}^2(x)\mathrm{d}x=\mu\beta^{2/3}/c \tag{22}$$

从文献[27]中可知：

$$\int_0^\infty \mathrm{Ai}^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3^{2/3}\Gamma^2(1/3)} \tag{23}$$

$$\int_0^\infty x\mathrm{Ai}^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6\sqrt{3}\pi} \tag{24}$$

利用式(18)、式(21)～式(24)，最终可得：

$$f(x)=c\mathrm{Ai}^2(\beta^{1/3}x)=\frac{3^{5/6}\Gamma^4(1/3)}{6\pi\mu}\mathrm{Ai}^2\left(\frac{3^{1/6}\Gamma^2(1/3)}{6\pi\mu}x\right) \tag{25}$$

式中，$\beta=\dfrac{3^{1/2}\Gamma^6(1/3)}{(6\pi\mu)^3}$；$c=\dfrac{3^{5/6}\Gamma^4(1/3)}{6\pi\mu}$；$\Gamma(\cdot)$和$\mathrm{Ai}(\cdot)$分别表示Gamma函数和艾里函数。

2.4 定义在紧支集的解——变量有限的情况

命题 6 满足条件式(6)的概率分布为：

$$f(x)=c_1\mathrm{Ai}^2(c_2x) \tag{26}$$

式中，Ai(·)表示艾里函数；c_1和c_2分别由下面两个等式决定：

$$\int_{c_2a}^{c_2b}\mathrm{Ai}^2(x)\mathrm{d}x=c_2/c_1 \tag{27}$$

$$\int_{c_2a}^{c_2b}x\mathrm{Ai}^2(x)\mathrm{d}x=\mu c_2^2/c_1 \tag{28}$$

证明：根据对概率分布 $f(x)$ 的标准化约束，利用下面的变量代换：

$$z=c_2x \tag{29}$$

得到：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_a^b c_1\mathrm{Ai}^2(c_2x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow$$

$$\int_{c_2a}^{c_2b}\frac{c_1}{c_2}\mathrm{Ai}^2(z)\mathrm{d}z=1\Rightarrow\int_{c_2a}^{c_2b}\mathrm{Ai}^2(x)\mathrm{d}x=c_2/c_1 \tag{30}$$

同理，根据对 $f(x)$ 的一阶矩约束并利用式(29)可以得到式(28)。

3 实　验

这部分将利用两个实验的数值结果来说明EFI方法的正确性和有效性。

3.1 实验1

首先，使用GUM第14页4.3.8中的一个例子作为例证验证EFI方法在估计测量不确定度上的有效性。本文实验中考虑的是纯铜在20℃的线性热膨胀系数。由GUM，该系数的期望值为D=16.52×10^{-6} ℃$^{-1}$。

在GUM中，最小可能值为16.40×10^{-6} ℃$^{-1}$，最大可能值为16.92×10^{-6} ℃$^{-1}$。该系数可以看作一个随机变量X：

$$\{D-d_-\leqslant X\leqslant D+d_+\}=$$

$$\{16.40\times10^{-6}\ ℃^{-1}\leqslant X\leqslant16.92\times10^{-6}\ ℃^{-1}\} \tag{31}$$

式中，$d_-=0.12\times10^{-6}$ ℃$^{-1}$；$d_+=0.40\times10^{-6}$ ℃$^{-1}$。

之后，可以用EFI方法和指定的先验信息来估计测量不确定度。令X的PDF为 $f(x)$，Fisher信息I即为：

$$I[f]=\int_{D-d_-}^{D+d_+}f(x)\left(\frac{\mathrm{d}\ln f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{32}$$

用下面的约束条件来最小化Fisher信息，有：

$$\int_{D-d_-}^{D+d_+}f(x)\mathrm{d}x=1$$

$$\int_{D-d_-}^{D+d_+}xf(x)\mathrm{d}x=D$$

得到：

$$f(x)=(10^{41}/15)\mathrm{Ai}^2(20\,053\,162x/23) \tag{33}$$

式中，$D-d_-\leqslant X\leqslant D+d_+$。最短的95%覆盖区间$[D-d_-,x_{0.95}]$可以通过下式计算得到：

$$\int_{16.40\times10^{-6}}^{x_{0.95}}f(x)\mathrm{d}x=0.95$$

进而推算出 $x_{0.95}=16.78\times10^{-6}$ ℃$^{-1}$，于是最终区间为$[16.40\times10^{-6},16.78\times10^{-6}]$。参考GUM中显示的区间式(31)，可以验证EFI方法在测量不确定度区间估计上的有效性。

3.2 实验2

实验2通过确定电阻的功率比较了测量不确定度的不同计算方法。在设置中，电阻两端电压是通过NI-16Bit-USB 6251 High-Speed M系列多功能数据采集卡测量，电阻值是用Agilent 34401A万用表测量。电路装置如图1所示。

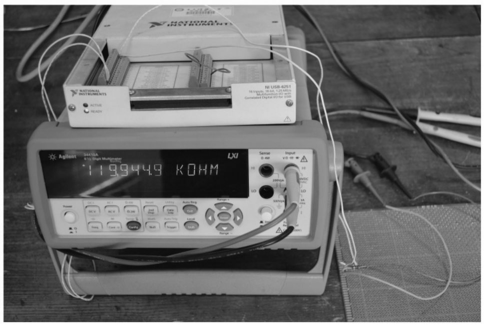

图1　实验2测试电路装置图

3.2.1 TSM方法

如上文所述，电阻的电压通过多功能数据采集卡获得，电阻阻值用万用表获得。测量数为503，电阻均值为119.906 9 kΩ。测量仪器Agilent 34401A 6 1/2的准确度为(仪器量程选为100 kΩ)：

$$\text{Accuracy}=\pm(0.010\%\text{reading}+0.001\%\text{range})=$$
$$\pm(0.010\%\times119.906\,9+0.001\%\times100)\ \mathrm{k\Omega} \tag{34}$$

按照TSM方法，假设阻值分布为均匀分布，和阻值相关的不确定度为：

$$u(R)=\text{Accuracy}/\sqrt{3}=0.0075\ \mathrm{k\Omega} \tag{35}$$

电阻的电压的不确定度为：

$$E(V_A)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}V_i=4.851\,471\,3\ \mathrm{V}$$

$$\sigma(V_A)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(V_i-E(V_A))^2}{N-1}}=0.002\,917\,442\,821\,387\ \mathrm{V}$$

$$u(V_A)=\frac{\sigma(V_A)}{\sqrt{N}}=130.082\,345\,964\,914\,1\ \mathrm{\mu V}$$

其中，V_A表示电压；σ表示方差；u表示不确定度。

根据NI 625x说明书，多功能数据采集卡的不确定度源如下：

AbsoluteAccuracy=Reading(GainError)+Range(OffsetError)+NoiseUncertainty

其中，

$$\text{GainError=ResidualAIGainError+}$$
$$\text{GainTempco(TempChangeFromLastInternalCall)+}$$
$$\text{ReferenceTempco(TempChangeFromLastExternalCal)}$$
$$\text{OffsetError=ResidualAIOffsetError+}$$
$$\text{OffsetTempco(TempChangeFromLastInternalCal)+}$$
$$\text{INL\_Error}$$

对于一个3σ收敛因子和平均100个点，有：

$$\text{NoiseUncertainty} = \text{RandomNoise} \times 3 / \sqrt{100}$$

在实验2中，测量比例为[−5, 5]，其他实验参数设置如下：

$$\text{TempChangeFromLastExternalCal=10 ℃}$$
$$\text{TempChangeFromLastInternalCal=1 ℃}$$
$$\text{Number\_of\_readings=503}$$
$$\text{CoverageFactor=}3\sigma$$
$$\text{GainError=70 ppm+(13 ppm/1℃)×1℃+}$$
$$\text{(1 ppm/1℃)·1℃=84 ppm}$$
$$\text{OffsetError=20 ppm+60 ppm(21 ppm/1℃)×1℃=}$$
$$\text{101 ppm}$$
$$\text{NoiseUncertainty} = 3 \times 140 \times 10^{-6} / \sqrt{503}$$

绝对准确度为：

$$\text{AbsoluteAccuracy} = \pm\begin{pmatrix} 4.851\,471\,3 \times 84\ \text{ppm+} \\ 5.101\ \text{ppm+}3 \times \dfrac{140 \times 10^{-6}}{\sqrt{503}} \end{pmatrix}$$

假设均匀分布，电压B类不确定度为：

$$u(V_B) = \text{AbsoluteAccuracy}/\sqrt{3} = 537.657\,7\ \mu\text{V} \tag{36}$$

电压的相对联合标准不确定度为：

$$u(V) = \sqrt{u^2(V_A) + u^2(V_B)} = 553.170\,2\ \mu\text{V} \tag{37}$$

功率为：

$$\bar{P} = \bar{V}^2 / R = 4.851\,471\,3^2 / 119\,906.9 = 196.292\ \mu\text{W} \tag{38}$$

实验2中，联合不确定度可以表示为：

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2\Bigg|_{E(V),R} u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)^2\Bigg|_{E(V),R} u^2(R)} \tag{39}$$

式中，

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{2V}{R} = \frac{2 \times 4.851\,471\,3}{119\,906.9} = 8.092\,1 \times 10^{-5} \tag{40}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{V^2}{R^2} = -\frac{4.851\,471\,3^2}{119\,906.9} = -1.637\,0 \times 10^{-9} \tag{41}$$

利用式(39)可以得到：

$$u(P) = \sqrt{\begin{aligned}&(8.092\,1 \times 10^{-5})^2 \times (553.170\,2 \times 10^{-6})^2 + \\ &(-1.637\,0 \times 10^{-9})^2 \times (7.5)^2\end{aligned}} =$$
$$4.641\,6 \times 10^{-8} = 0.046\,416\ \mu\text{W} \tag{42}$$

假定功率的PDF为高斯函数，在置信水平为95%下，可以得到：

$$P = \bar{P} \pm U(P) =$$
$$\bar{P} \pm 1.96u(P) = (196.292 \pm 0.091\,0)\ \ \mu\text{W} \tag{43}$$

3.2.2 蒙特卡洛方法

利用式(39)进行功率的蒙特卡洛模拟仿真，最终的测量结果为：

$$P = (196.292 \pm 0.088\,2)\ \mu\text{W}$$

3.2.3 最大熵方法

根据测量设备的最大不确定度，功率的最大可能值为 $196.367\,0 \times 10^{-6}$，最小可能值为 $196.245\,0 \times 10^{-6}$，令：

$$d_- = 196.292 \times 10^{-6} - 196.245\,0 \times 10^{-6} = 0.047\,0 \times 10^{-6}$$
$$d_+ = 196.367\,0 \times 10^{-6} - 196.292 \times 10^{-6} = 0.075\,0 \times 10^{-6}$$

由文献[12]利用最大熵方法得功率的最终概率密度函数为：

$$p(x) = \frac{4.562\ 66 \times 10^6}{1 - \mathrm{e}^{-4.562\ 66 \times 10^6 \times 0.122\,0 \times 10^{-6}}} \mathrm{e}^{-4.562\ 66 \times 10^6 (x - 196.245\,0 \times 10^{-6})} \tag{44}$$

最短的95%覆盖区间$[196.245\,0 \times 10^{-6}, x_{0.95}]$可以由下式得到：

$$\int_{196.245\,0 \times 10^{-6}}^{x_{0.95}} p(x)\mathrm{d}x = 0.95 \tag{45}$$

所以置信度为95%的最终区间为：

$$[196.245\,0 \times 10^{-6},\ 196.354\,5 \times 10^{-6}] \tag{46}$$

3.2.4 EFI方法

根据命题6有：

$$p(x) = \frac{11.477\,6 \times 10^{250}}{0.099}\left(\text{Ai}^2\left(\frac{10^5 x}{3.18 \times 0.11}\right)\right) \tag{47}$$

由：

$$\int_{196.200\ 1 \times 10^{-6}}^{x_{0.95}} p(x)\mathrm{d}x = 0.95 \Rightarrow$$
$$x_{0.95} = 196.402\ 496\ 7 \times 10^{-6} \tag{48}$$

95%置信区间为：$[196.200\,1 \times 10^{-6}, 196.402\,5 \times 10^{-6}]$。

由上述实验可得，取置信区间为95%时，EFI方法得到的结果与传统方法如GUM方法和蒙特卡洛方法保持一致。

4 讨论

从实践的角度来看，EFI方法提供了另一类符合国际标准化组织的计算测量不确定度的方法。更重要的是，EFI方法提出了直接从信息论角度来看测量和测量不确定度。从信息论观点来看，任何测量过程都是一个信息流输出的过程。一般来说，由于测

量中引入的信使效应(messenger effect)，信息很容易丢失，即不完美的测量导致关于测量值信息的不完备。所以从这个意义上，被测量的值不是直接被测量到，而是通过测量中对收集到的数据的观察而获得的，也就是被测量的值其实是通过对边界信息的估计而获得的。

在EFI方法中，测试结果的边界信息直接通过作为信息测度的Fisher信息来测量的。所以用EFI方法估计测量不确定度等价于利用信息流的知识来发现被测源及其他影响因素的共同物理效应的数学形式的过程。对于一次具体的测量，数据中包含的信息是唯一的，在EFI的帮助下，这种适合当前环境的唯一信息可以被挖掘出来，同时基于这种信息的不确定度的估计也变得客观和可靠。

根据数学推导不难看出，微分方程式(9)可以有一组分析解，也即是在不同的边界约束条件下会有不同的结果。所以EFI方法提供了在不必一一确认不同影响源的情况下、根据不同精度的需要动态估计不确定度的途径。

5 结 束 语

本文提出了测量不确定度估计的极限Fisher方法，极限Fisher信息模型下给出的PDF能够刻画各不确定度影响因素以及待测系统的物理规则的综合物理效应。该方法既纳入了传统基础统计特征信息(如二阶矩)，又突破了传统GUM测量不确定度模型的限制，且可根据不同的约束条件动态地估计测量不确定度。仿真与实测实验验证了该方法的正确性与有效性。对于获取EFI对应的PDF的变化性问题，提出了Fisher信息的动力学微分方程模型，并根据被测量的不同可变取值子集给出了其显式解。微分方程模型的建立，从理论上保证了极限Fisher方法可以实现对测量不确定度的动态估计。根据测量实际情况而获得的显式解，增强了该方法的实用性。

参 考 文 献

[1] FERRERO A, SALICONE S. Modeling and processing measurment uncertainty within the theory of evidence: Mathematics of random-fuzzy variables[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 2007, 56(3): 704-716.

[2] BIPM, IEC, IFCC, et al. Evaluation of measurement data-guide to the expression of uncertainty in measurement JCGM 100: 2008[EB/OL]. [2015-03-15]. http://www. bipm. org/utils/common/documents/jcgm/.JCGM_100_2008_E.pdf.

[3] BIPM, IEC, IFCC, et al. International vocabulary of metrology-basic and general concepts and associated terms (VIM) JCGM 200: 2008[EB/OL]. [2015-03-20]. http:// www. bipm.org/en/publications/guides/vim.html.

[4] MAURIS G, BERRAH L, FOULLOY L, et al. Fuzzy handling of measurement errors in instrumentation[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 2000, 49(1): 89-93.

[5] MAURIS G, LASSERRE V, FOULLOY L. A fuzzy approach for the expression of uncertainty in measurement [J]. Measurement, 2001, 29(3): 165-177.

[6] URBANSKY M, WASOWSKI J. Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness[J]. Measurement, 2003, 34(1): 67-74.

[7] FERRERO A, SALICONE S. The random-fuzzy variables: a new approach to the expression of uncertainty in measurement[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 2004, 53(5): 1370-1377.

[8] FERRERO A, RAMBA R, SALICONE S. A method based on random fuzzy variables for on-line estimation of the measurement uncertainty of DSP-based instruments[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 2009, 53(5): 1362-1369.

[9] FERRERO A, SALICONE S. The construction of random-fuzzy variables from the available relevant metrological information[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 2009, 58(2): 365-374.

[10] FERRERO A, SALICONE S. Uncertainty: Only one mathematical approach to its evaluation and expression?[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 2012, 61(8): 2167-2178.

[11] FRIEDEN A R. Science from Fisher information-a unification[M]. NewYork: Cambridge University Press, 2004.

[12] IUCULANO G, NIELSEN L, ZANOBINI A, et al. The principle of maximum entropy applied in the evaluation of the measurement uncertainty[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 2007, 56(3): 717-722.

[13] MAKALIC E, SCHMIDT D F. Fast computation of the Kullback-Leibler divergence and exact Fisher information for the first-order moving average model[J]. IEEE Signal Processing Letter, 2010, 17(4): 391-393.

[14] SONG Xiu-feng, WILLETT P, ZHOU Sheng-li. On Fisher information reduction for range-only location with imperfect detection[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 48(4): 3694-3702.

[15] YILMAZ Y, WANG Xiao-dong. Sequential decentralized parameter estimation under randomly observed fisher information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 60(2): 1281-1300.

[16] ZHANG Jiang-fan, BLUM R S, LU Xuan-xuan, et al. Asymptotically optimum distributed estimation in the presence of attacks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 63(5): 1086-1101.

[17] GUO Sheng-han. Analysis of data-based methods for approximating fisher information in the scalar case[C]//The 49 Annual Conference on Information Sciences and Systems. Baltimore, USA: IEEE, 2015: 1-5.

[18] HUBER P J. Robust statistics: a review[J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1972, 43(3): 1041-1167.

[19] FRIEDEN B, GATENBY R, ROBERT A. Exploratory data analysis using Fisher information[M]. London: Springer, 2007.

[20] DANTONA G. Expanded uncertainty and coverage factor computation by higher order moments analysis[C]//The 21 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference. Como, Italy: IEEE, 2004: 234-238.

[21] FLETCHER R. Practical methods of optimization[M]. New York: Wiely, 1991.

[22] SCALES L E. Introduction to nonlinear optimization[M]. London: Macmillan, 1985.

[23] COHEN M. The Fisher information and convexity[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1968, 14(4): 591-592.

[24] GELFAND I M, FOMIN S V. Calculus of variations[M]. New York: Dover Publications, 2000.

[25] FRIEDEN B R. Applications to optics and wave mechanics of the criterion of maximum Cramer-Rao bound[J]. Journal of Modern Optics, 1988, 35(8): 1297-1316.

[26] WANG Zhu-xi. Special functions[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[27] VALLEE O, SOARES M. Airy functions and applications to physics[M]. Singapore: World Scientific, 2004.

编 辑 漆 蓉

(上接第771页)

[7] 张端金. Delta算子系统的建模与控制[D]. 南京: 南京理工大学, 1998.
ZHANG Duan-jin. Modeling and control of Delta operator systems[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 1998.

[8] 彭丁聪. 卡尔曼滤波的基本原理及应用[J]. 软件导刊, 2009, 8(11): 32-34.
PENG Ding-cong. Basic principle and application of Kalman filter[J]. Software Guide, 2009, 8(11): 32-34.

[9] MIDDLETON R H, GOODWIN G C. Improved finite word length characteristics in digital control using Delta operators[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1986, AC-31(11): 1015-1021.

[10] YANG Hong-jiu, XIA Yuan-qing, SHI Peng, et al. A novel Delta operator Kalman filter design and convergence analysis[J]. IEEE Transactions on Circuits and System, 2011, 58(10): 2458-2468.

[11] 李惠光, 张尚斌, 王墨琦. 基于前向差分Delta算子的LMS自适应滤波算法[J]. 数据采集与处理, 2009, 24(2): 189-192.
LI Hui-guang, ZHANG Shang-bin, WANG Mo-qi. Adaptive LMS algorithm using forward Delta operator[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2009, 24(2): 189-192.

[12] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2007.
QIN Yong-yuan, ZHANG Hong-yue, WANG Shu-hua. Kalman filter and the principle of integrated navigation[M]. Xi’an: Northwestern Polytechnical University press, 2007.

编 辑 漆 蓉