

M-QAM调制下极化码的构造研究

章新城, 李少谦

(电子科技大学通信抗干扰技术国家级重点实验室 成都 611731)

【摘要】研究了当采用最常用的M-QAM调制时极化码构造的问题。在M-QAM调制时无法确定极化码的码元噪声功率,从而导致无法有效地进行信道极化。针对该问题,对M-QAM调制符号中的每个比特进行了研究,得到所有调制符号对应的比特的变化规律,通过这一规律,可以将高阶调制信道分解为多个平行的并具有固定噪声功率的二进制输入子信道,使得极化码在M-QAM调制下的构造问题变为了常规的二进制输入信道下的构造问题,并以此实现了M-QAM调制时极化码的构造。针对常用的格雷映射下的M-PAM/M-QAM调制进行了设计并仿真,仿真结果显示该构造方法能明显地提升性能。

关键词 二进制输入信道; M-PAM/M-QAM; 平行信道; 极化码

中图分类号 TN911 文献标志码 A doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2017.02.002

Research on Construction of Polar Codes with M-QAM Modulation

ZHANG Xin-cheng and LI Shao-qian

(National Key Laboratory of Communications, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract In this paper, the construction of polar codes with multiple quadrature amplitude modulation (M-QAM) modulation is studied. To solve the problem of the various noise power of the coded bits caused by M-QAM modulation, we propose a method to divide the channel of M-QAM modulation into a several of parallel binary-input channels with constant noise power so that the traditional construction method for binary-input channel is available for the M-QAM modulation case. We also give the design in detail for M-PAM/M-QAM modulation. Our numerical results show that the proposed scheme has good performance.

Key words binary-input channel; M-PAM/M-QAM; parallel channels; polar codes

极化码(polar codes)^[1]是一种已经理论证明可以达到二进制输入离散无记忆信道(binary input discrete memoryless channel, B-DMC)容量的码,而且该码的编译码复杂度与码长呈线性增长。近年来,与极化码相关的研究成果不断地涌现,这些研究的内容涉及极化码的容量限^[2-4]、极化码的构造^[5]以及极化码的译码^[6-7]等方面。

一般情况下,在二进制删除信道(binary erasure channel, BEC)中的极化码构造较为简单,其他信道下的构造都需要较高的复杂度。文献[1]提出了一种基于蒙特卡洛仿真的极化码构造方法;文献[5]提出了一种基于密度进化^[8]的构造方法,相比于蒙特卡洛的方法,该方法在性能和复杂度方面都存在更多优势。然而,这两种极化码构造方法还只适用于二进制输入离散无记忆信道,无法使用到高阶调制中。这是由于一个高阶调制符号包含了多个比特,而每个比特都有各自的出错概率,同时每个比特的出错

概率会随着调制符号的变化而改变^[9],当一个极化码的码字经过调制后,该码字中的码元就对应为调制符号中的比特,相当于极化码的码元在经过高阶调制后,每个码元所对应的出错概率不同。按文献[1]所述,极化码的构造是在已知所有码元出错概率的情况下进行的,而在高阶调制下每个码元的出错概率会随着码字的变化而改变,同时码字的产生又需要极化码构造后才能生成,这就发生了问题。

为了解决该问题,本文提出一种利用信息比特与调制符号之间的内在关系,将承载极化码的符号分解成多个独立的平行的二进制输入子信道,每个子信道都具有固定噪声方差,从而将高阶调制下极化码的构造问题简化为常规的二进制输入信道下极化码的构造问题,回避了高阶调制符号直接进行极化码构造时所需要面对的高复杂度的运算过程。文献[10]的基于多层编码的调制方法和本文的方法有些相似,不同的是该文献中调制的映射方式为自然

收稿日期: 2015-03-30; 修回日期: 2015-07-09

基金项目: 国家973项目(2013CB329001); 国家自然科学基金(61371105); 高等学校博士学科点专项科研基金(20110185120025)

作者简介: 章新城(1982-), 男, 博士生, 主要从事信道编码、移动与无线通信方面的研究。

映射, 本文的方式为格雷映射, 而且在实现过程中, 无论多少阶的高阶调制, 所需要的编码器数目只有两个, 并且密度进化过程只需要一次, 而文献[10]中的方法对应编码器的个数和所需密度进化的次数均与调制的阶数相关。同时本文方法与文献[11-12]的平行信道的概念存在本质区别, 文献[11]将极化码在平行信道间进行编码, 使得发射机能够在未知信道状态信息的条件下达到平行信道的容量, 而文献[12]则研究了在发射端已知不同信道的状态信息情况下, 如何实现平行信道的传输。本文方法虽然可以等效成多个平行信道, 但平行信道等效过程却是依据码元信息来实现的, 所以利用传统的平行信道理论无法解决。

由于高阶调制方式多样, 其内在的信息比特与调制符号的关系也相应地存在差别, 本文针对最常见的格雷码映射多进制正交幅度调制(M-QAM)开展研究, 由于通常QAM调制可以分解成两个正交的脉冲幅度调制(pulse amplitude modulation, PAM)^[13], 下面主要以PAM作为研究对象, PAM调制结果可以自然延伸到QAM调制。

1 极化码的基本原理

极化码是一种以较低编译码复杂度实现各类对称二进制输入离散无记忆信道的无误差传输的最优码^[1]。极化码的重要概念是信道极化, 其过程可以分为信道合并和信道分裂两阶段。

信道的合并过程是从一个基本合并单元开始, 然后以类似快速傅里叶变换的递归方式进行扩展, 最终将原先独立的 $N(N=2^n, n$ 为正整数)个信道 W 合并成信道 W_N 。基本合并单元如图1所示, 递归过程如图2所示, 其中 R_N 表示映射关系, 即将输入的奇数位置数据按顺序进入前一个合并信道 $W_{N/2}$, 而偶数位置的数据按顺序进入后一个合并信道 $W_{N/2}$ 。从编码角度看, 信道合并过程可看作是对输入数据经过生成矩阵 G_N 后通过对称二进制输入离散无记忆信道。

信道的分裂过程本质上是连续抵消 (successive cancellation, SC)译码过程。它是将合并后的信道 W_N 分裂成 N 个二进制输入的虚拟信道, 即极化后的信道。

信道经过信道合并和信道分裂两种方式完成极化后, 理论上可证明, 当码长 N 趋于无穷或者极大时, 虚拟信道的容量会趋于 $(1-\delta, 1)$ 或者 $[0, \delta]$, 其中 $\delta \in (0, 1)$ 是一个较小的数, 并随着码长趋于无穷而趋于0, 即极化后的虚拟信道在随着码长趋于无限时, N 个虚拟信道中有一部分会变成容量趋于0的纯噪声

信道, 另一部分变成容量趋于1的无噪声信道。因此只要将需要传输的数据加载于无噪声信道, 而纯噪声信道传输已知信号, 就可以实现无误差传输。而且理论上还证明, 此时信道的传输容量刚好等于香农编码定理给出的信道容量。

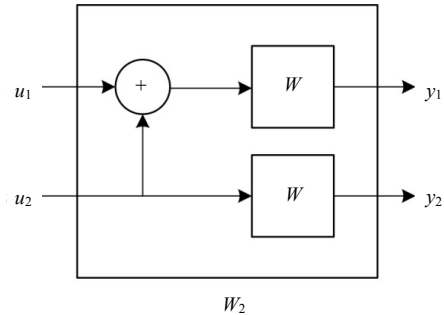


图1 信道的基本合并单元图

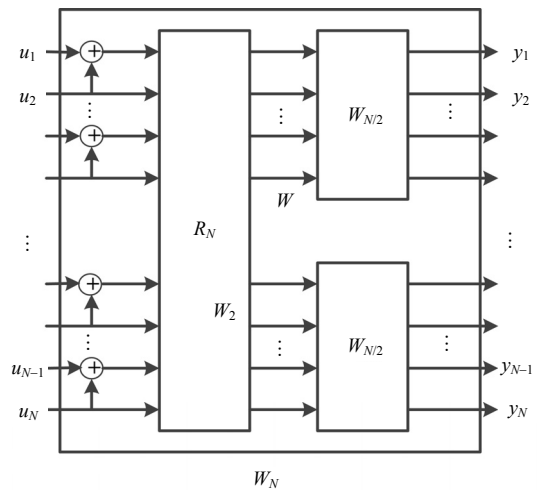


图2 信道的递归合并图

2 M-QAM调制下极化码的构造

2.1 M-PAM调制的比特等效幅度

由于极化码的构造是基于每个码元的出错概率进行的, 因此, 本文重点研究在采用高阶调制后, 码元(比特)的出错概率情况。

高阶格雷码映射可以通过低阶格雷码镜像映射的方式实现^[14], 如图3所示, $M=2^k$ 阶格雷码通过 $M/2$ 阶格雷码镜像反射获取另一半, 然后再在上下两段的左端分别增加0和1组成 M 阶格雷码。其符号和二进制表达式 $\mathbf{b}^k = \{b_k b_{k-1} \dots b_1\}$ 的关系可表示为^[15]:

$$S(\mathbf{b}^k) = \sum_{i=1}^k \left(2^{k-i} \left(\sum_{j=1}^i b_{k-j+1} \bmod 2 \right) \right) \quad (1)$$

格雷码调制后的未归一化的幅度可以表示为:

$$A(\mathbf{b}^k) = 1 - M + 2S(\mathbf{b}^k) \quad (2)$$

一般情况下, 在信道信噪比较高时, 高阶PAM

调制中的某个比特与该比特距离最近并且取值相反的星座点之间的距离(即最小欧氏距离)决定了该比特的出错概率^[16]。其中, $D_{m,i}$ 为第*i*比特对应的最小符号距离, 将 $2D_{m,i}-1$ 看作为幅度, 称为第*i*比特等效幅度, 用 $A_{e,i}$ 表示。下面分析PAM调制下比特等效幅度。

对于PAM调制的第*i*比特 b_i 等效幅度通常情况下会随着 $\mathbf{b}^{i-1} = \{b_{i-1}b_{i-2}\dots b_1\}$ 的取值不同而不同, 如图3中的8-PAM, 当 $b_1=0$ 时, 如 $S(000)=0$, $S(011)=2$, $D_m=2$, b_2 的等效幅度 $A_{e,2}=3$, 而当 $b_1=1$ 时, 如 $S(001)=0$, $S(011)=2$, $D_m=1$, 则 $A_{e,2}=1$ 。同时看到, 给定 b_1 时, b_2 的等效幅度是固定不变的。更一般地, 本文有如下命题。

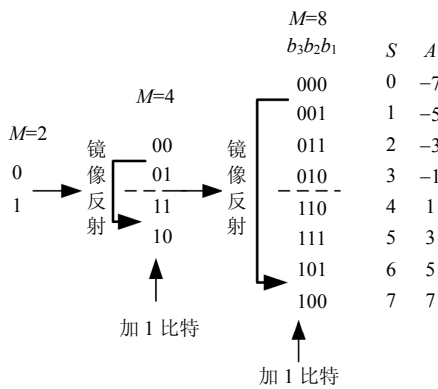


图3 格雷码映射构造法

命题 1 第*i*个比特的等效幅度只与前(*i*-1)个比特的取值有关, 而与之后的(*k*-*i*)个比特的取值无关, 其等效幅度 $A_{e,i} = 2^i - 2S(\mathbf{b}^{i-1}) - 1$, 且共有 2^{i-1} 种不同的等效幅度。

证明: 根据文献[16]的结论: 对于星座图中比特 $b_i=0$ 的符号 $S(\mathbf{b}^k)$, 与之最近的且 $c_i=1$ 的符号 $S(\mathbf{c}^k)$ 的二进制表达式 $\mathbf{c}^k = \{c_k c_{k-1} \dots c_1\}$ 与 \mathbf{b}^k 的关系式可表示成:

$$c_j = \begin{cases} b_j & i < j \leq k \\ \bar{b}_i & j = i \\ 1 & j = i - 1 \\ 0 & 0 < j < i - 1 \end{cases} \quad (3)$$

式中, \bar{b}_i 满足 $\bar{b}_i \oplus b_i = 1$ 。那么两个符号的最小符号距离可以表示为:

$$D_{m,i} = |S(\mathbf{b}^k) - S(\mathbf{c}^k)| \quad (4)$$

另外, 从式(4)可以看出, 由于 \mathbf{b}^k 和 \mathbf{c}^k 中后*k*-*i*个比特相同, 根据反射构造法可知:

$$D_{m,i} = |S(\mathbf{b}^i) - S(\mathbf{c}^i)| \quad (5)$$

由于存在一个 $\bar{\mathbf{c}}^i$ 满足 $\bar{\mathbf{c}}^i = \{\bar{c}_i 10 \dots 0\} =$

$\{b_i 10 \dots 0\}$, 进一步地, 因为 $\bar{\mathbf{c}}^i$ 与 \mathbf{c}^i 相邻且与 \mathbf{b}^i 相距更近, 因此式(5)可以改写为:

$$D_{m,i} = |S(\mathbf{b}^i) - S(\bar{\mathbf{c}}^i)| + 1 \quad (6)$$

最后去掉相同的 b_i , 得到:

$$D_{m,i} = |S(\mathbf{b}^{i-1}) - S(\bar{\mathbf{c}}^{i-1})| + 1 \quad (7)$$

由于 $\bar{\mathbf{c}}^{i-1} = \mathbf{c}^{i-1} = \{10 \dots 0\}$, 因此 $\bar{\mathbf{c}}^{i-1}$ 是一个固定序列, 且依据式(1)可得 $S(\bar{\mathbf{c}}^{i-1}) = 2^{i-1} - 1$, 带入式(7), 最终可得:

$$A_{e,i} = 2^i - 2S(\mathbf{b}^{i-1}) - 1 \quad (8)$$

因为 $S(\mathbf{b}^{i-1})$ 依据不同的 \mathbf{b}^{i-1} 有不同的取值, 因而 $A_{e,i}$ 存在 2^{i-1} 个不同的取值。得证。

由命题1可见, 如果给定 $S(\mathbf{b}^{i-1})$, 则 \mathbf{b}^i 就有一个固定的等效幅度。因此, 可以采用分层编码^[17]方式, 依次按照*i*取值从小到大进行编译码。但是, 如果直接进行信道划分, 则每个等效幅度都需要一对极化码编译码器, 因而随着*i*的增大, 所需的编译码器数呈指数增长。为了简少编译码器数, 本文首先依据命题1得出如下两个推论。

推论 1 当且仅当 $\mathbf{b}^{i-1} = \mathbf{c}^{i-1}$ 时, $A_{e,i}$ 取最小值, 且 $A_{e,i} = 1$ 。

证明: 将 $\mathbf{b}^{i-1} = \mathbf{c}^{i-1} = \{10 \dots 0\}$ 带入式(8), 可得 $A_{e,i} = 1$, 又从式(8)可看出, $D_{m,i} \geq 1$, 因而 $A_{e,i}$ 最小等于1。另一方面, 如果 $A_{e,i} = 1$, 则 $D_{m,i} = 1$, 由式(8)可知, $S(\mathbf{b}^{i-1}) - S(\mathbf{c}^{i-1}) = 0$, 因此 $\mathbf{b}^{i-1} = \mathbf{c}^{i-1}$ 。得证。

推论 2 在所有可能的 \mathbf{b}^k 中, 有且仅有 $\mathbf{b}^k = \{00 \dots 0\}$ 和 $\mathbf{b}^k = \{10 \dots 0\}$ 对应的符号除了 b_1 的等效幅度为1, 其他比特的等效幅度都至少为3, 而符号中除了比特 b_1 等效幅度为1之外还存在一个比特的等效幅度为1, 其余比特的等效幅度都至少为3。

证明: 很显然, 对于任意 \mathbf{b}^k , 总是存在 $A_{e,1} = 1$ 。当 $\mathbf{b}^k = \{00 \dots 0\}$ 和 $\{10 \dots 0\}$ 时, 对于任何 $k \geq i > 1$, $\mathbf{b}^{i-1} \neq \mathbf{c}^{i-1}$, 根据推论1, 可得 $A_{e,i} > 1$, 而当 \mathbf{b}^{i-1} 和 \mathbf{c}^{i-1} 相邻时, $A_{e,i}$ 取次最小3。而对于其他任何 \mathbf{b}^k , 总是可以找到一个且仅有一个 \mathbf{b}^{i-1} (即第一个出现1的 \mathbf{b}^{k-1}), $i > 1$, 满足 $\mathbf{b}^{i-1} = \mathbf{c}^{i-1}$, 此时, $A_{e,i} = 1$, 其余情况, $A_{e,i} \geq 3$ 。得证。

此外, 对于通常的AWGN信道, 等效幅度为1和等效幅度为3的等效信噪比为 $(d)^2/N_0$ 和 $(3d)^2/N_0$, 其中 d 为功率归一化因子, N_0 为AWGN信道的功率谱密度。不难看出, 它们信噪比相差约9.54 dB, 如此大的信噪比差异下, 编码方案的重点将在最小等效幅度的比特上, 而对于有更大等效幅度的比特, 则不

采用编码, 这样能有效减少编译码器的数量。具体地, 依据推论2, 如果把 $\mathbf{b}^k = \{00 \cdots 0\}$ 和 $\mathbf{b}^k = \{10 \cdots 0\}$ 中的第 k 个比特 b_k 的等效幅度也看成1, 则这两个序列也满足了有且仅有两个等效幅度为1的比特。这样, 每 k 个比特送入调制器时, 只有两个比特是经过编码的码元, 其余 $k-2$ 个比特都是直接来自于未编码比特, 而编码比特的位置可以根据推论1得到, 即 b_k 和比特序列中第一次出现“1”的后一位比特。(对于 $\mathbf{b}^k = \{00 \cdots 0\}$ 和 $\mathbf{b}^k = \{10 \cdots 0\}$ 情况, 则选第 k 个比特 b_k)。

2.2 M-PAM调制下的编码过程

利用以上规律, 将调制前每 k 个比特等效成 k 个平行信道, 每个平行信道传输 N 个比特(或码元), 该 k 个平行信道中有两个比特来自于极化编码器, 它们的码率 R 都是依据最小等效幅度进行密度进化后得到的, 其余 $k-2$ 个比特则直接来自于信源, 因此, 传输效率为 $(k-2)+2R$ 。在编码和调制器之间放置一个位置变换器, 使得 k 个平行信道的 k 个比特始终满足最差等效幅度的两个比特来自于极化编码器。图4为本文方法的调制过程示意图, 由图4可见, 第一个比特全部来自极化编码器1(该编码器生成码字记作 C_1), 接下来通过位置变换器来实现位置交换, 当编码器1和数据1到数据 $k-2$ 输出的比特按照图4从上至下第一次出现“1”时, 下一个比特插入来自极化编码器2的比特(如果到第 $k-1$ 个比特还没有出现“1”, 则第 k 个比特来自极化编码器2, 该编码器生成的码字记作 C_2), 经过调整位置的 k 个比特送入格雷映射的M-PAM调制器进行正常地调制, 然后送入信道。接收端过程则相反, 不再给出图示。首先对接收到的信号进行M-PAM软解调, 解出所有的 k 个信道的 N 个比特的似然值^[16]; 然后将 N 个来自于第一个信道的似然值送入第一个译码器(针对 C_1), 将译码结果利用反编码恢复出对应码元, 但译码可能存在差错, 因此恢复出的码元也可能不正确, 这将会产生最终的接收出错, 不过这种错误可以通过合理的设计来降低发生几率。位置变换器的工作过程跟发射端一致, 将第一次出现“1”之前的所有比特, 包括当前比特, 全部输出硬判决值, 并将下一个比特软判决值送入第二个译码器(同样, 如果前 $k-1$ 个比特为全零, 则将第 k 个比特的软判决值送入第二译码器), 这样第二个译码器总共会获得 N 个软判决值, 利用该软判决值, 进行译码, 最后, 再将还剩下的软判决值硬判, 最终恢复出所有的信息比特。

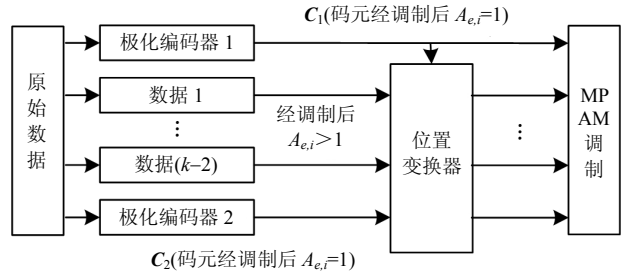


图4 调制过程示意图

3 结果分析

在仿真中, 本文采用常用的格雷码映射64-QAM调制(相当于两个8-PAM调制), 其归一化参数 $d=1$, 所以最小等效幅度为1, 对应的信噪比为 $1/N_0$ 。对于本文方案选择码长分别为 $N=64$ 和 $N=256$ 的两种极化码, 对于每种码长下, 本文方案中的两个极化码 C_1 和 C_2 的码率分别选择为0.45、0.55 (这里考虑到 C_2 的译码是建立在 C_1 译码的基础上, 因此牺牲了一些码率来提高 C_1 译码性能, 以此保证 C_2 有较好的译码性能, 但这两个码字所需的密度进化过程相同), 即平均吞吐量均为4 bit/符号, 然后利用这些参数参照文献[5]的方法进行极化码的构造, 并用推荐的方法进行极化编码和调制。

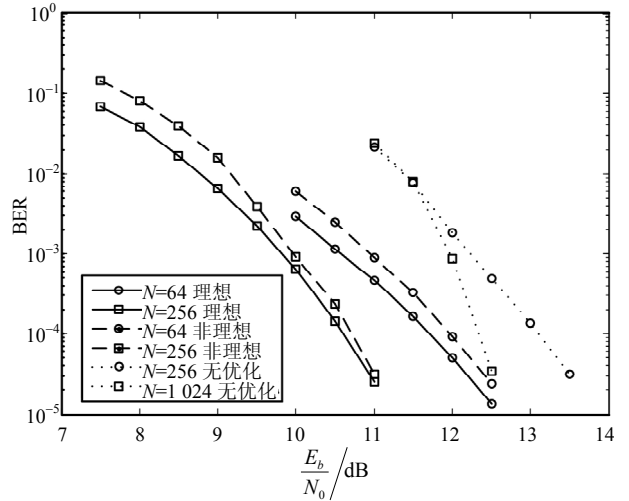


图5 64QAM调制下极化编码的性能仿真图

图5给出了这两种码的误码率性能, 图中分别记作“ $N=64$ 非理想”和“ $N=256$ 非理想”, 并且这两种码的性能分别与图中不做优化的方案“ $N=256$ 无优化”和“ $N=1024$ 无优化”作对比(无优化的方案中的极化码是在同等条件下, 按照BPSK调制构造得到)。不难发现无优化方案的码长为本文方案的4倍, 这是由于本文方案在8PAM(对应64QAM)调制下, 总共传输的长度为 $3N$, 然而由于极化码的码长是基于2

的指数次方,因此无优化的方案只能选择最为接近但不小于 $3N$ 的码长,即 $4N$ 。从图5可看出,在误码率都保持在 10^{-4} 时,本文方法分别有1.1 dB和1.5 dB的性能增益。另外,为了对比接收端低比特的可靠性对高比特信道选择产生的影响,在图5中,给出了两种码长下接收端完美已知 C_1 (图中分别用“ $N=64$ 理想”和“ $N=256$ 理想”表示)的接收结果和实际接收结果(即非理想的结果)的性能对比。从图4中不难看出,理想情况与非理想情况的性能差异均不超过0.3 dB,本文方案中的逐层译码的性能并没有出现严重恶化。

4 结束语

本文首先对一种基于格雷映射的M-PAM/M-QAM调制的星座图进行了特点分析,根据所描述的特点提出了将高阶调制符号分解成多个平行的二进制输入子信道的结论。由于这些平行的子信道具有固定噪声功率,相当于M-PAM/M-QAM调制极化码的构造问题已经简化为常规且容易实现的二进制输入信道的极化码构造问题,回避了M-PAM/M-QAM调制下码元噪声功率的不确定性所产生的问题,从而在M-PAM/M-QAM调制下实现了极化码的构造。仿真结果显示该方法可以明显地提升性能。

参 考 文 献

- [1] ARIKAN E. Channel polarization: a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(7): 3051-3073.
- [2] ARIKAN E, TELATAR E. On the rate of channel polarization[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Seoul: IEEE, 2009: 1493-1495.
- [3] KORADA S B, SASOGLU E, URBANKE R. Polar codes: Characterization of exponent, bounds, and constructions [C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Seoul: IEEE, 2009: 1483-1487.
- [4] HASSANI S H, KORADA S B, URBANKE R. The compound capacity of polar codes[C]//47th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Illinois: IEEE, 2009: 16-31.
- [5] MORI R, TANAKA T. Performance and construction of polar codes on symmetric binary-input memoryless channels[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. Seoul: IEEE, 2009: 1496-1500.
- [6] TAL I, VARDY A. List decoding of polar codes[C]//IEEE International Symposium on Information Theory. St. Petersburg: IEEE, 2011: 1-5.
- [7] NIU K, CHEN K. Stack decoding of polar codes[J]. Electronics Letters, 2012, 48(12): 695-697.
- [8] RICHARDSON T, URBANKE R. Modern coding theory [M]. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2008.
- [9] MASNICK B, WOLF J. On linear unequal error protection codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1967, 4(3): 600-607.
- [10] SEIDL M, SCHENK A, STIERSTORFER C, et al. Polar-coded modulation[J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61(10): 4108-4119.
- [11] HOF E, SASON I, SHAMAI S, et al. Capacity-achieving polar codes for arbitrarily permuted parallel channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(3): 1505-1516.
- [12] CHEN K, NIU K, LIN J R. Practical polar code construction over parallel channels[J]. IET Communications, 2013, 7(7): 620-627.
- [13] GOLDSMITH A. 无线通信[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2007.
GOLDSMITH A. Wireless communications[M]. Beijing: Posts and Telecom Press, 2007.
- [14] AGRELL E, LASSING J, STROM E G, et al. On the optimality of the binary reflected gray code[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(12): 3170-3182.
- [15] IRSHID M. Gray code weighting system[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1987, 33(6): 930-931.
- [16] LIN D S, XIAO Y, LI S Q. Low complexity soft decision technique for gray mapping modulation[J]. Wireless Personal Communications, 2008, 52(2): 383-392.
- [17] IMAI H, HIRAKAWA S. A new multilevel coding method using error-correcting codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1977, 23(3): 371-377.

编辑 税红