

基于等距映射的非线性系统集员参数估计

柴伟, 纪镐南

(北京工业大学信息学部 北京 朝阳区 100124; 计算智能与智能系统北京市重点实验室 北京 朝阳区 100124)

【摘要】给出一种新的非线性系统集员参数估计方法。该方法从流形学习的角度出发,视可行集边界与 n 维空间中的单位球面($n-1$ -sphere)为同胚,构造二者之间的同胚映射的近似。该映射可以将 $n-1$ -sphere映射为可行集近似边界。构造映射首先将等距映射与数据归一化结合,把在可行集边界上均匀采样得到的数据集映射为包含于 $n-1$ -sphere的数据集;然后,基于非参数方法得到可行集边界与 $n-1$ -sphere的同胚映射的近似。仿真结果表明,该方法比支持向量机方法具有更高的可行集边界逼近精度。

关键词 等距映射; 流形学习; 非线性系统; 参数定界; 集员估计

中图分类号 TP273 文献标志码 A doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2018.02.007

Set Membership Parameter Estimation for Nonlinear Systems Using Isomap

CHAI Wei and JI Hao-nan

(Faculty of Information Technology, Beijing University of Technology Chaoyang Beijing 100124;
Beijing Key Laboratory of Computational Intelligence and Intelligent Systems Chaoyang Beijing 100124)

Abstract This paper proposes a novel set membership parameter estimation method for nonlinear systems. According to the theory of geometry and topology, the boundary of the feasible parameter set (FPS) is homeomorphic to an $n-1$ -sphere (n is the number of parameters). From the viewpoint of manifold learning, the proposed method constructs a mapping which can approximate the homeomorphism between the FPS boundary and the $n-1$ -sphere. Once this mapping is established, it can be used to map the $n-1$ -sphere into an approximation of the FPS boundary. The following technologies are used to build the mapping. First, a data set consisting of vectors uniformly sampled from the FPS boundary is mapped into a data set contained by the $n-1$ -sphere. This is achieved by Isomap followed by the data normalization. Then, a non-parametric method based on the two data sets is used to build a mapping which approximates the homeomorphism between the FPS boundary and the $n-1$ -sphere. The simulation results show that the proposed method exhibits superior accuracy compared with the support vector machine method.

Key words Isomap; manifold learning; nonlinear systems; parameter bounding; set membership estimation

参数估计是系统辨识中的一个重要内容,已有很多方法被提出。传统的方法基于随机误差假设,如最小二乘法或极大似然法,它们假设误差是统计特性已知的随机变量。然而,当观测数据不足或误差是确定性时,采用随机误差假设不合适。

集员参数估计采用了更符合实际需要的误差描述,即假定误差是统计特性未知的有界变量。该方法的目的是给出所有与观测数据、模型结构和误差有界假设相一致的参数向量所组成的集合,称这个集合为参数可行集。当参数为线性时,可行集为凸多面体。但是在很多实际应用场合,系统是参数非

线性的,此时,可行集为非凸甚至非连通的。精确描述可行集十分困难,因此非线性系统集员参数估计的关键是找到一个既容易表达又能在计算成本与精度之间取得较好折中的可行集近似描述结果。

现有的非线性系统参数可行集近似描述方法可以粗略地分为以下4类: 1) 计算一个能包含可行集的集合,该集合称为可行集的外界。外界可以是一个单一的凸集合,如盒子^[1]、椭球^[2]或多面体^[3-4],也可以是多个盒子的并集^[5]。2) 计算一个能包含于可行集的集合,该集合称为可行集的内界。内界一般由可行集内的采样点构成^[2,6]。采用一个凸集合^[1-4]

收稿日期: 2016-12-26; 修回日期: 2017-09-26

基金项目: 北京市自然科学基金(4144067)

作者简介: 柴伟(1981-),男,博士,主要从事集员辨识与滤波、鲁棒故障检测等方面的研究。

作为可行集外界或在可行集内采样^[2,6]所得结果可能过于保守。3) 用若干个盒子的并集^[7-10]以任意精度从内外两个方向逼近可行集的边界,但是它的计算复杂度与参数的维数成指数关系。另外,复杂模型的最小包含函数很难构建,导致盒子过度保守使算法的收敛速度很慢。4) 直接给出可行集的近似边界^[11-14]。这种方法可以处理针对复杂模型较难构建最小包含函数的问题。

本文给出一种新的非线性系统集员参数估计方法。该方法从流形学习的角度出发,视可行集边界与 n 维空间中的单位球面($n-1$ -sphere)(n 是参数的个数)为同胚,构造二者之间的同胚映射的近似。这个映射被建立后就可以用来将 $n-1$ -sphere映射为可行集近似边界。构造该映射采用如下技术:首先,将等距映射(Isomap)^[15]与数据归一化结合,把在可行集边界上均匀采样得到的数据集映射为包含于 $n-1$ -sphere的数据集;然后,基于非参数方法得到可行集边界与 $n-1$ -sphere的同胚映射的近似。本文方法的性能通过两个例子加以说明。

1 问题的提出

定义非线性系统模型为:

$$y_k = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}) + e_k \quad (1)$$

式中, $y_k \in R$ 是系统的实际输出; $\mathbf{x}_k \in R^n$ 是回归向量; $\mathbf{p} \in R^n$ 是待估计的参数向量; $f(\cdot, \cdot)$ 是向量函数; $e_k \in R$ 是不可测量误差。这里 $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{p})$ 对于参数向量 \mathbf{p} 是非线性的。假设误差 e_k 有界, 即:

$$|e_k| \leq \varepsilon_k \quad (2)$$

式中, ε_k 是已知正数。

假设已获得数据集 $\{\mathbf{x}_k, y_k\}_{k=1}^N$, 由所有与模型式(1)、数据集 $\{\mathbf{x}_k, y_k\}_{k=1}^N$ 和有界误差假设式(2)相一致的参数向量所组成的集合可以表示为:

$$P_N = \{\mathbf{p} \in R^n : |y_k - f(\mathbf{x}_k, \mathbf{p})| \leq \varepsilon_k, k=1, 2, \dots, N\} \quad (3)$$

集合 P_N 称为参数可行集。式(3)可改写为:

$$P_N = \{\mathbf{p} \in R^n : \|\mathbf{Y} - \mathbf{F}(\mathbf{p})\|_\infty^E \leq 1\} \quad (4)$$

式中,

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = [f(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}), f(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}), \dots, f(\mathbf{x}_N, \mathbf{p})]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N]^T \quad (7)$$

定义加权无穷范数 $\|\mathbf{u}\|_\infty^E$: $\|\mathbf{u}\|_\infty^E = \max_i |u_i| / \varepsilon_i$ 。

可行集 P_N 的边界可以表达为:

$$B_{P_N} = \{\mathbf{p} \in R^n : \|\mathbf{Y} - \mathbf{F}(\mathbf{p})\|_\infty^E = 1\} \quad (8)$$

e_k 包含建模误差和测量噪声等, 随机方法假设误差 e_k 的统计特性已知或部分已知。但是该假设在实际应用中可能会出现问题, 原因有: 当观测数据十分有限时, 不易确定误差 e_k 的统计特性; 在某些情况下误差 e_k 可能是确定性的。集员参数估计采用了更接近实际的有界误差假设式(2), 该方法的目的是有效描述参数可行集 P_N 。当系统是参数非线性时, 可行集 P_N 比较复杂, 一般很难精确描述。近似描述可行集的方法有4种, 已经在前面介绍。需要说明的是, 这里假设可行集 P_N 是有界且连通的。可行集是否连通涉及到可辨识性问题, 该内容已超出本文的讨论范围, 关于可辨识性请参考文献[16]及其引用文献。在假设可行集 P_N 是有界且连通的前提下, 下面给出一种逼近可行集边界 B_{P_N} 的方法。

2 基于Isomap的集员参数估计

2.1 可行集边界的近似

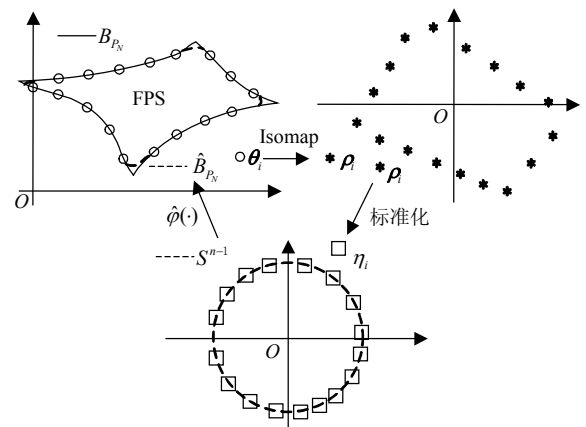


图1 映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 的构造

根据几何与拓扑理论, 可行集边界 B_{P_N} 与 $n-1$ -sphere S^{n-1} 同胚, 它们之间存在同胚映射。因此, 如果找到可行集边界 B_{P_N} 与 $n-1$ -sphere S^{n-1} 的同胚映射 $\phi(\cdot)$, 那么 B_{P_N} 就可由 S^{n-1} 变换得到。但是由于可行集 P_N 形状复杂, $\phi(\cdot)$ 也就很难得到。为此, 本文构造一个映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 并使其能逼近映射 $\phi(\cdot)$ 。使用 $\hat{\phi}(\cdot)$ 可以把 $n-1$ -sphere S^{n-1} 映射为可行集边界 B_{P_N} 的近似 \hat{B}_{P_N} 。构造映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 包括以下3个步骤, 这里用图1辅助说明, 但该方法不一定局限于二维:

1) 在可行集边界 B_{P_N} 上均匀采样得到数据集 $\theta_i (i=1, 2, \dots, l)$, 并使样本数据足够多。用 Isomap 将数据集 $\{\theta_i\}_{i=1}^l \subset B_{P_N}$ 映射为数据集 $\{\rho_i\}_{i=1}^l \subset R^n$;

2) 将数据集 $\{\rho_i\}_{i=1}^l \subset R^n$ 映射为数据集

$\{\eta_i\}_{i=1}^l \subset S^{n-1}$;

3) 基于数据集 $\{\theta_i\}_{i=1}^l$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^l$ 构造映射 $\hat{\phi}(\cdot)$, 以逼近可行集边界 B_{P_N} 与 $n-1$ -sphere S^{n-1} 之间的同胚映射 $\phi(\cdot)$ 。

2.2 构造映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 的步骤1)和步骤2)

Isomap是一种概念上简单但是很实用的流形学习方法, 它可以将输入数据映射到低维空间, 并且在低维空间里数据的本征几何属性得到很好地保留。Isomap的优点在于较高的计算效率、较少的自由参数和非迭代全局优化。

实际上, 可行集边界 B_{P_N} 是一个 $n-1$ 维流形, 但是很难通过Isomap将采样数据 $\theta_i (i=1, 2, \dots, l)$ 嵌入到 $n-1$ 维, 因为可行集边界 B_{P_N} 是“环形”的^[17]。所以, 这里数据被嵌入到 n 维。

为了达到比较好的逼近效果, 需要在可行集边界 B_{P_N} 上采集足够多的样本点 θ_i 。文献[11]提出了一种获取可行集边界的点的方法, 但是这种方法受限于它的低效率。为了不丢失可行集边界的信息, 它需要计算相当多的点, 这就加大了 Isomap 算法的运行成本, 并且该方法所获得的采样数据也不是均匀分布的, 使 Isomap 的计算结果变差。为了克服这些缺点, 文献[18]提出了一种简单却有效的采样方法, 这里用图 2 辅助说明:

- 1) 通过先验知识或者最优化方法得到一个包含可行集盒子;
- 2) 定义一个均匀的网格以覆盖这个盒子;
- 3) 用无导数线搜索方法找到可行集边界与网格中盒子的边的交点。

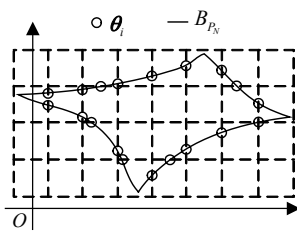


图2 可行集边界采样

Isomap将数据对 θ_i 与 θ_j 之间的欧式距离 $d(i, j)$ 作为输入。用Isomap将数据集 $\{\theta_i\}_{i=1}^l$ 映射为数据集 $\{\rho_i\}_{i=1}^l$ 包含以下步骤:

- 1) 构建邻域图 G 。当 θ_i 是 θ_j 的 K 个最邻近点中的一个时, 则将 θ_i 和 θ_j 相连, 从而构成一个图 G , 设定路径的长度为 $d(i, j)$ 。
- 2) 计算最短路径。若 θ_i 与 θ_j 相连, 则初始化最短路径 $d_G(i, j) = d(i, j)$; 否则, 令 $d_G(i, j) = +\infty$, 对

$s=1, 2, \dots, l$, 更新所有元素 $d_G(i, j)$ 为 $\min\{d_G(i, j), d_G(i, s) + d_G(s, j)\}$ 。更新过程完成之后, 可以得到最短距离矩阵 $D_G = \{d_G(i, j)\}$ 。

3) 计算嵌入。令 λ_s 是矩阵 $\tau(D_G)$ 的第 s 个特征值(降序), 算子 τ 定义为 $\tau(D) = -HLH/2$, 其中矩阵 L 是距离的平方 $\{L_{ij} = D_{ij}^2\}$, H 是中心矩阵 $\{H_{ij} = \delta_{ij} - 1/l\}$, δ_{ij} 是Kronecker δ 函数。 v_s^i 是第 s 个特征向量的第 i 个分量, 然后令向量 ρ 的第 s 个分量为 $\sqrt{\lambda_s} v_s^i$ 。

运行 Isomap 所获得的嵌入保持了流形的本征几何属性, 但是它的形状是不规则的。不难发现嵌入数据具有零均值和对角协方差。为了得到有规则形状的数据集, 需将数据集 $\{\rho_i\}_{i=1}^l$ 映射为数据集 $\{\eta_i\}_{i=1}^l \subset S^{n-1} : \eta_i = \rho_i / \|\rho_i\|_2, i=1, 2, \dots, l$ 。

2.3 构造映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 的步骤3)

在完成前两个步骤后, 每一个向量 $\theta_i \in B_{P_N}$ 都有一个与之对应的向量 $\eta_i \in S^{n-1}$ 。但是为了构造映射 $\hat{\phi}(\cdot)$, 需要计算与新的向量 $\eta \in S^{n-1}$ 相对应的向量 θ 。为了解决这个问题, 这里用到了一种基于数据集 $\{\theta_i\}_{i=1}^l$ 和 $\{\eta_i\}_{i=1}^l$ 的非参数方法^[19]。该方法包括以下步骤:

- 1) 在向量 $\eta_i (i=1, 2, \dots, l)$ 中找到向量 η 的 K' 个最近邻;
- 2) 通过最小化代价函数 $\sigma(w) = \left\| \eta - \sum_{i=1}^l w_i \eta_i \right\|_2$ (约束条件为: $\sum_{i=1}^l w_i = 1$ 且若 η_i 不是向量 η 的最近邻, 则 $w_i = 0$) 计算最优线性重构权重 w_i ;
- 3) 计算向量 $\theta = \sum_{i=1}^l w_i \theta_i$ 。

用映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 可求得与向量 $\eta \in S^{n-1}$ 对应的向量 θ , 而且不难看出 $\hat{\phi}(\cdot)$ 是可行集边界 B_{P_N} 与 $n-1$ -sphere S^{n-1} 之间同胚映射 $\phi(\cdot)$ 的近似。一旦构造出 $\hat{\phi}(\cdot)$, 就可以将 S^{n-1} 映射为 B_{P_N} 的近似。

2.4 近邻个数 K 的确定

要构造映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 需要确定两个自由参数: 使用 Isomap 将数据集 $\{\theta_i\}_{i=1}^l$ 映射为数据集 $\{\rho_i\}_{i=1}^l$ 时所涉及到的近邻个数 K 和计算与新的向量 $\eta \in S^{n-1}$ 相对应的向量 θ 时所涉及到的近邻个数 K' 。根据文献[19]可确定 K' 。一旦 K' 选定, 参数 K 就决定了近似边界性能。本文提出一种能够确定参数 K 的方法。

令 $\hat{\phi}_K(\cdot)$ 表示完成上述过程后得到的映射(参数 K' 已经选定)。在 $n-1$ -sphere S^{n-1} 上均匀采样得到向

量 $\bar{\eta}_i, i=1,2,\dots,\bar{l}$, 并假设数据足够多。引入变量 $\sigma(K)$ 表示边界近似误差, 有:

$$\sigma(K) = \sum_{i=1}^{\bar{l}} \left\| \left\| \mathbf{Y} - \mathbf{F}(\bar{\theta}_i) \right\|_{\infty}^E - 1 \right\| \quad (9)$$

式中,

$$\bar{\theta}_i = \hat{\phi}_K(\bar{\eta}_i) \quad i=1,2,\dots,\bar{l} \quad (10)$$

$\sigma(K)$ 越小, 边界近似效果越好。因此, 最优近邻个数 K^* 应该是 $\arg \min_K \sigma(K)$ 。最后, 所构造的映射 $\hat{\phi}(\cdot)$ 定为 $\hat{\phi}_{K^*}(\cdot)$ 。

3 数值仿真

3.1 例子1

考虑如下非线性系统模型^[2]:

$$y_k = \sin(p_1 y_{k-1}) + \exp(p_2 u_{k-1}) + e_k \quad (11)$$

式中, y_k 和 u_k 分别是系统输出和输入; p_1 和 p_2 是参数。可以看出, 回归向量 $\mathbf{x}_k = [y_{k-1}, u_{k-1}]^T$ 。实验过程中, 设定 $p_1 = 0.5$ 、 $p_2 = -0.2$ 、 $y_1 = 0$, 并且设计输入 $u_k = \cos(k/3) + \sin(k) + 1$ 。假设误差 e_k 在区间 $[-1.5, 1.5]$ 上服从均匀分布, 因而, 误差界为1.5。实验获得数据集 $\{\mathbf{x}_k, y_k\}_{k=2}^{45}$, 误差序列 $\{e_k\}_{k=2}^{45} = \{0.628\ 4, -0.213\ 3, -0.586\ 1, -0.931\ 0, -0.919\ 7, 0.546\ 7, -0.591\ 7, 0.125\ 0, -1.047\ 4, 0.593\ 7, -0.364\ 9, 1.080\ 0, 1.061\ 0, 0.280\ 7, -0.010\ 3, 1.199\ 3, 0.964\ 9, 0.434\ 7, 0.953\ 9, 0.480\ 7, -0.474\ 1, -0.630\ 8, -0.476\ 4, 0.102\ 2, 0.681\ 3, -0.572\ 1, 1.015\ 5, 0.204\ 2, -0.388\ 8, 0.608\ 2, 0.139\ 7, -0.165\ 4, 0.583\ 7, 0.363\ 9, 0.884\ 5, 1.370\ 5, 0.067\ 8, 1.140\ 4, -0.981\ 1, 1.439\ 2, -0.685\ 7, -0.743\ 0, 1.127\ 2, 0.711\ 9\}$ 。

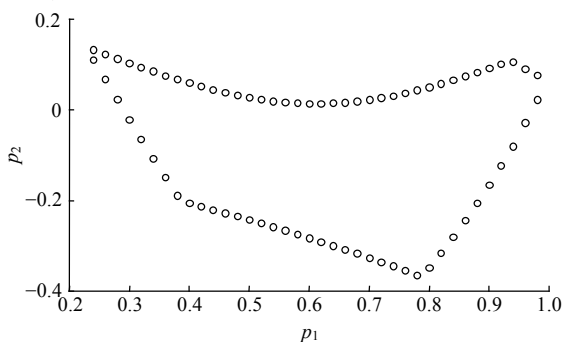


图3 可行集边界采样

借鉴文献[1]的思想, 采用最优化方法得到一个包含可行集的房子 $[0.2, 1] \times [-0.4, 0.2]$, 定义一个尺寸为 41×31 的均匀网格以覆盖这个房子。计算可行集边界与网格中房子的与 p_2 轴平行的边的交点, 共获取76个。图3显示了这些可行集边界采样点, 参数 K' 设定为2。在1-sphere S^1 上均匀取400个点 ($\bar{l} = 400$)

代入式(9)和式(10), 以确定最优近邻个数 K 。由于 $\arg \min_K \sigma(K) = 28$, 则设定 K 为28。图4所示为 σ 与 K 的对应关系。图5a和图5b分别表示用本文方法和SVM方法^[12]得到的可行集近似边界。对于后者, 使用了在 $[0.2, 1] \times [-0.4, 0.2]$ 上均匀采样得到的130个点, 及RBF核宽度为 $\sqrt{4 \times 10^{-3}}$ 的LS-SVM来获得最优结果。图中实线和虚线分别表示精确边界和近似边界, 加号表示参数向量的真值。从图中可以看出, 本文方法比SVM方法具有更好的逼近精度。同时也可以看出, 用单一凸集合作为可行集外界的方法所得结果要比本文方法保守性高。

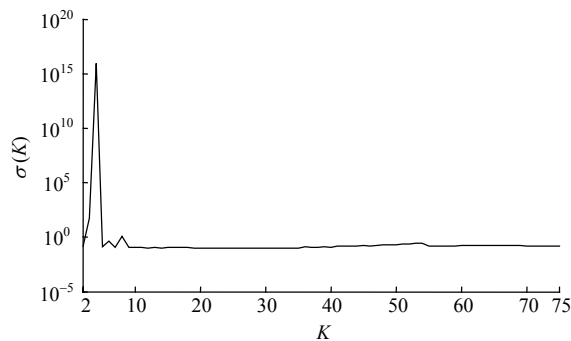


图4 σ 与 K 的对应关系

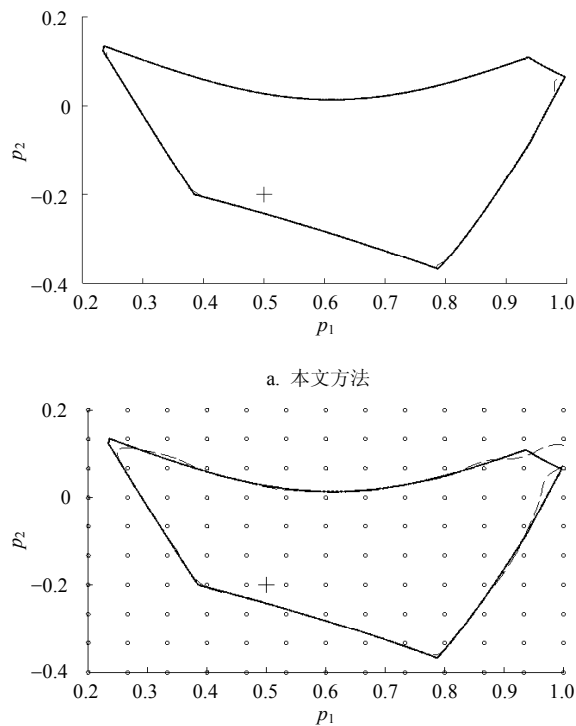


图5 可行集近似边界

3.2 例子2

考虑经典的单室开放一级吸收模型^[11]:

$$y_k = \frac{\text{Dose} \cdot K_a}{V(K_a - K_e)} [\exp(-K_e x_k) - \exp(-K_a x_k)] + e_k \quad (12)$$

式中, y_k 是在 x_k 时刻观察到的药物浓度; K_a 是吸收速率常数; K_e 是消除速率常数; Dose 是药物剂量; V 是分布容积。假设常数 K_a 和 K_e 是待估计量, 实验过程中, 设定 $K_a = 1.63 \text{ hr}^{-1}$ 、 $K_e = 0.38 \text{ hr}^{-1}$ 、 $V = 60 \text{ L}$ 。口服药物 100 mg 后, 分别在 0.25、0.5、1、1.5、2、4、6、8、10、12、18、24 h 后测量血浆中的药物浓度, 从而获得一个输入输出数据集。假设误差 e_k 服从均值为 0 mg/L 和标准差为 0.25/3 mg/L 的截断正态分布, 误差序列 $\{e_k\}_{k=1}^{12} = \{-0.180 \ 9, -0.004 \ 9, -0.084 \ 2, 0.051 \ 2, 0.042 \ 3, 0.141 \ 0, 0.049 \ 3, -0.053 \ 6, 0.031 \ 7, -0.084 \ 1, -0.001 \ 6, -0.004 \ 0\}$ 。因而, 误差界为 0.25 mg/L。

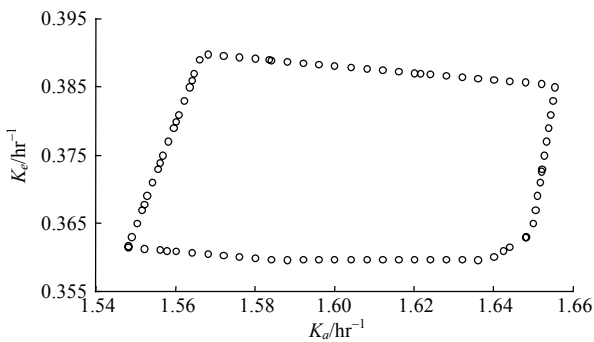


图6 可行集边界采样

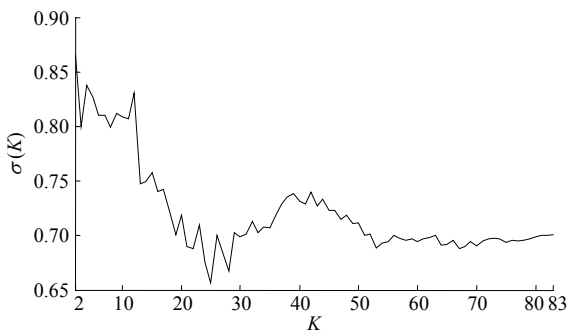
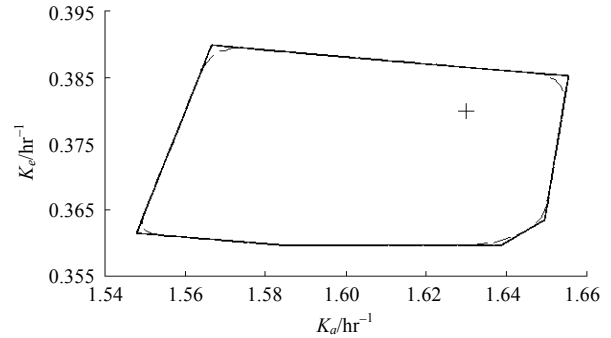


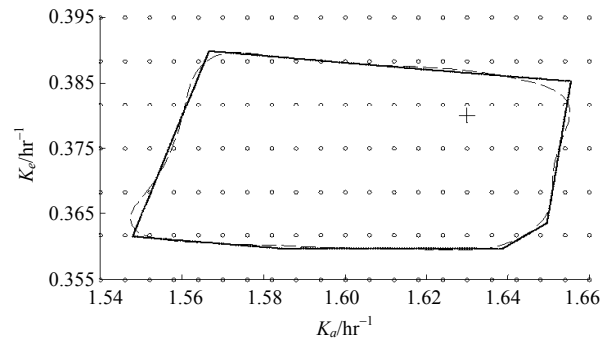
图7 σ 与 K 的对应关系

借鉴文献[1]的思想, 采用最优化方法得到一个包含可行集的盒子 $[1.54, 1.66] \times [0.355, 0.395]$ 。定义一个尺寸为 31×21 的均匀网格以覆盖这个盒子。计算可行集边界与网格中盒子的边的交点, 共获取 84 个。图 6 显示了这些可行集边界采样点。参数 K' 设定为 6。在 1-sphere S^1 上均匀取 400 个点 ($\bar{l} = 400$) 代入式 (9) 和式 (10), 以确定最优近邻个数 K 。由于 $\arg \min_k \sigma(K) = 25$, 则设定 K 为 25。图 7 示出了 σ 与 K 的对应关系。图 8a 和 8b 分别为用本文方法和 SVM 方法^[12]得到的可行集近似边界。对于后者, 使用了在 $[1.54, 1.66] \times [0.355, 0.395]$ 上均匀采样得到的 147 个点, 及 RBF 核宽度为 $\sqrt{2} \times 10^{-4}$ 的 LS-SVM 来获得最

优结果。图中实线和虚线分别表示精确边界和近似边界, 加号表示参数向量的真值。从图中可以看出, 本文方法比 SVM 方法具有更好的逼近精度。



a. 本文方法



b. SVM方法

图8 可行集近似边界

4 结束语

本文给出一种新的非线性系统集员参数估计方法, 可以处理针对复杂模型较难构建最小包含函数的问题。该方法假设可行集是有界且连通的, 寻找可行集边界与 $n-1$ -sphere 之间同胚映射的近似。映射构造成功后, 就可以将 $n-1$ -sphere 映射为可行集的近似边界。本文通过两个例子说明该方法的优点。接下来的工作将研究如何将方法延伸到用于有界非连通可行集的边界逼近。

参考文献

[1] MILANESE M, VICINO A. Estimation theory for nonlinear models and set membership uncertainty[J]. Automatica, 1991, 27(2): 403-408.
 [2] BAI E W, ISHII H, TEMPO R. A Markov chain Monte Carlo approach to nonlinear parametric system identification[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9): 2542-2546.
 [3] CHAI W, SUN X F, QIAO J F. Set membership state estimation with improved zonotopic description of feasible solution set[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23(14): 1642-1654.
 [4] BRAVO J M, ALAMO T, REDONDO M J, et al. An

- algorithm for bounded-error identification of nonlinear systems based on DC functions[J]. *Automatica*, 2008, 44(2): 437-444.
- [5] BORCHERS S, FREUND S, RATH A, et al. Identification of growth phases and influencing factors in cultivations with AGE1.HN cells using set-based methods[J]. *PLoS ONE*, 2013, 8(8): e68124.
- [6] NURULHUDA K, STRUIK P C, KEESMAN K J. Set-membership estimation from poor quality data sets: Modelling ammonia volatilisation in flooded rice systems[J]. *Environmental Modelling & Software*, 2017, 88: 138-150.
- [7] JAULIN L, WALTER E. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation[J]. *Automatica*, 1993, 29(4): 1053-1064.
- [8] RAÏSSI T, RAMDANI N, CANDAU Y. Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations[J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1771-1777.
- [9] HERRERO P, DELAUNAY B, JAULIN L, et al. Robust set-membership parameter estimation of the glucose minimal model[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2016, 30(2): 173-185.
- [10] PAULEN R, VILLANUEVA M E, CHACHUAT B. Guaranteed parameter estimation of non-linear dynamic systems using high-order bounding techniques with domain and CPU-time reduction strategies[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2016, 33(3): 563-587.
- [11] LAHANIER H, WALTER E, GOMENI R. OMNE: a new robust membership-set estimator for the parameters of nonlinear models[J]. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 1987, 15(2): 203-219.
- [12] KEESMAN K J, STAPPERS R. Nonlinear set-membership estimation: a support vector machine approach[J]. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2004, 12(1): 27-41.
- [13] HERRERO J M, BLASCO X, MARTINEZ M, et al. Non-linear robust identification using evolutionary algorithms: Application to a biomedical process[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2008, 21(8): 1397-1480.
- [14] CHAI W, SUN X F. Set membership estimation by weighted least squares support vector machines[J]. *Electric Machines and Control*, 2009, 13(3): 431-435.
- [15] TENENBAUM J B, de SILVA V, LANGFORD J C. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction[J]. *Science*, 2000, 290(5500): 2319-2323.
- [16] JAUBERTHIE C, TRAVE-MASSUYES L, VERDIERE N. Set-membership identifiability of nonlinear models and related parameter estimation properties[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2016, 26(4): 803-813.
- [17] LEE J A, VERLEYSSEN M. Nonlinear dimensionality reduction of data manifolds with essential loops[J]. *Neurocomputing*, 2005, 67: 29-53.
- [18] CHAI W. Nonlinear set membership identification by locally linear embedding[J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2014, 10(6): 2193-2207.
- [19] SAUL L K, ROWEIS S T. Think globally, fit locally: Unsupervised learning of low dimensional manifolds[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2003, 4(2): 119-155.

编辑 漆蓉