

初始条件对网络渗流变换的影响

王润祯¹, 杨春¹, 陈全², 付传技³, 高雅纯³, 贾啸⁴, 李嘉阳¹

(1. 电子科技大学数学科学学院 成都 611731; 2. 电子科技大学资源与环境学院 成都 611731;
3. 电子科技大学物理电子学院 成都 610054; 4. 四川师范大学物理与电子工程学院 成都 610101)

【摘要】近年来,不同添边规则下的网络渗流特征得到了广泛研究,但系统初始条件对渗流变换的影响少有关注。该文研究了初始分支尺度服从指数分布条件下的经典ER(Eröds-Rényi)渗流过程,通过分支凝聚过程的斯莫洛科夫斯基方程解析分析发现,与经典ER渗流过程相比,尽管渗流仍然连续,但在相变点附近,分支尺度分布不再服从幂律分布,同时,敏感度在相变点也不再满足居里-外斯定律。

关键词 指数分布; 渗流变换; 幂律分布; 敏感度

中图分类号 TN84 **文献标志码** A **doi**:10.3969/j.issn.1001-0548.2018.02.023

The Effect of Initial Size Distributions on Percolation Transition

WANG Run-zhen¹, YANG Chun¹, CHEN Quan², FU Chuan-ji³, GAO Ya-chun³, JIA Xiao⁴, and LI Jia-yang¹

(1. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731;
2. School of Resources and Environment, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731;
3. School of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054;
4. School of Physics and Electronic Engineering, Sichuan Normal University Chengdu 610101)

Abstract Recently, the extensive researches have done on percolation characteristics of different rules. Nevertheless, the impact of initial size distributions on percolation transition is rare in concern. In this paper, we investigate a modified ER (Eröds-Rényi) percolation process, in which the initial size distributions is set to exponential distribution. Through the analysis of Smoluchowski equation, it is found that although percolation transition is continuous compared to classical ER percolation process, the distributions of cluster size do not comply with the power-of distributions near the critical point, and both analytical and simulation results reveal that susceptibility does not satisfy the Curie-Weiss law.

Key words exponential size distributions; percolation transition; power-of distributions; susceptibility

渗流是描述非平衡态系统相变的基础性模型^[1-2]。为描述流体在多孔介质中的流动行为,文献[3]首次引入了渗流概念。文献[4-5]研究了随机网络模型(经典ER渗流模型):初始系统由 N 个完全孤立的顶点组成,以完全随机的方式在任意的两顶点间逐步添边。结果表明:1)序参量随添边密度的演化行为是连续相变过程;2)在相变点附近,分支尺度分布服从幂律分布;3)敏感度在相变点满足著名的居里-外斯定律。

经典ER渗流模型是研究真实系统(如多孔岩石^[1]、森林火灾^[6]、电阻网络^[7]、疾病传播^[8]、社会网络^[9]等)突变行为的重要理想模型。由于其规则的简单性,对用数学与统计物理方法研究自然界中广

泛存在的相变现象有着重要指导意义。文献[10]对经典ER渗流模型进行简单修改,发现了有趣“爆炸渗流”现象,引起了人们对网络渗流的广泛兴趣,获得了许多研究成果^[11-12]。

然而,目前提出的所有渗流模型中,总假定系统起始于孤立顶点和单一的演化规则。事实上,大量真实系统生长演化过程的初始状态并不都是由孤立顶点组成的简单系统,同时演化规则可能呈现阶段性变化。因此,研究渗流现象,应该考虑不同的初始条件和混合演化规则。文献[13-14]开始研究系统初始条件对网络渗流的影响,在一个特定的模型上,研究了初始分支尺度分布为幂律的情况下对连续渗流和爆炸渗流的影响。结果表明:不同的初始

幂律指数将对渗流的相变点、相变点处的分支尺度分布、最大分支的临界奇异性、各种临界指数、以及敏感度等产生影响。

该文进一步研究初始分支尺度分布为指数的情况下，初始条件对经典ER渗流过程的影响。通过解析分析和数值模拟发现：1) 渗流变换仍然属于连续的二阶相变；2) 在相变点附近，分支尺度分布不再具有严格的幂律分布特征，出现了幂律弯曲现象；3) 敏感度在相变点不再满足居里-外斯定律。这说明网络渗流的性质，不仅取决于模型的添边规则，而且还取决于系统中分支尺度的初始分布状况。对该现象的深入研究有助于深刻认识和理解复杂网络渗流过程。

1 模型描述

设时间 t 表示系统中的边数与系统总顶点数的比值， s 表示系统中连通分支的尺度，序参量 $S(t)$ 表示最大连通分支尺度与系统总顶点数的比值，定义 $P(s,t)$ 为 t 时刻从系统中任取的一个顶点属于尺度为 s 连通分支的概率。在 $t=0$ 时刻，假定 $P(s,0) = a_0 e^{-\tilde{\tau}s}$ ，其中 a_0 是大于零的正常数， $\tilde{\tau}$ 是初始时刻分布指数。 a_0 与 $\tilde{\tau}$ 的设置需保证系统中初始时刻最大分支尺度为微观，即 $S \sim 0$ 。同时假定渗流过程的演化规则与ER随机规则相同。

2 序参量 $S(t)$

在热力学极限下，系统中分支聚集的动力学方程(斯莫罗科夫斯基凝聚方程^[15])为：

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} = s \sum_{u=1}^{s-1} P(u,t)P(s-u,t) - 2sP(s,t) \quad (1)$$

为了对方程作解析分析，引入如下生成函数：

$$\rho(z,t) = \sum_{s=1}^{+\infty} P(s,t)z^s \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)，得到生成函数微分方程：

$$\frac{\partial \rho(z,t)}{\partial t} = -2[1 - \rho(z,t)] \frac{\partial \rho(z,t)}{\partial \ln z} \quad (3)$$

通过Hordgraph变换^[16]，得到式(3)的解为：

$$\ln z = 2t(1 - \rho) + g(\rho) \quad (4)$$

其中， $g(\rho)$ 由分支尺度初始分布确定。

设初始分布 $P(s,0) = a_0 e^{-\tilde{\tau}s}$ ，那么：

$$\rho(1,0) - \rho(z,0) = \frac{a_0 \ln z}{\tilde{\tau}(\ln z - \tilde{\tau})}$$

由此求出：

$$\ln z = \frac{-(1 - \rho)\tilde{\tau}^2}{a_0 - (1 - \rho)\tilde{\tau}}$$

式(4)中，令 $t=0$ ，有 $\ln z = g(\rho)$ ，因此得：

$$g(\rho) = \frac{-(1 - \rho)\tilde{\tau}^2}{a_0 - (1 - \rho)\tilde{\tau}} \quad (5)$$

将(5)代入(4)，得：

$$\ln z = 2t(1 - \rho) - \frac{(1 - \rho)\tilde{\tau}^2}{a_0 - (1 - \rho)\tilde{\tau}} \quad (6)$$

式(6)中，令 $z=1$ ，当 $t \geq t_c$ 时，考虑到 $1 - \rho = S(t)$ ，得：

$$0 = 2tS - \frac{S\tilde{\tau}^2}{a_0 - S\tilde{\tau}} \quad (7)$$

由式(7)得：

$$S(t) = \frac{2a_0 t - \tilde{\tau}^2}{2t\tilde{\tau}} \quad (8)$$

图1为序参量 $S(t)$ 随时间 t 变化曲线的理论值与实验值的比较，在相变点附近理论曲线和数值实验曲线符合得较好，其中 $\tilde{\tau} = a_0 = 0.045$ ， $N = 10^5$ 。

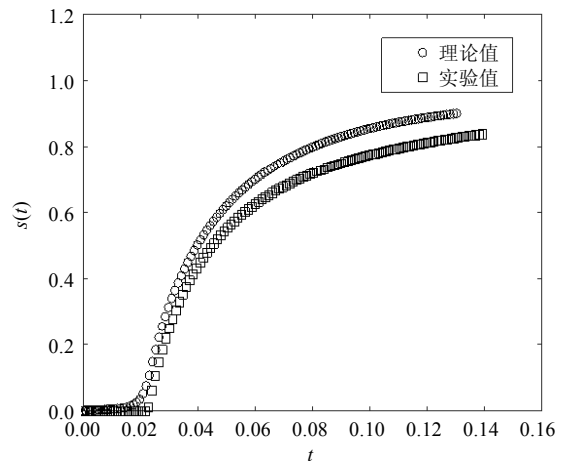


图1 序参量 $S(t)$ 随时间 t 变化曲线的理论值与实验值的比较

3 分支尺度分布函数 $P(s,t)$

$P(s,t)$ 是关于 t 的解析函数。所以， $P(s,t)$ 在 $t=0$ 的幂级数展开为：

$$P(s,t) = A_0(s) + A_1(s)t + A_2(s)t^2 + \dots \quad (9)$$

在初始条件 $P(s,0) = a_0 e^{-\tilde{\tau}s}$ 下研究系数

$$A_n(s) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n P(s,t)}{\partial t^n} \right|_{t=0}$$

3.1 分支尺度分布函数 $P(s,t)$ 的一阶近似

由演化方程式(1)得到：

$$A_1(s) = s \sum_{u=1}^{s-1} A_0(u)A_0(s-u) - 2sA_0(s) \quad (10)$$

将式(10)改写并将初始分布代入得到：

$$A_1(s) \sim a_0^2 s^2 e^{-s\tilde{\tau}}$$

特别地，当 $t \ll 1$ 时，忽略高阶无穷小量，得到

分支尺度分布的渐进线性分布表达式:

$$P(s, t) \approx a_0 e^{-s\tilde{\tau}} + a_0^2 s^2 e^{-s\tilde{\tau}} t$$

3.2 分支尺度分布函数 $P(s, t)$ 的二阶近似

由演化方程式(1)得到:

$$A_2(s) = s \sum_{u=1}^{s-1} A_1(u) A_0(s-u) - s A_1(s) \quad (11)$$

将式(11)改写为:

$$\begin{aligned} & s \sum_{u=1}^{s-1} [A_1(u) - A_1(s)] [A_0(s-u) - A_0(s)] \approx \\ & a_0^3 s^3 \int_0^s [e^{-u\tilde{\tau}} - e^{-s\tilde{\tau}}] [e^{-(s-u)\tilde{\tau}} - e^{-s\tilde{\tau}}] du \approx \\ & a_0^3 s^3 e^{-s\tilde{\tau}} \left[1 - \frac{1}{\tilde{\tau}} e^{-s\tilde{\tau}} \right] \end{aligned}$$

所以:

$$A_2(s) = a_0^3 s^3 e^{-s\tilde{\tau}} \left[s - \frac{1}{\tilde{\tau}} + \frac{1}{\tilde{\tau}} e^{-s\tilde{\tau}} + 2e^{-s\tilde{\tau}} \right] \approx a_0^3 s^4 e^{-s\tilde{\tau}}$$

由此获得了分支尺度分布的二阶近似表达式为:

$$P(s, t) \approx a_0 e^{-s\tilde{\tau}} + a_0^2 s^2 e^{-s\tilde{\tau}} t + a_0^3 s^4 e^{-s\tilde{\tau}} t^2 \quad (12)$$

对于一般的系数 $A_n(s)$, 同样可以计算出来, 但考虑到 $t \ll 1$, 所以不再计算, 只考虑分支尺度分布的一阶或二阶近似。

从式(12)可以看出, 分支尺度分布并非指数分布, 也非幂律分布。这和经典ER渗流模型中分支尺度在相变点附近服从幂律分布相违背。在图1的参数与系统规模设置下, 本文对系统在相变点附近的分支尺度分布进行了数值实验, 其中 $\tilde{\tau} = a_0 = 0.045$, $N = 10^5$ 。图2a表示系统初始时刻分支尺度分布, 属于指数分布; 图2b~图2d分别表示系统在临界点 t_c 左邻域、临界点和右邻域中3个特定点处的分支尺度分布。从图中不难看出, 分布曲线不是标准的幂律分布曲线, 而是具有幂律弯曲现象, 同时也不是指数分布曲线。

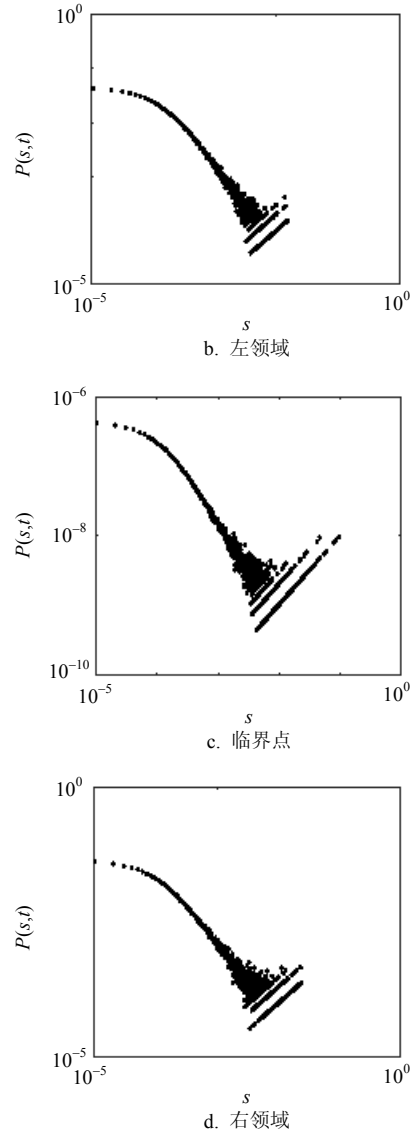
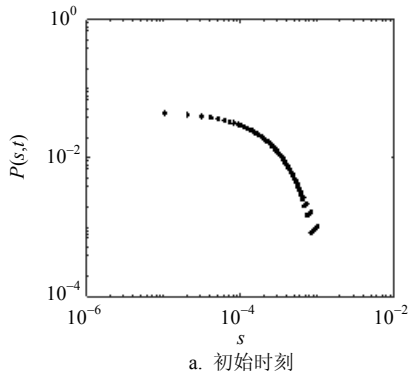


图2 在相变点附近系统分支尺度分布曲线图

4 敏感度 $\chi(t)$

在网络渗流中, 敏感度为随机选择一个顶点所属分支尺度是平均分支尺度的概率, 即 $P(s, t)$ 的一阶矩:

$$\chi = \langle s \rangle_p = \sum_{s=1}^{+\infty} s P(s, t) \quad (13)$$

由斯莫洛夫斯基凝聚方程, 可以推出 χ 与 S 的关系为:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = 2S \langle s \rangle_p = 2S \chi \quad (14)$$

将 $S = \frac{2a_0 t - \tilde{\tau}^2}{2t\tilde{\tau}}$ 代入式(14), 得到:

$$\chi(t) = \frac{\tilde{\tau}^2}{(4a_0 t - 2\tilde{\tau}^2)t} \quad (15)$$

显然, 当 $t = \frac{\tilde{\tau}^2}{2a_0}$ 时, $\chi(t)$ 发散, 由此, 可以断定相变点应该为:

$$t_c = \frac{\tilde{\tau}^2}{2a_0} \quad (16)$$

同时, 根据式(15)和式(16), 不难发现敏感度在相变点附近不满足居里-外斯定律: $\chi \sim |t - t_c|^{-1}$, 这和经典ER渗流结果相违背。

对 $\forall \varepsilon > 0$, 令 $t = t_c + \varepsilon$, 即 $t = \frac{\tilde{\tau}^2}{2a_0} + \varepsilon$, 由式(8),

得到 $S = \frac{2a_0^2 \varepsilon}{\tilde{\tau}^3 + 2a_0 \varepsilon \tilde{\tau}}$, 显然, 这是关于 ε 的一个连续函数。当 $\varepsilon = 0$ 时, $S = 0$, 说明初始条件为指数分布下的经典ER渗流仍然为连续渗流。

5 结束语

网络渗流的研究方法与结果可以为统计物理相变问题研究提供借鉴, 同时, 在传播动力学、基础设施级联失效、网络同步等问题的研究中有其重要应用。特别是近年来, 人们在应用网络渗流研究人脑科学、人体基因科学以及寻找复杂网络的关键节点等方面都取得重要进展^[17-19]。本文研究系统初始状态对渗流变换的影响, 不仅对深入认识网络渗流的特征具有重要的理论意义, 而且也具有一定的现实意义, 如在疾病传播过程中, 不同的初始感染比例及病毒携带者在人群中的分布状况对疾病的扩散会产生不同的影响, 对其作优化控制, 可以消除或减缓疾病传播。

目前, 研究各种初始状态对网络渗流的影响还主要停留在数值模拟层面, 本文的理论分析是一个重要尝试, 如何把数值模拟与理论分析相结合, 这是值得进一步探讨的问题。此外, 研究初始条件对不连续渗流的影响也是今后研究的一个方向。

参考文献

[1] STAUFFER D, AHARONY A. Introduction to percolation theory[M]. London: Taylor & Francis, 1994.
 [2] DOROGOVTSSEV S N. Lectures on complex networks[M]. Oxford, UK: Oxford University Press, 2010.
 [3] BROADBENT S R, HAMMERSLY J M. Percolation processes I crystals and mazes[J]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1957, 53(3): 629-641.
 [4] ERDŐS P, RÉNYI A. On the evolution of random graphs[J]. Publ Math Inst Hungar Acad Sci, 1960, 5(1): 17-61.

[5] ERDŐS P, RÉNYI A. On the evolution of random graphs II [J]. Bull Inst Int Stat, 1961, 38(4): 343-347.
 [6] HENLEY C L. Statics of a 'self-organized' percolation model[J]. Phys Rev Lett, 1993, 71(1): 2741-2744.
 [7] de ARCANGELIS L, REDNER L, CONIGLIO A. Anomalous voltage distribution of random resistor networks and a new model for the backbone at the percolation threshold[J]. Phys Rev B, 1985, 31(7): 4725-4727.
 [8] MOORE C, NEWMAN M E J. Epidemics and percolation in small-world networks[J]. Phys Rev E, 2000, 61(5): 5678-5682.
 [9] PAN R K, KIVELA M, SARAMAKI J, et al. Using explosive percolation in analysis of real-world networks[J]. Phys Rev E, 2011, 83(4): 046112.
 [10] ACHLIOPTAS D, D'SOUZA R M, SPENCER J. Explosive percolation in random networks[J]. Science, 2009, 323(5920): 1453-1555.
 [11] 陈小龙, 杨春, 李志鹏, 等. 复杂网络爆炸渗流研究综述[J]. 电子科技大学学报, 2015, 44(1): 12-21.
 CHEN Xiao-long, YANG Chun, LI Zhi-peng, et al. Review of explosive percolation of the complex networks[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2015, 44(1): 12-21.
 [12] CHEN Xiao-long, YANG Chun, ZHONG Lin-feng, et al. Crossover phenomena of percolation transition in evolution networks with hybrid attachment[J]. Chaos, 2016, 26: 083114.
 [13] da COSTA R A, DOROGOVTSSEV S N, GOLTSEV A V, et al. Solution of the explosive percolation quest II. Infinite-order transition produced by the initial distributions of clusters[J]. Phys Rev E, 2015, 91(3): 032140.
 [14] da COSTA R A, DOROGOVTSSEV S N, GOLTSEV A V, et al. Mendes solution of the explosive percolation quest II. infinite-order transition produced by the initial distributions of clusters[J]. Phys Rev E, 2015, 91(3): 032140.
 [15] KRAOIVSKY P L, REDNER S, BEN-NAIM E. A kinetic view of statistical physics[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.
 [16] da COSTA R A, DOROGOVTSSEV S N, GOLTSEV A V, et al. Inverting the Achlioptas rule for explosive percolation[J]. Phys Rev E, 2015, 91(4): 042130.
 [17] ROZENFELD H D, GALLOS L K, MAKSE H A. Explosive percolation in the human protein homology network[J]. Eur Phys J B, 2010, 75(3): 305-310.
 [18] SMOLUCHOWSKI M V, DIFFUSION D V U. Brownsche bewegung und koagulation von kolloidteilchen [J]. Phys Zeits, 1916, 17: 557-585.
 [19] LÜ L, CHEN D, REN X L, et al. Vital nodes identification in complex networks[J]. Physics Reports, 2016, 650: 1-63.
 [20] MORONE F, MAKSE H A. Influence maximization in complex networks through optimal percolation[J]. Nature, 2015, 524: 65-68.