

基于自适应多层复源波束的多目标散射分析方法

宋连宁, 叶雨农, 荣志, 胡俊, 聂在平

(电子科技大学电子工程学院 成都 611731)

【摘要】提出了一种分析多目标电磁散射问题的新方法。首先采用区域分解的方式进行空间划分,使得每个目标划分在一个子区中;随后在每个子区中使用基于矩量法(MoM)的多层次复源波束方法(MLCSB)进行阻抗矩阵和电流表面矢量的相乘计算,在计算的同时获得子区表面电流的复源波束(CSB)展开;最后,为了利用复源波束的方向性,提出了一种自适应复源波束转移方式,用来进行不同尺寸的子区间直接耦合。数值算例验证了该方法的准确性和处理复杂多目标电磁散射问题的能力。

关 键 词 复源波束; 电磁散射; 快速算法; 多目标

中图分类号 TN011 文献标志码 A doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2018.04.004

Scattering of Multiple Objects Based on Adaptive Multilevel Complex Source Beam Method

SONG Lian-ning, YE Yu-nong, RONG Zhi, HU Jun, and NIE Zai-ping

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract A novel method for electromagnetic scattering of multiple objects is proposed in this work. The domain decomposition approach is firstly applied for spatial partition, and each object is divided as a separate sub-region. Then in each sub-region, the multilevel complex source beam method (MLCSB) based on the method of moment (MoM) is applied to accelerate the multiplication of impedance matrix and surface current vector. The complex source beam (CSB) expansions of the surface current for the sub-region can be obtained along with the multiplication. Finally, to fully exploiting the directional property of CSBs, an adaptive translation process based on CSBs is proposed for the coupling between sub-regions with different size. Several numerical results are given to validate the proposed method for multiple objects.

Key words complex source beam; electromagnetic scattering; fast solver; multiple objects

随着军事技术的发展,电磁散射问题的数值仿真分析方法研究长期以来广受关注。其中,多目标电磁散射问题,由于具有强烈的实战背景,使得其在雷达目标特性分析、军用目标隐身与反隐身等实际工程中有着很强的研究价值。而多目标散射由于在宏观上空间分布范围广,在微观上又具有诸多细节,这种多尺度特性给问题的分析和求解带来了许多挑战。国内外学者在处理此类问题时,均采用了分而治之的思想,对单个目标采用适宜的求解器,对目标间的耦合则着力降低问题求解的复杂度。

对于多个具有简单外型的旋转体目标,文献[1-2]采用BoR矩量法降低目标的求解复杂度,同时将BoR基函数映射到RWG上,使用多层次快速多极子(MLFMA)^[3]进行多旋转体和普通目标之间的耦合计算。为了克服该方法对于目标外型的要求,文献[4-5]

使用EPA将复杂目标等效到旋转体上,该方法对于含多个相同结构的复杂目标的计算十分有效。对于粗糙面和目标复合的散射问题,文献[6]将粗糙面进行近似计算,使用多路径等近似方式降低了粗糙面和目标间的耦合。此外,基于MLFMA的多区迭代^[7]、基于区域分解的内外迭代^[8-9]等技术降低了区域间的耦合迭代次数。

最近,一种基于复源波束(CSB)的方法应用在了电磁场分析中^[10]。该方法用定义在等效面上的复源点表征内部各基函数与外界的互作用^[11-12],将基函数间的矩量法远场阻抗矩阵表示为这些复源点之间的相互作用^[13]。由于复源点产生的复源波束天然具有空间方向性^[14],该方法可以通过提取贡献强的复源波束来提高阻抗矩阵的填充速度并降低内存消耗。更进一步,文献[15]实现了多层次复源波束法

收稿日期: 2017-05-09; 修回日期: 2017-08-14

基金项目: 国家自然科学基金(61490695)

作者简介: 宋连宁(1986-),男,博士生,主要从事电磁散射与辐射方面的研究。

(MLCSB)，该方法可以将计算的时间和内存复杂度降为 $O(n \log n)$ 。

传统的多层方法在进行组间转移耦合时，需要两个组具有完全相同的几何尺寸，而基于复源波束的方法对此没有限制。基于此，本文针对多目标计算问题改进了MLCSB算法，每个目标依然使用MLCSB进行计算，而不同目标间则依据其几何尺寸，利用复源波束自适应地在不同目标间进行耦合。

1 表面电流的多层次复源波束展开

金属目标的散射场由其表面感应电流的二次辐射引起，利用场-源积分，可以得到该电场的积分表达式：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = ik_0\eta_0 \int_{S'} \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \quad (1)$$

式中， k_0 为自由空间波数； η_0 为自由空间波阻抗；

\mathbf{r} 是场点的位置； \mathbf{r}' 是源点的位置； $\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$ 是自由空间中的电型并矢格林函数； $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ 是目标表面的电流。利用RWG基函数，可以将其离散为：

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_{j=1}^N I_j \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') \quad (2)$$

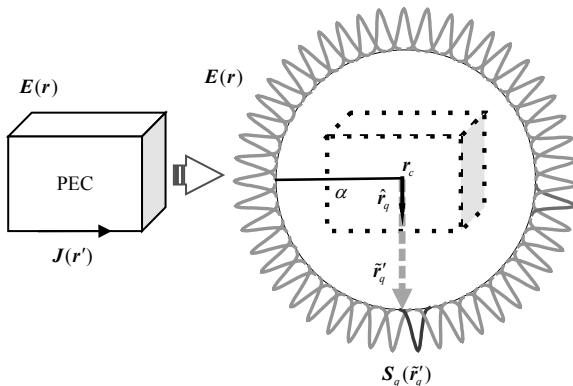


图1 目标上电流的复源点等效

根据等效原理，位于包围目标的闭合面外的场，可由位于该面上的一系列等效源产生。若将这些等效源的三维实空间位置解析延拓到六维复空间，这种等效可以写作^[10]：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{r}}'_q) \mathbf{S}_q(\tilde{\mathbf{r}}'_q) \quad (3)$$

式中， $\tilde{\mathbf{r}}'_q$ 为第 q 个等效源所处的复位置； $\mathbf{S}_q(\tilde{\mathbf{r}}'_q)$ 为该等效的矢量展开系数，由 $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ 两个分量构成； Q 为等效源的数量。如图1所示，若取实等效面为球面，球心位于 \mathbf{r}_c 处，球面半径为 α ，球面上第 q 个点的位置为 $\mathbf{r}'_q = \alpha \hat{\mathbf{r}}_q + \mathbf{r}_c$ ，则其对应的复球面上的复位置可取为 $\tilde{\mathbf{r}}'_q = \hat{\mathbf{r}}_q(\alpha + \beta i) + \mathbf{r}_c$ ， β 为波束宽度参量。

$\bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{r}}'_q)$ 是带有复参数的电型并矢格林函数，定义为：

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{r}}') = & \left[\bar{\bar{\mathbf{I}}} \left(1 + \frac{i}{k\tilde{\mathbf{R}}} - \frac{1}{(k\tilde{\mathbf{R}})^2} \right) - \right. \\ & \left. \hat{\mathbf{R}} \hat{\tilde{\mathbf{R}}} \left(1 + \frac{3i}{k\tilde{\mathbf{R}}} - \frac{3}{(k\tilde{\mathbf{R}})^2} \right) \right] \frac{e^{ik\tilde{\mathbf{R}}}}{4\pi\tilde{\mathbf{R}}} \end{aligned} \quad (4)$$

式中， $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}$ ， $\tilde{\mathbf{R}} = \sqrt{\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}}$ ， $\hat{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}} / \tilde{\mathbf{R}}$ ， $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ 是单位矢量。由于受复源点的调制，式(4)产生的场在远场具有很强的方向性，称为复源波束(或复射线)。为了高效得到等效面上复源波束的展开系数 $\mathbf{S}_q(\tilde{\mathbf{r}}'_q) = \hat{\theta} \mathbf{S}_q^\theta(\tilde{\mathbf{r}}'_q) + \hat{\phi} \mathbf{S}_q^\phi(\tilde{\mathbf{r}}'_q)$ ，可以对等效面内的每一个基函数的场(1)和复波束展开场(2)建立起远场匹配方程：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\theta\theta} & \mathbf{G}_{\theta\phi} \\ \mathbf{G}_{\theta\phi} & \mathbf{G}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_\theta \\ \mathbf{W}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\theta \\ \mathbf{E}_\phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中，

$$[\mathbf{E}_\varepsilon]_{pj} = \hat{\varepsilon} \cdot ik_0\eta_0 \int_{S'_p} \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}_p | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS'_p \quad (6)$$

表示基函数 $\mathbf{f}_j(\mathbf{r}')$ 在远区点 \mathbf{r}_p 处所产生场的 $\varepsilon (\varepsilon = \theta, \phi)$ 分量；

$$[\mathbf{G}_{\varepsilon\varepsilon'}]_{pq} = \hat{\varepsilon} \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}_p | \tilde{\mathbf{r}}'_q) \cdot \hat{\varepsilon}' \quad (7)$$

表示等效面内电流产生场和复源波束场相应分量在远区的匹配矩阵。通过求解式(5)，可以获得当前组的复源波束展开矩阵 \mathbf{W}_θ 。 \mathbf{W}_ϕ 中 $[\mathbf{W}_\varepsilon]_{qj}$ 表示第 j 个基函数向第 q 个复源波束展开的权系数。

利用该展开矩阵，可以方便地由目标表面电流展开系数 \mathbf{I} 得到可以获得等效面上的复源波束展开系数：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_\theta \\ \mathbf{S}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_\theta \\ \mathbf{W}_\phi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{I} \quad (8)$$

对于电大目标，由于基函数和所需的展开波束的增加，为了提高计算效率，可以仿照MLFMA对目标建立多层次结构，并利用子组的复源点波束系数递归地获得父组的系数。为此，可以仿照式(5)建立子父组间的复源点波束的远场匹配矩阵：

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{G}}_{\theta\theta} & \widetilde{\mathbf{G}}_{\theta\phi} \\ \widetilde{\mathbf{G}}_{\theta\phi} & \widetilde{\mathbf{G}}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\theta\theta} & \mathbf{A}_{\theta\phi} \\ \mathbf{A}_{\theta\phi} & \mathbf{A}_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{E}}_{\theta\theta} & \widetilde{\mathbf{E}}_{\theta\phi} \\ \widetilde{\mathbf{E}}_{\theta\phi} & \widetilde{\mathbf{E}}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中，

$$[\widetilde{\mathbf{E}}_{\varepsilon\varepsilon'}]_{p_l q_{l+1}} = \hat{\varepsilon} \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}_{p_l} | \tilde{\mathbf{r}}'_{q_{l+1}}) \hat{\varepsilon}' \quad (10)$$

表示第 $l+1$ 层的子组上位于 $\tilde{\mathbf{r}}'_{q_{l+1}}$ 的 ε' 极化的复源波束，在远区点 \mathbf{r}_{p_l} 处所产生场的 ε 分量：

$$[\widetilde{\mathbf{G}}_{\varepsilon\varepsilon'}]_{p_l q_l} = \hat{\varepsilon} \cdot \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}_{p_l} | \tilde{\mathbf{r}}'_{q_l}) \cdot \hat{\varepsilon}' \quad (11)$$

同式(7)相似, 式(11)表示第 l 层父组等效面内的场和复波束场的匹配矩阵, 其实、复位置均同父组相关。

通过求解式(9), 可以获得 $l+1$ 层子组波束的在 l 层父组的聚合矩阵:

$$\mathbf{A}_{l,l+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\theta\theta} & \mathbf{A}_{\theta\phi} \\ \mathbf{A}_{\theta\phi} & \mathbf{A}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中, $[\mathbf{A}_{ee}]_{p_{l+1}q_l}$ 表示每个子层波束和父层波束的映射系数。利用聚合矩阵, 父组的复源波束展开系数可以表示为:

$$\mathbf{S}_l = \mathbf{A}_{l,l+1} \cdot \mathbf{S}_{l+1} \quad (13)$$

特别地, 当子组位于最细层时, 应使用式(8)直接计算其展开系数。

2 多层复源点波束法

对于金属表面的电场积分方程(EFIE), 其阻抗矩阵元素为:

$$\mathbf{Z}_{ij} = \int_S \mathbf{f}_i(\mathbf{r}) \cdot \int_{S'} \overline{\mathbf{G}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_j(\mathbf{r}') dS' dS \quad (14)$$

在源和场组的等效面上利用两次式(3)的复源波束等效, 可以将两个远区组 m 和 m' 之间的阻抗矩阵 $\mathbf{Z}_{mm'}$ 和电流系数 $\mathbf{I}_{m'}$ 的相乘改写为:

$$\mathbf{Z}_{mm'} \cdot \mathbf{I}_{m'} = \mathbf{W}_m^T \mathbf{T}_{mm'} \mathbf{W}_{m'} \mathbf{I}_{m'} \quad (15)$$

式中, $\mathbf{W}_{m'}$ 、 \mathbf{W}_m 分别是式(8)中定义的组 m 和 m' 的复源波束展开矩阵; 上标T表示矩阵转置。

$$\mathbf{T}_{mm'} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{mm'}^{\theta\theta} & \mathbf{T}_{mm'}^{\theta\phi} \\ \mathbf{T}_{mm'}^{\theta\phi} & \mathbf{T}_{mm'}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (16)$$

为组 m 和 m' 之间的转移因子矩阵, 其块矩阵元素为:

$$[\mathbf{T}_{mm'}^{ee'}]_{pq} = \hat{\varepsilon} \cdot \overline{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{r}}_{p,m} | \tilde{\mathbf{r}}'_{q,m'}) \cdot \hat{\varepsilon}' \quad (17)$$

式中, $\tilde{\mathbf{r}}_{p,m}$ 、 $\tilde{\mathbf{r}}'_{q,m'}$ 分别是两个组等效面上的复源点位置。式(15)表示源组上的电流使用式(8)展开成等效面上的复源波束, 然后将其转移到场组上, 最后使用式(8)的逆过程, 将场组的复源波束配置到相应的基函数上。类似于MLFMA, 展开成复源波束的过程可以使用式(12)进行加速, 以加快矩阵和矢量相乘的效率, 降低内存开销。该矩矢相乘可以表示为:

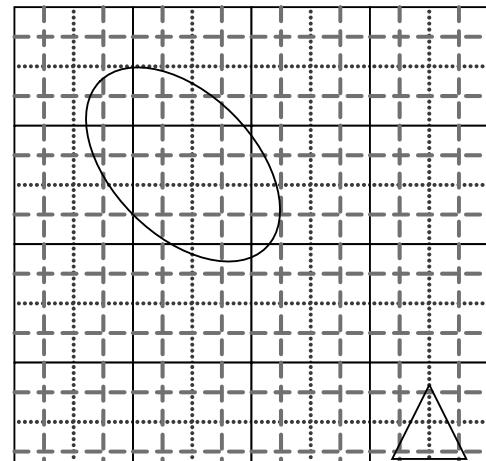
$$\mathbf{Z}_{mm'} \cdot \mathbf{I}_{m'} = \mathbf{W}_m^T \prod_{l=2}^{L-1} \mathbf{A}_{l,l+1}^T \mathbf{T}_{m_2, m'_2} \prod_{l=L-1}^2 \mathbf{A}_{l,l+1} \mathbf{W}_{m'} \mathbf{I}_{m'} \quad (18)$$

式中, \mathbf{T}_{m_2, m'_2} 表示组 m 和 m' 在第2层对应的父组的转移因子矩阵; L 表示最细层。

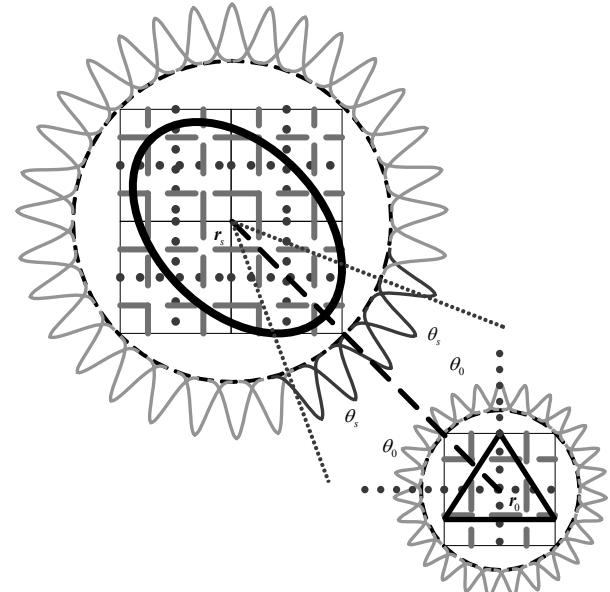
3 多层复源点波束法的自适应策略

对于多目标问题, 不同目标间的分布范围非常广, 使用传统的八叉树结构对整个计算空间进行划

分, 会导致计算量增加。为此, 本文使用区域分解技术进行空间划分, 对于每个区域内的目标, 可以使用多层复源点波束方法计算; 由于在计算子区时, 获得了该区域的复源点波束展开, 不同区域之间可以利用该复源点波束之间进行耦合。使用两种方式进行空间划分如图2所示



a. 使用传统方式进行空间划分



b. 使用区域分解进行空间划分

图2 区域分解和自适应策略

3.1 目标的区域分解

如图2a所示的两个目标, 使用传统的八叉树进行整体空间划分时, 会造成过多的空组和过多的层数。在使用区域分解技术后, 每个目标都处在独立的八叉树中, 不会产生额外的空组和过多的分层数。

3.2 自适应转移

对于传统MLFMA方法, 两个需要进行转移操作的不同组总是要处在相同的层中, 也就是组大小必须一致, 否则需要进行聚合或配置使得两个组大小

一致。而对于式(16)中的转移操作，没有严格要求二者的大小一致，因此，可以实现按区域大小自适应地进行转移，进而可以避免额外的聚合和配置计算。

图2b所示的两个不同大小的组，它们之间的转移矩阵元素为：

$$[\mathbf{T}_{o,s}^{ee'}]_{pq} = \hat{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{r}}_p(\alpha_o + \beta_o i) + \mathbf{r}_o | \hat{\mathbf{r}}_q(\alpha_s + \beta_s i) + \mathbf{r}_s) \cdot \hat{\varepsilon}' \quad (19)$$

式中， α_o 、 α_s 和 β_o 、 β_s 分别为组O和S的等效面半径和波束宽度参数。

由于CSB具有方向性，又可以通过组之间的相对位置，自适应地选择转移矩阵中的主要元素，避免额外地转移。定义CSB在波束宽度参量调制下的波束宽度为 θ_o 和 θ_s ，当CSB的指向同组中心之间的连线夹角分别超过 θ_o 和 θ_s 时，不再参与转移。

4 数值算例

为了验证本文方法的正确性，对两组全金属多目标问题进行了计算。

4.1 双金属球分析

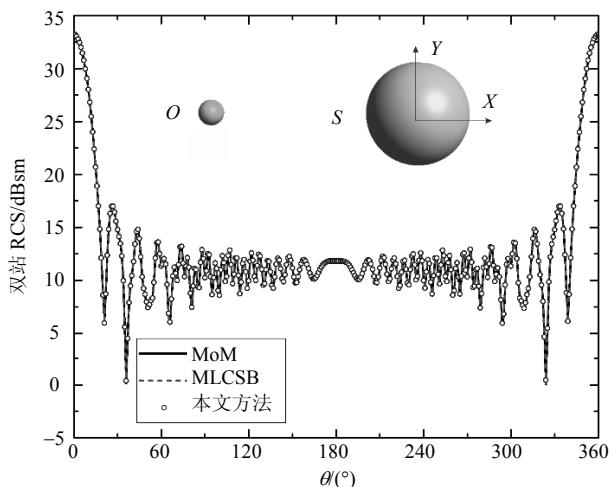


图3 使用本文方法、MLCSB和MoM计算的两个金属球双站RCS

如图3所示，本文首先计算了由两个常见金属球组成的简单多体散射模型。其中大球S直径4 m，其球心位于坐标原点；小球O直径0.5 m，其球心位于 $(-13.75, 0, 0)$ 处。采用平面波进行激励，入射波波长为1 m，频率300 MHz，沿x轴正方向入射($\theta=90^\circ, \varphi=180^\circ$)，y方向极化。目标使用RWG基函数进行剖分，其未知量分别为345和18 297。最细层尺寸设置为0.25 m，大球共分5层，在其高层的等效面上共有1 758个CSB等效源；小球在其等效面上共有130个CSB等效源。在使用自适应转移时， θ_s 为 120° ，使得大球上向小球进行转移降低到1 332个；

小球尺寸较小，CSB的方向性并不明显，使用全部波束进行转移。

图3还给出了使用本文方法、使用MLCSB和使用MoM计算的双站雷达散射截面(RCS)结果，可以看到，3种方法的结果完全一致。

4.2 直升机与导弹序列分析

本文最后计算了一架直升机以及由其发射的3枚导弹序列。直升机的尺寸为 $8.6 \text{ m} \times 6.3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ ；发射出去的导弹长1 m，其圆柱部分的直径为0.15 m；导弹和直升机之间的间距如图4所示。该问题在实际应用中有重要意义，然而在使用传统方法计算时，因多个目标间隔较远，使得计算极为复杂。使用RWG基函数进行几何剖分后，3枚导弹的未知量为1 088，直升机部分为42 396。计算采用平面波进行激励，入射波波长为1 m，频率300 MHz，沿x轴正方向入射($\theta=90^\circ, \varphi=180^\circ$)，y方向极化。图5对比了通过本文方法和使用MLCSB计算的双站RCS结果，对比显示两种方法的结果吻合良好。

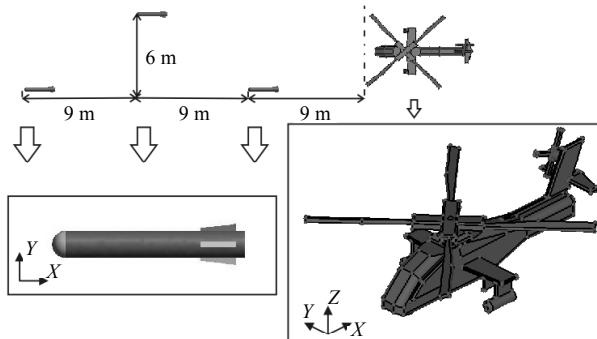


图4 直升机与3枚导弹示意图

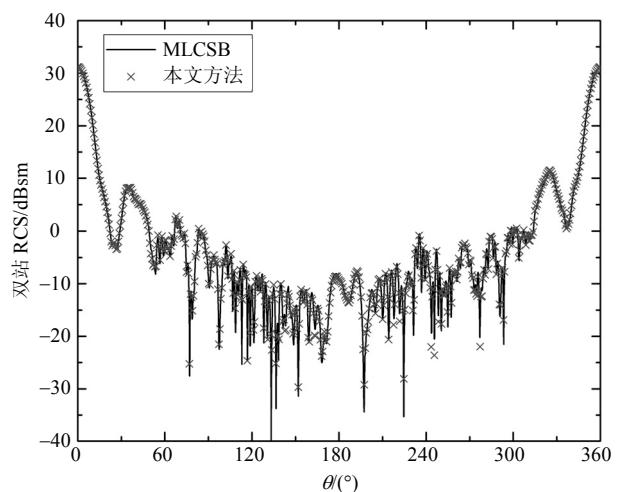


图5 图4中目标使用本文方法和MLCSB计算的双站RCS

在使用本文方法计算时，由于使用了基于区域分解的空间划分和自适应的复源点波束转移，计算的内存占用为6.033 GB，单次矩矢相乘时间为1.4 s；

而在使用 MLCSB 整体计算时, 内存占用为 12.975 GB, 单次矩阵相乘时间为 2.22 s。

5 结束语

本文针对多目标的散射计算问题, 提出了自适应的多层次复源点波束法来加速矩阵法的远区计算。该方法首先基于区域分解对每个目标进行单独分组和空间划分; 随后在每个目标上使用多层次复源点波束法来计算阻抗矩阵和电流矢量的相乘, 同时获得整个目标在当前电流矢量下的复源点波束展开系数; 最后使用自适应的多层次复源点波束转移来计算目标间电流耦合。结果表明, 本文方法计算结果准确, 并且可以节约计算所需的时间和内存。

参 考 文 献

- [1] HU J, LI Y K, NIE Z. Modal characteristic basis function method for solving scattering from multiple conducting bodies of revolution[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(2): 870-877.
- [2] LI Y, HU J, NIE Z. Solving scattering from multiple bodies of revolution by modal characteristic basis function method with sparse matrix technique[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2016, 15: 806-809.
- [3] 胡俊, 聂在平, 王军, 等. 三维电大目标散射求解的多层次快速多极子方法[J]. 电波科学学报, 2004(5): 509-514.
HU Jun, NIE Zai-ping, WANG Jun, et al. Multilevel fast multipole algorithm for solving scattering from 3-D electrically large object[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2004(5): 509-514.
- [4] LI M, SU T, CHEN R. Equivalence principle algorithm with body of revolution equivalence surface for the modeling of large multiscale structures[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(5): 1818-1828.
- [5] SU T, DU L, CHEN R. Electromagnetic scattering for multiple PEC bodies of revolution using equivalence principle algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(5): 2736-2744.
- [6] 李冰, 马萌晨, 雷明珠. 粗糙海面与其上方多目标复合散射的混合算法[J]. 物理学报, 2017(5): 31-38.
- LI Bing, MA Meng-chen, LEI Ming-zhu. Hybrid algorithm for composite electromagnetic scattering from the multi-target on and above rough sea surface[J]. Acta Physica Sinica, 2017(5): 31-38.
- [7] 芮锡, 胡俊, 聂在平. 基于多区迭代的多导体目标散射分析[J]. 系统工程与电子技术, 2008(11): 2116-2118.
- RUI Xi, HU Jun, NIE Zai-ping. Electromagnetic scattering analysis of multipole conductor by multi-region iterative method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008(11): 2116-2118.
- [8] SU Ting, LI Meng-meng, CHEN Ru-shan. Domain decomposition scheme with equivalence spheres for the analysis of aircraft arrays in a large-scale range[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2016, 73: 42-49.
- [9] 崔志伟, 韩一平, 于美平. 一种分析多目标散射问题的区域分解方法[J]. 电波科学学报, 2014(4): 606-609.
CUI Zhi-wei, HAN Yi-ping, YU Mei-ping. A domain decomposition method for scattering by multiple objects[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2014(4): 606-609.
- [10] TAP K. Complex source point beam expansions for some electromagnetic radiation and scattering problems[D]. Ohio, USA: The Ohio State University, 2007.
- [11] HANSEN T B, KAISER G. Huygens' principle for complex spheres[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(10): 3835-3847.
- [12] MARTINI E, MACI S. Generation of complex source point expansions from radiation integrals[J]. Progress in Electromagnetics Research, 2015, 152(3): 17-31.
- [13] TAP K, PATHAK P H, BURKHOLDER R J. Complex source beam-moment method procedure for accelerating numerical integral equation solutions of radiation and scattering problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(4): 2052-2062.
- [14] 吴川. 基于高斯波束高频方法的分析和研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2015.
WU Chuan. Analysis and research on gaussian beam based high frequency method[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2015.
- [15] FAN Z H, HU X, CHEN R S. Multilevel complex source beam method for electromagnetic scattering problems[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2015, 14: 843-846.