

# 节点增减机制下的病毒传播模型及稳定性

王 刚\*, 胡 鑫, 陆世伟

(空军工程大学信息与导航学院 西安 710077)

**【摘要】**该文针对网络节点的增减情况,研究网络病毒传播模型及其稳定性问题。考虑网络节点的新增和移除,构建了基于节点增减机制下的网络病毒传播模型,并运用Routh-Hurwitz稳定性判据定理,分析了模型的平衡点稳定性和基本再生数 $R_0$ 及其对病毒传播稳定性的影响。最后,通过改变增加节点数量以及易感状态、感染状态的节点移除率,研究3个参数对病毒传播过程的影响,并给出了仿真实验验证。仿真结果表明,通过调节网络节点的增减数量,能够控制病毒在网络中的传播。

**关键词** 增减机制; 模型; 网络; 稳定性; 病毒传播

中图分类号 TP393 文献标志码 A doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2019.01.013

## Virus Spreading Model and Its Stability Based on the Mechanism of Node Increasing and Decreasing

WANG Gang\*, HU Xin, and LU Shi-wei

(Institute of Information and Navigation, Air Force Engineering University Xi'an 710077)

**Abstract** According to the case of node increasing and decreasing, the network virus spreading model and its stability are researched. Considering the increasing and decreasing of network nodes, the network virus spreading model is constructed based on the mechanism of node increasing and decreasing. And then the stability of the presented model, basic reproductive number  $R_0$ , and the influence of virus spreading stability are analyzed via Routh-Hurwitz stability criterion. Finally, the effects of three parameters on the process of virus transmission are studied by changing the number of nodes and the removal rate of susceptible and infected nodes. Simulations are demonstrated that network virus spreading can be controlled by effective adjusting the number of network nodes.

**Key words** mechanism of increasing and decreasing; model; network; stability; virus spreading

现实世界中,病毒传播现象广泛存在,如人群中SARS病毒的传播、互联网上计算机病毒的传播以及社会人群中谣言的传播等。在网络安全领域,病毒传播问题正引起越来越广泛的关注。根据病毒传播过程中网络节点所处状态、转换关系的不同,网络病毒传输呈现出不同的传播机制,节点的性能也存在一定的差异。围绕网络病毒传播建模和性能,文献[1]提出了改进SI(susceptible-infected)模型,分析其正周期解的存在性和全局渐进性;文献[2-3]提出了具有双重感染假设的非自治随机SIS(susceptible-infected-susceptible)动力学模型,并对其全局稳定性进行分析;文献[4-5]运用Liouville和随机Liouville方程,研究了非平衡统计机制下的SIR(susceptible-infected-removed)模型及其稳定性分析;文献[6-7]提出具有高感染率和时延特性的SIRS

(susceptible-infected-removed-susceptible)临时免疫模型,并运用等效概率密度矩阵研究相应病毒传播机制。总体来看,现有研究主要集中在网络节点要素数目和要素关系相对稳定状况下的网络病毒传播,所考虑的网络环境相对封闭,这一理想情况和网络实际存在差异<sup>[2-7]</sup>。在现实环境中,无论是互联网等社会网络,还是专用的银行网络和军事网络,都是具有一定开放性的复杂网络,会受到外界自然条件和人为等因素的影响而造成物理毁伤或功能降阶,又或者由于任务和能力需求调整和增减网络节点,从而在网络病毒传播中形成特有的网络节点增减机制,并直接影响到既有网络病毒传播中的转换关系、行动效率和稳定性<sup>[7-8]</sup>。

实际网络中,部分节点单元具有病毒库,能对相应病毒入侵进行检测查杀,即能对病毒库中已有

收稿日期:2017-05-10;修回日期:2018-05-29

基金项目:国家自然科学基金(61573017);国家社科基金(15BGJ007)

作者简介:王刚(1976-),博士,教授,主要从事网络空间安全方面的研究. E-mail: wglxl@nudet.edu.cn

类型的病毒产生免疫。然而, 对于多种病毒的攻击, 病毒库难以保证完全匹配每种病毒, 免疫节点的免疫功能丧失, 继而转化为易感节点。相比较其他模型, SIRS模型更加适用于上述网络中病毒传播模式。基于以上分析, 本文以病毒传播SIRS模型为基础, 提出节点增减机制下的网络病毒传播SIRS模型, 运用Routh-Hurwitz稳定判据研究对应系统平衡点的稳定性, 并给出仿真验证。

## 1 模型构建

现实网络具有开放性和复杂性等特点, 网络节点的增减是网络动态变化的重要形式, 其具体表现为: 1) 网络节点到达自身“寿命”的自然移除或遭受外界自然环境、人为因素以及网络病毒攻击而造成的物理损毁<sup>[8-9]</sup>。同时, 为维持网络的性能和动态平衡, 需要选择性的增加具有特定功能的新节点; 2) 为满足网络行动任务和特定能力的需要, 网络将有选择性的增加或减少具有相关功能、业务的节点, 使得网络具有该功能特性, 以完成网络行动和业务承载任务<sup>[10]</sup>。

节点增减机制下的SIRS模型如图1所示。

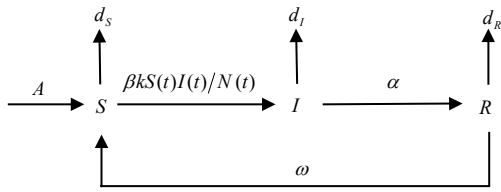


图1 节点开放机制下的SIRS模型

图中,  $A$ 表示网络中的新增节点数;  $d_s$ 表示网络中易感节点的损毁(移除)率;  $d_i$ 表示网络中感染节点的损毁(移除)率;  $d_r$ 表示网络中免疫节点的损毁(移除)率; 转移参数 $\beta$ 为网络节点与网络病毒相互接触的概率; 转移参数 $\alpha$ 为网络节点具有抗病毒攻击感染能力的概率; 转移参数 $\omega$ 为网络节点抗病毒能力逐渐减弱的概率;  $k$ 为网络节点的度。

根据微分系统动力学原理, 模型对应的数学表达式为:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \beta k S(t) I(t) / N(t) - d_s S(t) + \omega R(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta k S(t) I(t) / N(t) - \alpha I(t) - d_i I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \alpha I(t) - \omega R(t) - d_r R(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $S(t)$ 、 $I(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示 $t$ 时刻易感节点、感染节点和免疫节点的数量;  $N(t)$ 表示 $t$ 时刻网络

节点总数;  $\beta k S(t) I(t) / N(t)$ 表示 $t$ 时刻网络易感节点遭受病毒感染的概率。

## 2 稳定性分析

为求解式(1)的平衡点, 令:  $\frac{dS(t)}{dt} = 0$ ,

$\frac{dI(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{dR(t)}{dt} = 0$ , 可得式(1)中的一个平衡点

$\mathbf{P}^0(S^0, I^0, R^0) = (A/d_s, 0, 0)$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 该平衡点的感染节点数量 $I(\infty) = 0$ , 称该平衡点为无病毒平衡点。假设网络节点总数 $N(t)$ 短时间内相对稳定,

求解式(1)中的另一个平衡点, 其中,

$I^1 = \frac{(d_r + \omega)[\beta k A - N(\alpha + d_i)d_s]}{\beta k [(d_i + \alpha)(d_r + \omega) - \alpha \omega]}$ , 对应式(1)的

$R_0 = \frac{A\beta k}{N(d_i + \alpha)d_s}$ , 即  $I^1 = \frac{A(d_r + \omega)[1 - 1/R_0]}{[(d_i + \alpha)(d_r + \omega) - \alpha \omega]}$ 。

分析可知, 当且仅当基本再生数 $R_0 \leq 1$ 时, 式(1)中仅存在无病毒平衡点 $\mathbf{P}^0$ ; 当且仅当基本再生数 $R_0 > 1$ 时, 式(1)仅存在感染源平衡点 $\mathbf{P}^1$ 。根据式(1)得任意平衡点 $\mathbf{P}^*$ 的Jacobi矩阵:

$$J(\mathbf{P}^*) = \begin{bmatrix} \frac{-\beta k}{N} I - d_s & \frac{kS\beta}{N} & \omega \\ \frac{\beta k}{N} I & \frac{kS\beta}{N} - d_i - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\omega - d_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

**定理 1** 当 $R_0 \leq 1$ 时, 无病毒平衡点 $\mathbf{P}^0$ 局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 平衡点 $\mathbf{P}^0$ 不稳定。

证明: 由式(2)可得平衡点 $\mathbf{P}^0$ 处的Jacobi矩阵为:

$$J(\mathbf{P}^0) = \begin{bmatrix} -d_s & \frac{A\beta k}{Nd_s} & \omega \\ 0 & \frac{A\beta k}{Nd_s} - d_i - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\omega - d_r \end{bmatrix} \quad (3)$$

$J(\mathbf{P}^0)$ 的特征值行列式为:

$$\begin{vmatrix} \lambda I - J(\mathbf{P}^0) \\ \lambda + d_s & \frac{A\beta k}{Nd_s} & -\omega \\ 0 & \lambda - \frac{A\beta k}{Nd_s} + d_i + \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda + \omega + d_r \end{vmatrix} \quad (4)$$

令 $|\lambda I - J(\mathbf{P}^0)| = 0$ , 可得矩阵 $J(\mathbf{P}^0)$ 对应的特征多项

式为:

$$(\lambda + d_s)(\lambda + d_r + \omega) \left[ \lambda - \frac{A\beta\langle k \rangle - Nd_s(d_i + \alpha)}{Nd_s} \right] = 0 \quad (5)$$

式中, 对应特征根  $\lambda_1 = -d_s$ ;  $\lambda_2 = -(d_r + \omega)$ ,  $\lambda_3 = [A\beta k - Nd_s(d_i + \alpha)]/Nd_s$ 。当  $R_0 \leq 1$  时, 式(5)的3个特征根均为负值, 则无病毒平衡点  $\mathbf{P}^0$  局部渐近稳定; 当  $R_0 > 1$  时,  $\lambda_3 > 0$ , 式(5)存在一个正值特征根, 平衡点  $\mathbf{P}^0$  局部不稳定, 证毕。

定理1表明, 在遂行网络行动过程中, 当网络病毒的攻击感染能力未达到网络安全防御门限时, 病毒的传播最终消失, 感染节点数为0。

**定理 2** 当  $R_0 > 1$  时, 平衡点  $\mathbf{P}^1(S^1, I^1, R^1)$  局部渐近稳定。

证明 由式(3)可得平衡点  $\mathbf{P}^1$  处的Jacobi矩阵为:

$$J(\mathbf{P}^1) = \begin{bmatrix} \frac{-\beta k}{N} I^1 - d_s & -d_i - \alpha & \omega \\ \frac{\beta k}{N} I^1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\omega - d_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

$J(\mathbf{P}^1)$  的特征值行列式为:

$$|\lambda I - J(\mathbf{P}^1)| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{\beta k}{N} I^1 + d_s & d_i + \alpha & -\omega \\ -\frac{\beta k}{N} I^1 & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda + \omega + d_r \end{vmatrix} \quad (7)$$

令  $|\lambda I - J(\mathbf{P}^1)| = 0$ , 得矩阵  $J(\mathbf{P}^1)$  所对应的特征多项式为:

$$\lambda^3 + \mu_1 \lambda^2 + \mu_2 \lambda + \mu_3 = 0 \quad (8)$$

式中,  $\mu_1 = \frac{\beta k}{N} I^1 + \omega + d_s + d_i + d_r$ ;

$$\mu_2 = \frac{k\beta I^1}{N} (\omega + \alpha + d_i + d_r) + (\omega + d_r)(d_s + d_i);$$

$$\mu_3 = \frac{\beta k I^1}{N} (d_r d_i + d_i \omega + d_r \alpha)。$$

经计算可得  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ ,  $\mu_1 \mu_2 - \mu_3 > 0$ , 根据文献[11]稳定判据, 式(8)对应的特征根全部位于左半平面, 对应  $J(\mathbf{P}^1)$  的特征值实部为负。可知当基本再生数  $R_0 > 1$  时, 感染源平衡点  $\mathbf{P}^1$  局部渐近稳定, 证毕。

定理2表明, 在遂行网络行动过程中, 当网络病

毒的攻击感染能力超过网络空间安全防御门限时, 网络中病毒将持续存在, 并逐渐趋于稳定状态。

### 3 仿真分析

定理1和定理2已经证明, 当  $R_0 \leq 1$  时, 系统在无病毒平衡点  $\mathbf{P}^0$  处局部渐近稳定, 即网络病毒最终会被消除; 当  $R_0 > 1$  时, 系统在感染源平衡点  $\mathbf{P}^1(S^1, I^1, R^1)$  局部渐近稳定, 即网络病毒将持续存在。为了验证理论分析的合理性, 围绕基本再生数  $R_0 = A\beta k / Nd_s(\alpha + d_i)$ , 重点分析网络增加节点数  $A$ 、易感节点移除率  $d_s$  和感染节点移除率  $d_i$  这3个参数对病毒传播的影响。Matlab组件Simulink可以仿真求解非线性微分方程组, 适用于网络病毒传播动力学模型的求解分析, 以下使用该工具分析3个参数对网络病毒传播的影响, 进而验证模型的有效性及其系统随时间的演进关系。未作特别说明情况下, 仿真中的单位时间为1s, 同时参照文献[6,12]设置变量的初值和相关参数, 令网络节点的总数为  $N = 1\,000$ , 网络节点的平均度为  $k = 30$ , 考虑初始时刻网络中只存在大量易感节点和少量感染节点, 对应状态节点初值为  $(S(0), I(0), R(0)) = (900, 100, 0)$ 。

#### 3.1 网络增加节点 $A$ 对病毒传播的影响

针对网络增加节点  $A$  进行动力学研究和临界分析。参照文献[6,12]选取参数  $\alpha = 0.8$ ,  $d_s = 0.05$ ,  $d_i = 0.1$ ,  $d_r = 0.04$ ,  $\omega = 0.1$ ,  $\beta = 0.2$ , 令  $R_0 = A\beta k / Nd_s(\alpha + d_i) = 1$ , 可知网络增加节点的传播阈值  $A_{\text{lim}} = Nd_s(\alpha + d_i) / \beta k = 7.5$ 。当  $A \leq A_{\text{lim}}$  时, 网络在无病毒平衡点  $\mathbf{P}^0$  处局部渐近稳定; 当  $A > A_{\text{lim}}$  时, 网络在感染源平衡点  $\mathbf{P}^1$  处局部渐近稳定。分别取网络增加节点  $A_1 = 5$  和  $A_2 = 10$ , 仿真结果如图2和图3所示。当  $A_1 = 5 < A_{\text{lim}}$  时, 系统局部渐近稳定在无病毒平衡点  $\mathbf{P}^0$  处; 当  $A_2 = 10 > A_{\text{lim}}$  时, 系统局部渐近稳定在感染源平衡点  $\mathbf{P}^1$  处, 仿真结果与理论证明相同。

图4表示不同网络增加节点  $A$  下, 网络易感节点  $S$  随时间的变化关系,  $A$  在区间[0,15]内取值, 步长为5。由图4可知, 当网络在无病毒平衡点  $\mathbf{P}^0$  处局部渐近稳定时, 随着网络增加节点  $A$  逐渐增大, 网络易感节点的数量逐渐增大; 当网络在感染源平衡点  $\mathbf{P}^1$  处局部渐近稳定时, 网络易感节点的数量基本不受网络增加节点  $A$  的影响。仿真结果表明, 合理调节网络增加节点  $A$  的数量, 能控制病毒在网络中的传播规模, 最终将网络稳定在无病毒状态。

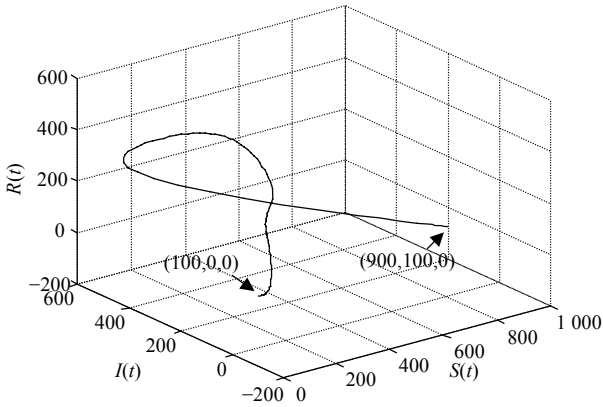


图2 A=5 的系统演进

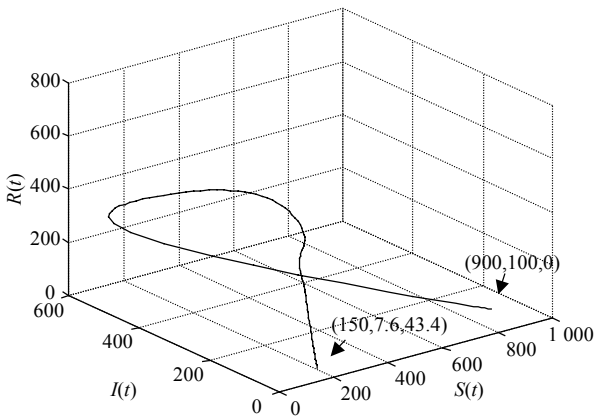


图3 A=10 的系统演进

局部渐近稳定在感染源平衡点  $P^1$  处；当  $d_s = 0.1 > d_{s_{lim}}$  时，系统局部渐近稳定在无病毒平衡点  $P^0$  处，仿真结果与理论证明相同。

图7表示不同易感节点移除率  $d_s$  下，网络易感节点  $S$  随时间的变化关系， $d_s$  在区间  $[0, 0.15]$  内取值，步长为  $0.05$ 。由图7可知，当网络在感染源平衡点  $P^1$  处局部渐近稳定时，网络易感节点的数量不受易感节点移除率  $d_s$  的影响；当网络在无病毒平衡点  $P^0$  处局部渐近稳定时，随着易感节点移除率  $d_s$  逐渐增大，网络易感节点的数量逐渐减少。

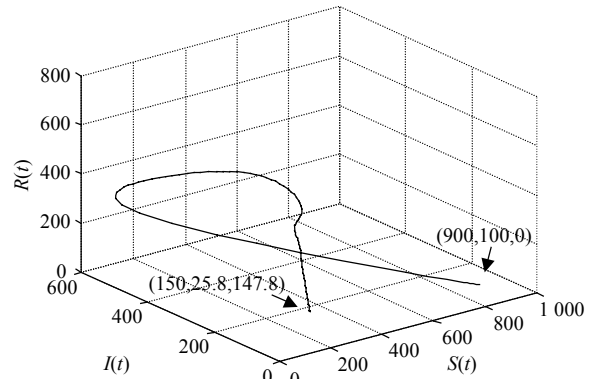


图5  $d_s = 0.01$  的系统演进

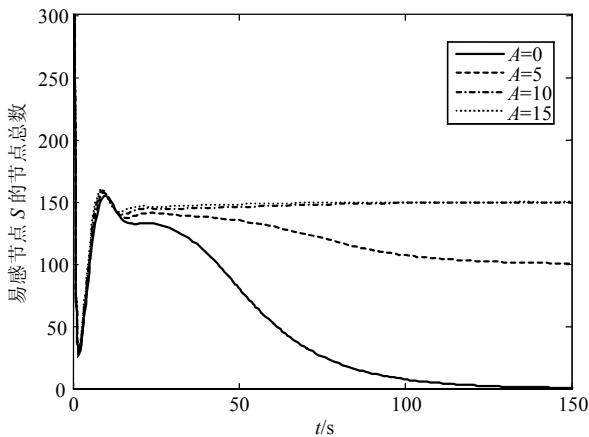


图4 不同 A 对应  $S(t)$  的变化曲线

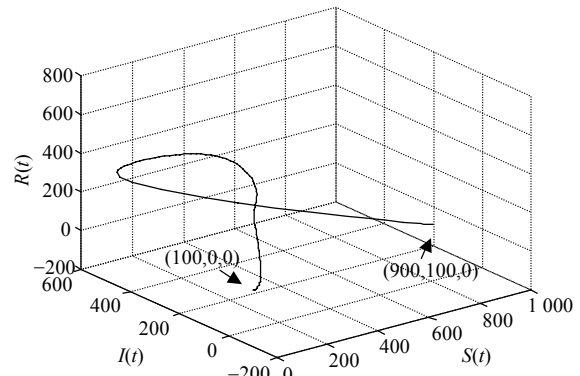


图6  $d_s = 0.1$  的系统演进

### 3.2 易感节点移除率 $d_s$ 对病毒传播的影响

针对易感节点移除率  $d_s$  进行动力学研究和临界分析。选取参数  $A=10, \alpha=0.8, d_I=0.1, d_R=0.04, \omega=0.1, \beta=0.2$ ，根据  $R_0=1$  可知易感节点移除率的传播阈值  $d_{s_{lim}} = A\beta k / N(d_I + \alpha) = 0.067$ 。即当  $d_s \leq d_{s_{lim}}$  时，网络在感染源平衡点  $P^1$  处局部渐近稳定；当  $d_s > d_{s_{lim}}$  时，网络在无病毒平衡点  $P^0$  处局部渐近稳定。分别取  $d_s = 0.01, 0.1$ ，仿真结果如图5和图6所示。当  $d_s = 0.01 < d_{s_{lim}}$  时，系统

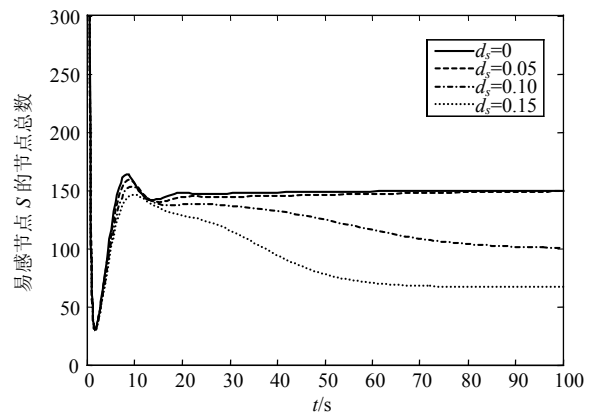


图7 不同  $d_s$  对应  $S(t)$  变化曲线

仿真结果表明，易感节点移除率  $d_s$  越小，网络

中易感节点数量越多,相应的感染节点越少,网络病毒传播规模越小。因此,合理调节易感节点移除率 $d_s$ ,能有效控制病毒在网络中的传播规模,最终将网络稳定在无病毒状态。

### 3.3 感染节点移除率 $d_I$ 对病毒传播的影响

针对感染节点移除率 $d_I$ 进行动力学研究和临界分析。选取仿真实验参数 $A=10$ , $\alpha=0.8$ , $d_s=0.05$ , $d_r=0.04$ , $\omega=0.1$ , $\beta=0.2$ ,根据 $R_0=1$ 可知感染节点移除率的传播阈值 $d_{I_{lim}}=(A\beta k/Nd_s)-\alpha=0.4$ 。即当 $d_I \leq d_{I_{lim}}$ 时,网络在感染源平衡点 $P^1$ 处局部渐近稳定;当 $d_I > d_{I_{lim}}$ 时,网络在无病毒平衡点 $P^0$ 处局部渐近稳定。分别取 $d_I=0.2$ 和 $d_I=0.6$ ,仿真结果如图8和与9所示。当 $d_I=0.2 < d_{I_{lim}}$ 时,系统局部渐近稳定在感染源平衡点 $P^1$ 处;当 $d_I=0.6 > d_{I_{lim}}$ 时,系统局部渐近稳定在无病毒平衡点 $P^0$ 处仿真结果与理论证明相同。

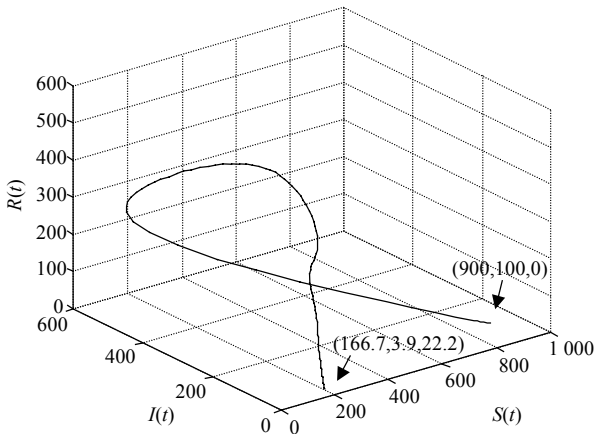


图8  $d_I=0.2$ 的系统演进

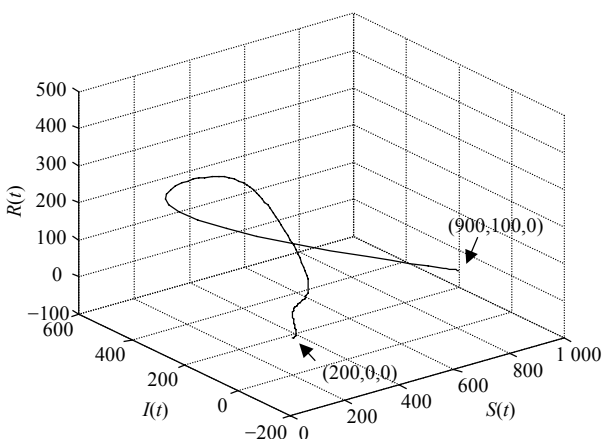


图9  $d_I=0.6$ 的系统演进

图10表示不同感染节点移除率 $d_I$ 下,网络易感节点 $S$ 随时间的变化关系, $d_I$ 在区间 $[0,0.6]$ 内取值,步长为0.2。由图10可知,当网络在感染源平衡点 $P^1$ 处局部渐近稳定时,随着感染节点移除率 $d_I$ 逐渐增

大,网络易感节点的数量逐渐增大;当网络在无病毒平衡点 $P^0$ 处局部渐近稳定时,网络易感节点的数量不受感染节点移除率 $d_I$ 的影响。

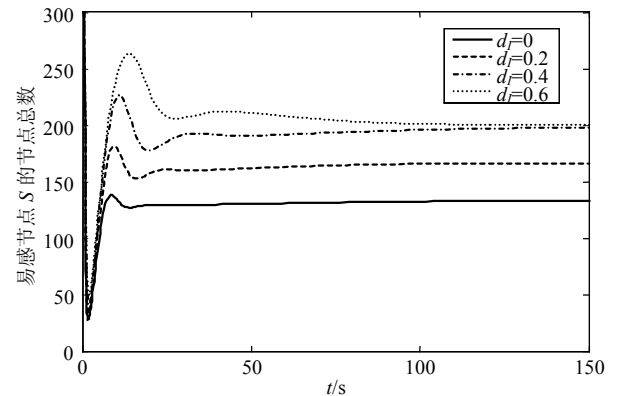


图10 不同 $d_I$ 对应 $S(t)$ 变化曲线

仿真结果表明,合理调节感染节点移除率 $d_I$ ,能有效控制病毒在网络中的传播规模,使得网络稳定在无病毒状态。

## 4 结束语

本文研究了节点增减机制下的网络病毒传播问题。针对复杂网络环境,考虑网络节点增减情况,提出了节点增减机制下的SIRS模型,并结合文献[11]稳定判据,给出了模型的稳定性证明,即当基本再生数 $R_0 \leq 1$ 时,系统局部渐近稳定于平衡点 $P^0$ ;当 $R_0 > 1$ 时,系统局部渐近稳定于平衡点 $P^1$ 。最后,以 $R_0$ 为基准,分别验证了网络增加节点、易感节点移除率和感染节点移除率的病毒传播阈值对病毒传播的影响。仿真结果表明通过合理调节网络节点的增减数量,能够有效控制病毒在网络中的传播。

## 参考文献

- [1] LE V H. Existence and global asymptotic behavior of positive periodic solution of an SI epidemic model with delays[J]. Dynamical Systems, 2017, 32(2): 295-303.
- [2] WEI X D, LIU L J, ZHOU W S. Global stability and attractivity of a network-based SIS epidemic model with nonmonotone incidence rate[J]. Physica A, 2017, 469: 789-798.
- [3] QI H K, LIU L D, MENG X Z. Dynamics of a nonautonomous stochastic SIS epidemic model with double epidemic hypothesis[J]. Complexity, 2017 (2017): 1-14.
- [4] KAZUMI O. Nonequilibrium statistical mechanics of a susceptible-infected-recovered epidemic model[J]. Physical Review E, 2017, 96(2): 022404.
- [5] CARVALHO J P, EVANDRO M, GUSTAVO B V. Global stability of fractional SIR epidemic model[J]. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, 2017, 5(1): 1-7.

- [6] THOMAS W. Equivalent probability density moments determine equivalent epidemics in an SIRS model with temporary immunity[J]. *Theoretical Population Biology*, 2017, 113: 47-55.
- [7] ZHONG X Y, GUO S J, PENG M F. Stability of stochastic SIRS epidemic models with saturated incidence rates and delay[J]. *Stochastic Analysis and Applications*, 2017, 35(1): 1-26.
- [8] WU G Y, SUN J, CHEN J. A survey on the security of cyber-physical systems[J]. *Control Theory and Technology*, 2016, 14(1): 2-10.
- [9] WANG Y N, LIN Z Y, LIANG X, et al. On modeling of electrical cyber-physical systems considering cyber security[J]. *Frontiers of Information Technology Electronic Engineering*. 2016, 17(5): 465-478.
- [10] JABENUR N, SAHLI N, ZEADALLY S. Enabling cyber physical systems with wireless sensor networking technologies, multi-agent system paradigm, and natural ecosystems[J]. *Mobile Information Systems*, 2015(6):1-15.
- [11] MENACER T. Control of a fractional jerk equation using the fractional Routh-Hurwitz criteria[C]//*Systems and Control*. Tunisia: [s.n.], 2015: 351-356.
- [12] 巩永旺, 宋玉蓉, 蒋国平. 移动环境下网络病毒传播模型及其稳定性分析研究[J]. *物理学报*, 2012, 61(11):1-9.  
GONG Yong-wang, SONG Yu-rong, JIANG Guo-ping. Epidemic spreading model and stability of the networks in mobile environment [J]. *Acta Phycas Sinica*, 2012, 61(11): 1-9.

编辑 刘飞阳