基于子空间分解类算法的高精度频率估计

多 滨，罗俊松*，贾 勇，钟晓玲，郭 勇

(成都理工大学信息科学与技术学院 成都 610059)

【摘要】针对高速全数字解调器中频率估计算法的高精确度及实时性要求，该文深入分析了基于子空间分解类算法的特点，提出了将求根多重信号分类 (RMUSIC) 法和旋转不变技术估计信号参数 (ESPRIT) 法分别与快速傅里叶变换 (FFT) 法相结合的高精度频率估计算法。首先应用 RMUSIC 或 ESPRIT 算法对信号频率进行预估计，确定粗略的窄带频率区间后，再应用加窗 FFT 算法对细化域内的频率进行精估计。此外，为满足不同信噪比条件的需求，提出了一种具有可选结构的高精度频率估计方法。仿真结果与分析表明，该算法极大地提高了已有频率估计算法的精度，具有较快的信号处理速度和良好的抗噪声性能。

关 键 词 数字解调器； 旋转不变技术估计信号参数； 快速傅里叶变换； 频率估计； 求根多重信号分类

中图分类号 TN911.72 **文献标志码** A doi:10.12178/1001-0548.2018060

High-Accuracy Frequency Estimation Based on the Class of Subspace Decomposition Algorithms

DUO Bin, LUO Jun-song*, JIA Yong, ZHONG Xiao-ling, and GUO Yong

(College of Information Science & Technology, Chengdu University of Technology Chengdu 610059)

Abstract To meet the requirements of high-accuracy and real-time frequency estimation in high-speed digital demodulators, this paper analyzes the characteristics of subspace decomposition algorithms and proposes a novel high-accuracy frequency estimation algorithm that the root multiple signal classification (root-MUSIC) algorithm and the estimation of signal parameters via rotational invariance techniques (ESPRIT) combined with fast Fourier transform (FFT) algorithm, respectively. Firstly, the root-MUSIC or the ESPRIT algorithm is applied to pre-estimate the signal frequency; then, the narrowband spectrum interested is determined; finally, the Hanning window with FFT algorithm is used to complete the accurate frequency search by the method of frequency refinement. In addition, in order to satisfy the conditions of different signal to noise ratios (SNRs) for high-accuracy frequency estimation, a new algorithm based on the optional construction is proposed. Simulation results show that not only is the estimation accuracy greatly improved compared to pre-existing algorithms because of notable anti-noise performance but also the processing time of the demodulator is reduced.

Key words digital demodulator; ESPRIT; FFT; frequency estimation; RMUSIC

无线通信信号处理领域中实时高精度的频率估计对全数字解调器的解码具有十分重要的理论和实用价值。在众多频率估计算法中，快速傅里叶变换法是经典谱估计理论中的重要算法和理论基础，尤其适用于确定性长信号的谱估计，具有算法复杂度低、计算量小、易于硬件实现的特点，但需要对信号实现整周期采样，否则会导致严重的频率泄露和栅栏效应，应用受到了极大的限制[1]。子空间分解类算法源于现代空间谱估计理论，一般分为两类：一类是噪声子空间类算法，典型代表为多重信号分类法 (multiple signal classification, MUSIC)[2]；另一类是信号子空间类算法，典型代表为旋转不变技术估计信号参数法 (ESPRIT)[3]。求根 MUSIC(RMUSIC) 算法则是用求多项式根的方法避免了传统 MUSIC 算法的谱峰搜索过程，极大地降低了计算复杂度，具有更高的频率分辨率，但在极低的信噪比 (signal to noise ratios, SNR) 下，该算法估计精度略有不足[4-5]。ESPRIT 算法作为信号子空间类算法也同样

收稿日期：2018－03－20；修回日期：2019－02－27
基金项目：国家自然科学基金 (41574136，61501062)；四川省科技计划重点项目 (2018GZ0454)
作者简介：多滨 (1982－)，男，博士，主要从事信息论与编码、数字信号处理等方面的研究.
通信作者：罗俊松，E-mail：junsong_luo@163.com

具有较高的估计精度，通过两次特征值分解就可以直接估计出接收信号的频率，但计算量相对较大[6-10]。

目前，结合法作为提高频率估计精度和降低硬件实现复杂度的有效方法得到了广泛的关注。文献 [11] 首先提出了一种将 FFT 和 FFT 结合的算法 (本文称为 F-F 算法)，提高了频率估计精度，降低了计算量。文献 [12] 将 FFT 和 MUSIC 相结合 (本文称为 F-M 算法)，用于间谐波的频率估计，不仅解决了 FFT 算法的频率泄露和栅栏效应问题，同时避免了耗时的谱峰搜索过程。文献 [13] 将 ESPRIT 和 RMUSIC(本文称为 E-RM 算法) 联合，可用于解决数字解调器的频率估计问题，通过计算复数矩阵向量的乘积，在一定程度上降低了计算复杂度，并保持较高的频率估计精度。

高精度和实时性要求的矛盾一直都是频率估计在高速全数字解调器中应用的瓶颈。因此，研究一种既保证高精度，又满足低计算量的频率估计算法，具有重要的应用前景。本文深入研究了基于子空间分解类算法、F-F、F-M 和 E-RM 算法的实现特点，并针对上述技术的频率估计精度仍有不足和计算量仍较高的问题，分别提出了将 RMUSIC 与 FFT 结合 (本文称为 R-F 算法) 和将 ESPRIT 与 FFT 结合 (本文称为 E-F 算法) 的频率估计算法，通过对信号频率的预估计，再利用加窗插值 FFT 算法在已确定的细化域内完成精估计。针对这两种算法在高低 SNR 下的不同性能，本文还提出了一种具有可选结构的 RF-or-EF 算法，通过事先设定的 SNR 阈值，能够自适应地选择 R-F 算法或 E-F 算法进行频率估计，满足各种 SNR 条件下的频率估计需求。仿真结果表明，本文所提出的算法具有频率估计精度高、实时性强、计算量小的特点，不会产生频谱泄露，优于现有的频率估计算法。

1　基于子空间分解的信号频率估计

基于相关矩阵特征分解的信号频率估计是现代信号频率估计的重要内容，其中典型的代表有 RMUSIC 法和 ESPRIT 法。

1.1　基于 RMUSIC 算法的信号频率估计

假设由 K 个复正弦波组成的信号为：

$$r(n)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k n}+z(n) \tag{1}$$

式中，$\alpha_k=|\alpha_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_k}$是第 k 个信号的复幅度；$\omega_k=2\pi f_k$ 是第 k 个信号的角频率；f_k是第 k 个信号的频率；ϕ_k是初始相位 (且不同信号的相位相互独立)；$z(n)$ 是均值为 0、方差为σ^2的加性高斯白噪声。

定义接收信号向量为$\boldsymbol{r}(n)=[r(n),r(n-1),\cdots,r(n-M+1)]^{\mathrm{T}}$，则有：

$$\boldsymbol{r}(n)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(n)+\boldsymbol{z}(n)\in\mathbb{C}^{M\times 1} \tag{2}$$

式中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=[\boldsymbol{a}(\omega_1),\boldsymbol{a}(\omega_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\omega_K)]\\&=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_K}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(M-1)\omega_1} & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(M-1)\omega_2} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(M-1)\omega_K}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{M\times K}\\ \boldsymbol{s}(n)&=\left[\alpha_1\mathrm{e}^{j\omega_1 n},\alpha_2\mathrm{e}^{j\omega_2 n},\cdots,\alpha_K\mathrm{e}^{j\omega_K n}\right]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z}(n)&=[z(n),z(n-1),\cdots,z(n-M+1)]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3}$$

式中，符号$[\cdot]^{\mathrm{T}}$和$\mathbb{C}$分别表示矩阵转置和复数集合。

在实际工程应用中，一般用$\boldsymbol{r}(n)$的样本相关矩阵的估计$\hat{\boldsymbol{R}}$代替 $\boldsymbol{R}$ 进行特征分解[7]，为：

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}} \tag{4}$$

式中，$n=1,2,\cdots,L$，L 为样本采样点数；$[\cdot]^{\mathrm{H}}$表示矩阵复共轭转置。

对$\hat{\boldsymbol{R}}$进行特征值分解可以产生 K 个较大的特征值和 M-K 个较小的特征值，且对应的特征向量分别为$[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_K]$和$[\boldsymbol{q}_{K+1},\boldsymbol{q}_{K+2},\cdots,\boldsymbol{q}_M]$，故定义[7]：$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}$是由$[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_K]$生成的信号子空间；$\boldsymbol{E}_{\mathrm{z}}$是由$[\boldsymbol{q}_{K+1},\boldsymbol{q}_{K+2},\cdots,\boldsymbol{q}_M]$生成的噪声子空间。$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s}}$既与信号有关，又与噪声有关；而$\boldsymbol{E}_{\mathrm{z}}$仅与噪声有关。

由于$\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\omega_k)(k=1,2,\cdots,K)$与$\boldsymbol{E}_{\mathrm{z}}$正交，故可定义：

$$P_{\mathrm{RMUSIC}}(z)=\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(z)\boldsymbol{E}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}(z)=0 \tag{5}$$

式中，$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k}(k=1,2,\cdots,K)$是方程的根。根据求得的根即直接估计出信号频率，其估计的频率误差比 MUSIC 算法小，精度更高[14-15]。

1.2　基于 ESPRIT 算法的信号频率估计

ESPRIT 算法是另一种基于子空间思想的信号频率估计算法，即利用信号子空间的旋转不变性求解出信号的特征参数。

假设解调器接收到的信号仍为式 (2) 所示向量。定义随机过程$y(n)\triangleq r(n+1)$，并分别定义向量$\boldsymbol{y}(n)$和矩阵$\boldsymbol{\Phi}$为：

$$\boldsymbol{y}(n)=[y(n),y(n-1),\cdots,y(n-M+1)]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1},\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k}\right\} \tag{7}$$

式中，旋转算子$\boldsymbol{\Phi}$满足$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$是秩为$M$的单位阵。因此，由式(2)和式(6)可得：

$$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{r}(n+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(n+1)+\boldsymbol{z}(n+1) \tag{8}$$

由于$\boldsymbol{s}(n+1)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s}(n)$，所以式(8)可以表示为：

$$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{s}(n)+\boldsymbol{z}(n+1) \tag{9}$$

接收向量的自相关矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{rr}}=E\left[\boldsymbol{r}(n)\boldsymbol{r}^{\mathrm{H}}(n)\right]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\sigma^2\boldsymbol{I} \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{P}\triangleq E\left[\boldsymbol{s}(n)\boldsymbol{s}^{\mathrm{H}}(n)\right]=\mathrm{diag}\{|\alpha_1|^2,|\alpha_2|^2,\cdots,|\alpha_K|^2\}$。相应地，向量$\boldsymbol{r}(n)$和$\boldsymbol{y}(n)$的互相关矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{rv}}=E\left[\boldsymbol{r}(n)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(n)\right]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\sigma^2\boldsymbol{Z} \tag{11}$$

式中，$\sigma^2\boldsymbol{Z}=E\left[\boldsymbol{z}(n)\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}(n+1)\right]$；$\boldsymbol{Z}$中的元素$[\boldsymbol{Z}]_{m,m+1}=1$，$1\leqslant m\leqslant M-1$，其余元素全为0。

对$\boldsymbol{R}_{\mathrm{rr}}$进行特征分解，得到$\boldsymbol{R}_{\mathrm{rr}}$的最小特征值$\lambda_{\min}=\lambda_M=\sigma^2(\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_M)$，由式(10)和式(11)，定义如下矩阵对$\{\boldsymbol{C}_{\mathrm{rr}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{rv}}\}$：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{rr}}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{rr}}-\sigma^2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{rr}}-\lambda_{\min}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{rv}}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{rv}}-\sigma^2\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{rv}}-\lambda_{\min}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \tag{13}$$

若存在标量λ和非零向量$\boldsymbol{u}$，使得方程：

$$(\boldsymbol{C}_{\mathrm{rr}}-\lambda\boldsymbol{C}_{\mathrm{rv}})\boldsymbol{u}=0 \tag{14}$$

成立，则这样的标量λ称为矩阵对$\{\boldsymbol{C}_{\mathrm{rr}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{rv}}\}$的广义特征值[7]。当矩阵$\boldsymbol{C}_{\mathrm{rr}}-\lambda\boldsymbol{C}_{\mathrm{rv}}$是奇异时，该方程中的向量$\boldsymbol{u}$有非零解，即行列式满足：

$$|\boldsymbol{C}_{\mathrm{rr}}-\lambda\boldsymbol{C}_{\mathrm{rv}}|=0 \tag{15}$$

故求解式(15)可以得到矩阵对$\{\boldsymbol{C}_{\mathrm{rr}},\boldsymbol{C}_{\mathrm{rv}}\}$的广义特征值为$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1},\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_K}$。

2 R-F高精度频率估计算法

从上一节介绍可知，RMUSIC算法具有很高的频率分辨率，且不需要搜索整个谱峰，但在低信噪比时分辨力还不够。而FFT算法实现复杂度低、硬件易于实现，但对于信号非整周期采样，则应用受到限制[16]。

基于上述问题，首先提出R-F高精度频率估计算法，具体步骤如下：

1) 根据L个样本观测值$r(0),r(1),\cdots,r(L-1)$，确定接收信号表达式；

2) 计算接收信号的样本自相关矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}$；

3) 对$\hat{\boldsymbol{R}}$进行特征值分解；

4) 确定M-K个噪声子空间的特征向量；

5) 求解式(5)，得到接收信号频率的初步估计值；

6) 确定细化域。执行完步骤5)后，可以初步获得信号频率的粗略估计。因为真实频率就在很小的范围内，如果只在一个很小的区域内搜索，无疑会大大缩短搜索过程。由于RMUSIC算法精度相对较高，可以减小搜索范围，降低了算法计算量，增强了实时性。因此，确定FFT算法的估计范围为：

$$S_1=\left[\hat{\omega}_1^1:\frac{1}{R_3}:\hat{\omega}_1^2\right] \tag{16}$$

式中，$\hat{\omega}_1^1$和$\hat{\omega}_1^2$分别为估计范围的起始角频率和终止角频率；R_3定义为细化域分辨率。

7) 执行加窗FFT算法进行精估计，通过频率细分在已经确定的狭小的区域内寻找谱峰位置。在搜索范围S_1上用FFT算法进行如下计算，确定待估频率，其表达式为：

$$X(f)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\exp(-\mathrm{j}2\pi nf/f_s)\quad f=1,2,\cdots,|\hat{\omega}_1^2-\hat{\omega}_1^1| \tag{17}$$

式中，$x(n)$和$X(f)$分别代表信号的采样序列及其相应的变换系数；f_s为采样频率。本文在FFT算法的基础上，选取频率检测精度较高、频谱泄漏抑制效果好且计算量较小的Hanning窗对信号进行截断，由文献[1]可知，信号$x(n)$经过加Hanning窗截断后得到的序列为：

$$x_h(n)=x(n)w_{\mathrm{H}}(n)\quad n=1,2,\cdots,N \tag{18}$$

式中，$w_{\mathrm{H}}(\mathrm{n})=0.5-0.5\cos(2\pi n/N),n=0,1,2,\cdots,N-1$为所加Hanning窗，$N$为采样点数。R-F算法实现时的程序设计流程如图1所示。

由于Hanning窗函数的旁瓣衰减较大，通过对信号$x(n)$进行采样截断，能够克服各频谱之间所产生的干扰，从而大幅度减小栅栏效应和频谱泄漏，不仅降低了频率估计的计算量，还可较精确地估计出各种频率信号的频率。

可以任意设定细化域分辨率R_3，但只有当R_3选取恰当时，才能同时保证频率估计的高精确性和低计算量。因此，S_1范围较大时，R_3值可以取得较小，以降低计算量；S_1范围较小时，R_3值可以设置得大一些，以提高估计精度，且具体的取值，需折中处理，取决于实际的需求。

R-F算法将频率预估计和精估计分析过程有机地结合在一起，经过预估计后，确定了细化域，大幅度缩短了搜索频率的过程，并通过加窗技术，滤

除了其他频率分量和高斯白噪声，提高了频率估计精度和频域稳定性，降低了计算量。

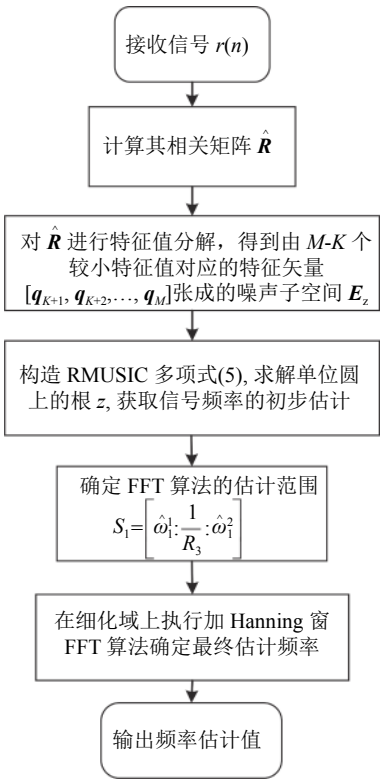

图 1　R-F 算法流程图

3　E-F 高精度频率估计算法

为了进一步降低实现复杂度，并充分利用 ESPRIT 算法在低信噪比条件下频率分辨率较高的特点[17]，结合计算量较小的 FFT 算法，本节提出了第二种高精度频率估计算法，即 E-F 算法。

与 R-F 算法类似，E-F 高精度频率估计算法具体步骤如下：

1) 根据 L 个样本观测值 $r(0), r(1), \cdots, r(L-1)$，确定接收信号表达式；

2) 计算接收信号的样本相关矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{rr}}$和$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{rv}}$；

3) 对$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{rr}}$进行特征值分解，得到最小特征值 $\lambda_{\min}=\sigma^2$；

4) 构造矩阵对$\{\hat{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{rr}}, \hat{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{rv}}\}$，其中$\hat{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{rr}}=\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{rr}}-\lambda_{\min}\boldsymbol{I}$，$\hat{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{rv}}=\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{rv}}-\lambda_{\min}\boldsymbol{Z}$；

5) 求解式 (15)，得到信号频率的估计$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\hat{\omega}_1}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\hat{\omega}_2}, \cdots, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\hat{\omega}_K}$；

6) 确定 FFT 算法的估计范围为：

$$S_2=\left[\hat{\omega}_2^1:\frac{1}{R_3}:\hat{\omega}_2^2\right] \tag{19}$$

式中，$\hat{\omega}_2^1$和$\hat{\omega}_2^2$分别为 E-F 算法估计范围的起始角频率和终止角频率；

7) 执行加 Hanning 窗 FFT 算法，确定最终频率估计值。

4　EF-or-RF 高精度频率估计算法

在实际工程系统中，噪声是无法避免的，因此必须分别考虑本文所提出的方法在不同 SNR 环境中的估计精度问题。基于 R-F 和 E-F 算法，提出一种 EF-or-RF 选择性频率估计算法，分别解决不同 SNR 下的高精度频率估计问题。从前文可知，RMUSIC 算法和 ESPRIT 算法分别在高 SNR 和低 SNR 条件下频率分辨率较高。因此，该算法的基本思想是在接收到信号 $r(t)$ 后，首先进行 SNR 判定，用 SNR 的先验知识决策选择 E-F 或 R-F 算法。频域估计法是信噪比估计算法中的一种经典算法，通过对接收信号采样，能够在频域中对信噪比进行直接估计[18]。然后，在 SNR 判定模块中设置一个阈值，定义此阈值为 T，如果 SNR 小于该阈值，则选择 R-F 算法进行频率估计，反之选择 E-F 算法。具体操作为设置一个标签 F，如果 SNR>T，则 F=0，表明选择 R-F 算法；否则，F=1，表示选择 E-F 算法。对于阈值 T 的选择，如果 T 值较低，则导致大部分的判定都会趋向选择 E-F 算法，那么在高 SNR 时，频率估计性能精度不够；而如果 T 值较高，则有可能在低 SNR 时更倾向于选择 R-F 算法而没有选择 E-F 算法，故导致低 SNR 频率估计精度不足。因此，该方法是将 R-F 算法与 E-F 算法有机地结合在一起，既满足高 SNR 高精度频率估计需求又能满足低 SNR 高精度频率估计需求，实现结构框图如图 2 所示。因 SNR 判定模块中的频域估计算法计算量相对较少，复杂度较低，有较高的估计精度，故图 2 算法结构并不会引入额外的计算复杂度。

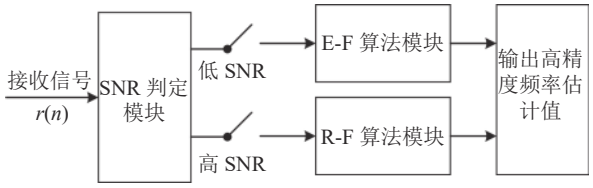

图 2　EF-or-RF 算法实现结构框图

5　仿真结果与分析

本节主要通过 MATLAB 仿真软件模拟不同 SNR 的无线信道环境，验证数字解调器采用不同频率估计算法对接收信号估计的精度。仿真参数设置如表 1 所示。

表 1 仿真参数设置

参数	取值
接收信号表达式	$r(t)=10\exp(\mathrm{j}2\pi f_1 t/f_s+\varphi_1)+5\exp(\mathrm{j}2\pi f_2 t/f_s+\varphi_2)+z(t)$
中心频率/Hz	$f_1=125.396\,1$ $f_2=351.109\,1$
采样频率/Hz	$f_s=2\,000$
时间点数	$t=[0:1\,023]$
相位偏移	$\varphi_1=\varphi_2=0$
$z(t)$的信噪比/dB	−5、25
MUSIC算法的M值	16
谱峰搜索分辨率	1 024
RMUSIC算法的M值	16
ESPRIT算法的M值	16
FFT点数	1 024
细化域分辨率R_3	256
阈值T/dB	12
蒙特卡洛仿真次数	500
仿真硬件配置	Intel Core i7-8750 4.10 Ghz处理器、16 G DDR4内存

5.1 频率估计算法的精度比较

为了进一步确定 R-F 算法和 E-F 算法的精度，以及 EF-or-RF 选择性高精度频率估计算法的可行性，下面分别在 SNR 高、低两种环境中将已有的几种频率估计算法与本文提出的算法进行比较，如表 2 和表 3 所示。

表 2 SNR=–5 dB 时，频率估计值和估计误差性能比较

频率/Hz	实际值	FFT		MUSIC	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.000 0	0.396 1	125.000 0	0.396 1
f_2	351.109 1	351.562 5	0.453 4	350.898 4	0.210 7
频率/Hz	实际值	RMUSIC		ESPRIT	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.298 4	0.097 7	125.339 2	0.056 9
f_2	351.109 1	351.032 2	0.076 9	351.043 0	0.065 7
频率/Hz	实际值	F-F		F-M	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.420 2	0.024 1	125.348 1	0.048 0
f_2	351.109 1	351.084 0	0.025 1	351.165 5	0.056 4
频率/Hz	实际值	R-F		E-F	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.392 2	0.003 9	125.398 6	0.002 5
f_2	351.109 1	351.113 4	0.004 3	351.112 2	0.003 1

表 2 中，由于噪声功率非常大，传统的 FFT 算法和 MUSIC 算法都无法准确地估计出 f_1 和 f_2，频率估计的精度不高，但 ESPRIT 算法的频率估计误差相对较低，这证实了相对于其他传统的频率估计算法，ESPRIT 算法在低 SNR 下仍具有较好的频率估计精度[18]。此外，相比于 F-F 和 F-M 算法，本文提出的 R-F 算法和 E-F 算法的估计精度更高，对于低 SNR 时的噪声都有良好的抑制效果，对频率的估计精度可达到小数点后 2 位，且 E-F 算法的估计误差低于 R-F 算法。

表 3 SNR=25 dB 时，频率估计值和估计误差性能比较

频率/Hz	实际值	FFT		MUSIC	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.000 0	0.396 1	125.000 0	0.396 1
f_2	351.109 1	351.562 5	0.453 4	351.562 5	0.453 4
频率/Hz	实际值	RMUSIC		ESPRIT	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.395 0	0.001 1	125.393 8	0.002 3
f_2	351.109 1	351.105 3	0.003 8	351.112 2	0.003 1
频率/Hz	实际值	F-F		F-M	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.397 6	0.001 5	125.400 0	0.003 9
f_2	351.109 1	351.111 6	0.002 5	351.105 9	0.003 2
频率/Hz	实际值	R-F		E-F	
		估计值	误差	估计值	误差
f_1	125.396 1	125.396 0	0.000 1	125.395 3	0.000 8
f_2	351.109 1	351.109 3	0.000 2	351.108 0	0.001 1

从表 3 中可以看出，由于计算点数不够，FFT 算法和 MUSIC 算法并不会随着 SNR 的增加而提高估计精度。在高 SNR 条件下，RMUSIC 算法和 ESPRIT 算法的估计误差非常接近，且 R-F 与 E-F 两种算法对频率估计都非常理想，高于 F-F 算法和 F-M 算法的估计精度，但 R-F 算法的估计精度更高，几乎可以达到小数点后 4 位的精度。

基于以上仿真结果可知，尽管 R-F 和 E-F 两种算法都作了相似程度的细化域估计，但由于 RMUSIC 算法和 ESPRIT 算法的不同，导致它们对噪声的敏感程度也不尽相同。在高 SNR 时，R-F 算法的优势非常明显，故可以直接应用 R-F 算法就可基本达到小数点后 4 位的精度。但在低 SNR 的恶劣环境中，E-F 算法的频率估计性能优于 R-F 算法，具有较强的抗造能力。

5.2 性能分析

本节主要比较本文提出的 R-F 和 E-F 算法与 F-M 算法[12] 和 E-RM 算法[13] 在不同 SNR 条件下估计频率 f_1 的根均方误差 (root mean square error, RMSE)、计算复杂度和仿真处理时间。RMSE 常被用来描述频率估计算法的性能，计算方法如下[19]：

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{f}_1^{(i)}-f_1)^2} \tag{20}$$

式中，N 是独立进行蒙特卡洛仿真的次数；$\hat{f}_1^{(i)}$ 是对 f_1 第 i 次仿真频率的估计值；f_1 是频率的真实值。具体仿真参数仍如表 1 所示。

图 3 描述了随着 SNR 的变化，以上 4 种算法的 RMSE 性能。仿真结果表明，RMSE 性能随着 SNR 的增加而不断降低，说明这几种算法都对噪声比较敏感，频率估计精度也都会随着 SNR 的增加而得到改善。从图 3 还可以看出，本文提出的 R-F 和 E-F 算法的 RMSE 性能都明显优于 F-M 算法，并且 E-F 算法在低 SNR 下略优于 R-F 算法，而 R-F 算法在高 SNR 下占据明显的优势。此外，通过与 E-RM 算法比较可以看出，在中低 SNR 下，E-RM 提供了与 R-F 和 E-F 算法相近的性能，但在高 SNR 下，R-F 算法的性能更好，原因是在细化域利用加窗 FFT 算法进行二次频率搜索，可以获得更加准确的频率估计值。

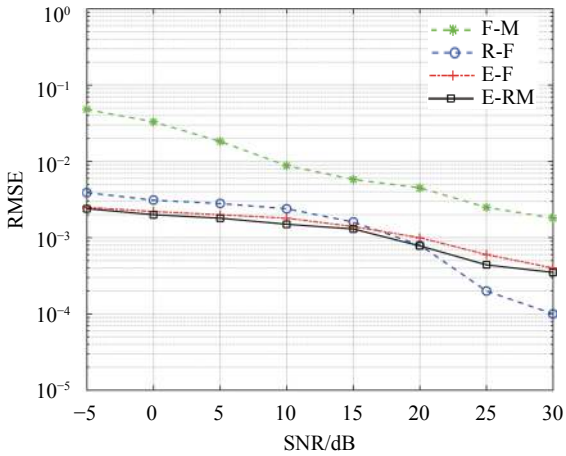

图 3　F-M、E-RM、R-F 和 E-F 算法 RMSE 性能比较

在实际应用当中，频率估计算法的精度是影响性能的重要因素，但算法的计算复杂度也同样重要。一般来说，FFT 算法的复杂度为 $O(L\log B)$，其中 B 为可重叠窗函数的个数[20-21]。MUSIC 算法和 ESPRIT 算法的复杂度分别为 $O(M^2P+M^2L)$ 和 $O(M^3+M^2L)$[22]。MUSIC 算法需要频谱搜索，且当估计频率数 $P>M$ 时，比 ESPRIT 算法复杂度更高，而 RMUSIC 算法仅需要通过子空间分解来估计频率，不需要频谱搜索，其复杂度仅为 $O(M^2L)$。所以，F-M、R-F、E-F 和 E-RM 这 4 种算法的复杂度分别为 $O(L\log B)+O(M^2P+M^2L)$、$O(L\log B)+O(M^3+M^2L)$、$O(L\log B)+O(M^2L)$ 和 $O(M^3+M^2L)+O(M^2L)$。从 4 种算法的复杂度比较可以看出，E-RM 算法的复杂度最高，R-F 算法的复杂度最低。E-F 算法更适用于 M 值较小和所需估计频率数较大的情况。

表 4 给出了 F-M 算法、R-F 算法、E-F 算法和 E-RM 算法在不同的 M 值和 SNR=10 dB 时，估计频率 f_1 所需处理时间的比较。从表 4 可以看出，虽然增加 M 值也会在一定程度上提高频率的估计精度，但各算法也会因为矩阵维度的增大而明显增加计算量。在相同的 M 值和较小的 P 值条件下，本文提出的 R-F 的仿真耗时均小于 F-M 和 E-RM 算法，尤其是在 M 值较大时，差异更加明显。尽管在中低 SNR 下 E-RM 算法的性能略优于 E-F 和 R-F 算法，但是本文提出的算法消耗更少的时间，计算更加有效，满足实时性要求。

表 4　不同算法耗时比较

M值	仿真平均计算时间/s			
	F-M	R-F	E-F	E-RM
16	0.018	0.008 3	0.021	0.046
32	0.035	0.009 7	0.039	0.102
64	0.059	0.021 8	0.074	0.303

本文提出的 R-F 和 E-F 算法能够更快速更准确地估计出两个甚至多个信号的频率，实现高精度频率估计。在此基础上，通过 R-F 和 E-F 算法选择性结合的设置，既能满足高 SNR 高精度频率估计的需求，又能满足低 SNR 高精度频率估计需求，适用于各种 SNR 条件下的全数字接收机高精度频率估计。

6　结 束 语

本文结合子空间分解类算法的特点，提出了 R-F 算法、E-F 算法和 RF-or-EF 算法，解决了高速全数字解调器对频率估计算法的高精度和实时性需求。首先由 RMUSIC 算法或 ESPRIT 算法对频率进行预估计，再根据预估计值确定细化域，最后基于加窗 FFT 算法的思想进行精估计。通过缩小的细化域，减少了频率估计的计算量，算法流程精简，易于硬件实现。此外，通过 R-F 和 E-F 算法的选择性结构，可以满足不同信噪比条件下的高精度频率估计需求。仿真结果表明，本文提出的算法能够精确地估计出接收信号的频率，与已有的频率估计算法相比，具有更高的频率估计精度，更低的计算时间，在低信噪比下也能相对准确的估计出信号频率，抗噪性能强。

参 考 文 献

[1] 王晓亮, 李娜. 基于加窗插值 FFT 算法的间谐波检测方

法研究[J]. 现代电力, 2012, 29(5): 28-31.
WANG Xiao-liang, LI Na. Research on inter-harmonic detection using windows and interpolated FFT algorithm[J]. Modern Electric Power, 2012, 29(5): 28-31.

[2] KINTZ A L, GUPTA I J. A modified MUSIC algorithm for direction of arrival estimation in the presence of antenna array manifold mismatch[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(11): 4836-4847.

[3] 徐保根, 谢伟, 万义和, 等. 一种基于广义特征向量的改进 ESPRIT 测向算法[J]. 电子科技大学学报, 2015, 44(2): 201-204.
XU Bao-gen, XIE Wei, WAN Yi-he, et al. An improved ESPRIT algorithm based on generalized eigenvectors[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2015, 44(2): 201-204.

[4] KOUSHIK A R, SHRUTHI B S, RAJESH R, et al. A root-MUSIC algorithm for high resolution ISAR imaging[C]//IEEE International Conference on Information & Communication Technology. Bangalore, India: IEEE, 2016: 522-526.

[5] WANG Di-jie, CHAI Rong, GAO Fei-fei. An improved Root-MUSIC algorithm and MSE analysis[C]//2016 International Conference on Computer, Information and Telecommunication Systems. Kunming, China: IEEE, 2016: 1-4.

[6] FAYAD Y, WANG Cai-yun, HAFEZ A S, et al. Direction of arrival estimation using novel ESPRIT method for localization and tracking radar systems[C]//2014 11th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology. Islamabad, Pakistan: IEEE, 2014: 396-398.

[7] 何子述. 现代数字信号处理及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
HE Zi-shu. Modern digital signal processing and the applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.

[8] FAYAD Y, CAO Qun-sheng. A modified T-ESPRIT for 2-D direction of arrival estimation performance enhancement[J]. International Journal of Modeling and Optimization, 2015, 5(3): 166-170.

[9] FAYAD Y, WANG Cai-yun, CAO Qun-sheng, et al. Improved ESPRIT algorithm used in spatial subspace for NULA[C]//2016 13th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology. Islamabad, Pakistan: IEEE, 2016: 620-623.

[10] FAYAD Y, WANG Cai-yun, CAO Qun-sheng. Improved ESPRIT method used for 2D-DOA estimation in tracking radars[C]//2016 European Radar Conference. London, UK: IEEE, 2016: 113-116.

[11] 薛海中, 李鹏, 张娟, 等. 基于局部频谱连续细化的高精度频率估计算法[J]. 西安电子科技大学学报 (自然科学版), 2007, 34(1): 21-25.
XUE Hai-zhong, LI Peng, ZHANG Juan, et al. High accuracy frequency estimation based on the continuous zoom in the local spectrum[J]. Journal of Xidian University, 2007, 34(1): 21-25.

[12] LI Tong, TANG Yin-hui. Frequency estimation based on modulation FFT and MUSIC algorithm[C]//2010 1st International Conference on Pervasive Computing, Signal Processing and Applications. Harbin, China: IEEE, 2010: 525-528.

[13] WANG Xian-peng, WANG Wei, XU Ding-jie. Low-complexity ESPRIT –Root-MUSIC algorithm for non-circular source in bistatic MIMO radar[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2015, 34(4): 1265-1278.

[14] SHU Chang-gan, LIU Yu-min, YU Zhong-yuan, et al. Research on modified root-MUSIC algorithm of DOA estimation based on covariance matrix reconstruction[J]. Sensors & Transducers, 2014, 178(9): 214-218.

[15] 闫锋刚, 张薇, 金铭. 求根 MUSIC 初值设置和更新算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2015, 47(3): 88-92.
YAN Feng-gang, ZHANG Wei, JIN Ming. A new method for setting and updating the initiation of root-MUSIC[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2015, 47(3): 88-92.

[16] BARROS J, DIEGO R I. On the use of the Hanning window for harmonic analysis in the standard framework[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2006, 21(1): 538-539.

[17] WAWERU N P, KONDITI B O, LANGAT P K. Performance analysis of MUSIC, root-MUSIC and ESPRIT DOA estimation algorithm[J]. International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering, 2014, 8(1): 209-216.

[18] YOON J, JO O, CHOI J W, et al. SNR analysis and estimation for efficient phase noise mitigation in millimetre-wave SC-FDE systems[J]. IET Communications, 2018, 12(18): 2347-2356.

[19] KIM S, LEE K K. Low complexity joint extrapolation-MUSIC based 2D parameter estimator for vital FMCW radar[J]. IEEE Sensors Journal, 2019, 19(6): 2205-2216.

[20] JIA Min, YIN Zhi-sheng, GUO Qing, et al. Downlink design for spectrum efficient IoT network[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2018, 5(5): 3397-3404.

[21] JIA Min, YIN Zhi-sheng, GUO Qing, et al. Waveform design of zero head DFT spread spectral efficient frequency division multiplexing[J]. IEEE ACCESS, 2017, 5: 16944-16952.

[22] STOCKLE C, MUNIR J, MEZGHANI A, et al. DOA estimation performance and computational complexity of subspace- and compressed sensing-based methods[C]// 19th International ITG Workshop on Smart Antennas. Ilmenau, Germany: VDE, 2015: 1-6.

编 辑 税 红