



基于交错方向乘子法的并行 GPS 信号捕获算法

杨峰^{1*}, 周飞², 潘丽丽², 林静然²

(1. 电子信息控制重点实验室 成都 610036; 2. 电子科技大学信息与通信工程学院 成都 611731)

【摘要】信号捕获是 GPS 基带信号处理的核心组成部分,是影响 GPS 接收模块功耗和成本的重要因素。传统捕获算法处理数据量大、消耗资源多,该文利用压缩感知理论完成 GPS 信号捕获,将数据量降低到半码片捕获精度要求的门限之下,同时提出高效的并行捕获算法以降低运算量。具体而言,首先利用 C/A 码构造正交基,建立 GPS 信号捕获的压缩感知模型;其次,将该压缩感知问题纳入交错方向乘子法 (ADMM) 的框架,提出一种高效的并行捕获算法。在该算法中,压缩感知问题被分解成多个相对独立的子问题并行迭代求解,并且迭代的每一步都有简单的闭合解,因此运算量很低。仿真结果验证了该算法的正确性和有效性。

关键词 交错方向乘子法; 压缩感知; GPS; 信号捕获; 稀疏性

中图分类号 TN911 **文献标志码** A **doi**:10.12178/1001-0548.2018112

Parallel GPS Signal Acquisition Algorithm Based on Alternating Direction Method of Multipliers

YANG Feng^{1*}, ZHOU Fei², PAN Li-li², and LIN Jing-ran²

(1. Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory Chengdu 610036; 2. School of Information and Communication Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract Signal acquisition is one of the key tasks in global position system (GPS) baseband signal processing, which determines the power consumption and the hardware cost of GPS receivers. However, most conventional acquisition algorithms are based on the correlation operations, thus demanding a large amount of data and consuming lots of computational resources. To alleviate this, we propose an efficient parallel GPS signal acquisition algorithm in this paper, utilizing the idea of compressive sensing. Specifically, we first represent the GPS signals in sparse form by projecting the signal onto a base matrix consisting of the orthogonal C/A codes. Based on this sparse representation, a compressive sensing model of GPS signal acquisition is established. Then, we develop an efficient iterative parallel acquisition algorithm for the compressive sensing problem by fitting it into the framework of alternating direction method of multipliers (ADMM). Each iteration of ADMM can be computed in closed form, thus giving it very low complexity. The efficiency and efficacy of the proposed algorithm are validated by numerical simulations.

Key words ADMM; compressive sensing; GPS; signal acquisition; sparsity

以 GPS 为代表的卫星导航系统可提供高精度全天候的导航定位和授时信息,被广泛应用于国防建设和国民经济的众多领域^[1]。近年来,随着 GPS 在移动和便携智能终端中普及,人们对其接收模块的功耗和成本提出了更高要求。在 GPS 信号处理过程中,捕获部分处理数据量大、消耗资源多,是影响接收模块功耗和成本的重要因素^[2-3]。因此,减少捕获部分的数据量和运算量是进一步降

低 GPS 接收模块功耗和成本的有效途径,但这具有相当的难度。由于采用了基于 C/A 码的直接序列扩频技术来保证远距离传输的抗干扰能力, GPS 信号带宽相对较宽,导致接收端采样率较高(十几兆赫兹至几十兆赫兹)。对看重低功耗和低成本的便携式导航应用而言,高采样率为数据存储和处理带来了巨大负担。另一方面,大多数传统 GPS 信号捕获算法都基于循环相关运算,通过遍历所有

收稿日期: 2018-04-28; 修回日期: 2019-12-17

基金项目: 部级基金

作者简介: 杨峰(1978-),男,博士,高级工程师,主要从事卫星导航抗干扰和安全技术方面的研究。E-mail: eyangf@sina.com

可能的多普勒频率和码相位来完成信号粗同步，这也不可避免地导致了捕获过程的大运算量。

为降低捕获过程的数据量和运算量，人们进行了一系列研究。在基于时域相关的捕获算法方面，通用策略是在数据压缩的基础上尽量合并相同的运算。例如，考虑到半码片的捕获精度已经能够满足跟踪处理的入锁条件，很多算法都在相关运算之前按半码片精度对数据进行“打包”，以降低捕获过程的数据量。在此基础上，文献 [4] 通过数据重排处理，使得合并某些乘法运算成为可能，提高了相关运算的效率。文献 [5] 提出了先叠加再相关的方法，减少了相关运算的次数。文献 [6] 提出了基于两级捕获策略的 XFAST 算法，第一级对长扩频码分段折叠进行粗捕，然后第二级确认具体的码相位。文献 [7] 提出了基于局部积分的并行捕获算法，节省了运算资源。在频域捕获算法方面，基本考虑是将循环相关等效为卷积运算，然后利用 FFT 快速算法降低运算量^[8-9]。针对某些长扩频码系统，研究人员进一步利用匹配滤波器降低捕获过程的运算量^[10]。在数据压缩方面，研究人员利用基于平均相关处理的数据压缩技术^[11-13]和由此改进而来的基于向上取整的压缩采样与冗余抗噪技术^[14]，提出了高效的频域捕获算法。文献 [15] 利用 Walsh 序列和 Gold 序列的映射关系，提出了基于 Walsh 变换的快速捕获算法。总体而言，上述算法都不同程度地降低了数据量和运算量，提高了捕获效率。但是，这些算法在进行数据压缩时，都无法突破半码片捕获精度的限制，即对于码长 1 023 的 C/A 码，要实现半码片捕获精度至少需要 2 046 个数据包。受此限制的影响，上述算法在运算量方面的改进也存在局限。

压缩感知理论为进一步降低捕获所需的数据量提供了新思路。区别于传统数据压缩方法，在压缩感知理论中数据量不取决于信号带宽或长度，而取决于信息在信号中的结构^[16-17]。这使得突破半码片捕获精度对数据量的限制成为可能。事实上，压缩感知已经在图像处理、智能天线、认知无线电、超宽带系统等领域受到关注，但其在卫星导航中的研究还较少。在文献 [18] 中，压缩感知被用来解决 GPS/SINS 组合导航中的融合滤波问题。该方法为压缩感知在导航系统中的应用提供了思路，但主要针对后续组合导航中 Kalman 融合滤波的误差均方矩阵计算而言，没有涉及导航信号本身的处理。文献 [19] 首次将压缩感知理论用于导航信号捕获，

并提出了基于正交匹配追踪法的捕获算法，文献 [20] 完成了该算法的具体实现工作。正交匹配追踪法本质上是一种贪婪算法，运算量较大且难以并行实现。文献 [21-22] 利用 Walsh-Hadamard 矩阵构造压缩测量矩阵，提出了双阶段 GPS 信号压缩感知捕获算法。该算法具有和传统相关捕获算法相同的性能，但要求压缩测量矩阵具有特殊的结构。另外，由于需要进行双阶段的压缩感知，该算法捕获过程略显复杂。文献 [23] 则提出了基于稀疏傅里叶变换 (sparse Fourier transform, SFT) 的捕获算法，它针对相关峰的稀疏特性，将 SFT 技术引入频域并行捕获中，简化基于 FFT 的传统频域码相位搜索算法。该算法运算量很低，效率非常高，但捕获性能损失较大。

基于上述考虑，本文不再采用循环相关的捕获方法，而是通过分析 GPS 信号的稀疏性，利用正交的 C/A 码构成基矩阵，以 C/A 码相位为稀疏系数，对 GPS 信号进行近似稀疏表示，并在此基础上建立 GPS 信号捕获的压缩感知模型。其次，将 GPS 压缩感知捕获问题纳入 ADMM 的框架^[24]，提出一种高效的并行捕获算法。和现有 GPS 信号压缩感知捕获算法相比，该算法将压缩感知问题分解成多个相对独立的子问题并行迭代求解，并且迭代的每一步都有简单闭合解，因而具有很低的运算量，能够高效地完成信号捕获的任务。

1 GPS 信号稀疏表示

GPS 信号的 C/A 码是码率为 1.023 Mbps 的 Gold 码，码长 $N=1\ 023$ 。不同卫星的 C/A 码相互正交，同一卫星的 C/A 码及其循环移位序列也相互正交。因此，C/A 码及其循环移位序列可以构成一个正交矩阵。将该正交矩阵作为变换基，就可以对 GPS 信号进行稀疏表示。

假设 $\mathbf{g}_0=[g(0), g(1), \dots, g(N-1)]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 为任意满足上述条件的 Gold 码，将 \mathbf{g}_0 循环移位 m 个码片后，得到序列 $\mathbf{g}_m=[g(m), g(m+1), \dots, g(N-1), g(0), g(1), \dots, g(m-1)]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ， $m=0, 1, 2, \dots, N-1$ ，则 \mathbf{g}_m 可以表示为：

$$\mathbf{g}_m = \begin{bmatrix} g(0) & g(1) & \cdots & g(N-1) \\ g(1) & g(2) & \cdots & g(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(N-1) & g(0) & \cdots & g(N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \gamma(N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{G}\boldsymbol{\gamma}_m \quad (1)$$

式中, $\mathbf{G}=[\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{N-1}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是由 Gold 码及其循环移位序列构成的正交变换基矩阵; $\boldsymbol{\gamma}_m=[\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(N-1)]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 是变换系数向量。显然, 在 $\boldsymbol{\gamma}_m$ 中, 除了 $\gamma(m)=1$ 外, 其余系数都为 0, 即 $\boldsymbol{\gamma}_m$ 是稀疏向量。因此, GPS 中任意相位的 Gold 码序列都可以用式 (1) 进行稀疏表示。

据此可对捕获过程中的 GPS 信号进行稀疏表示。捕获的实质是进行多普勒频率和 C/A 码相位二维搜索, 根据相关峰位置获得频率和相位估计值。在对某颗 GPS 卫星的采样信号进行载波 (多普勒) 剥离和半码片数据打包等处理后, 一个 C/A 码周期的信号可以表示为:

$$\begin{aligned} r(n; \hat{\omega}_d) &= adc(n; \omega_d) \exp[j((\hat{\omega}_d - \omega_d)n + \phi)] + v(n) = \\ &= \beta c(n; \omega_d) \exp(j\Delta\omega_d n) + v(n) \\ & \quad n = 0, 2, \dots, 2N-1 \end{aligned} \quad (2)$$

式中, 由于进行半码片打包, 一个 C/A 码周期的序列长度为 $2N=2046$; ω_d 是 GPS 信号的多普勒频率; $\hat{\omega}_d$ 是多普勒频率估计值; $\Delta\omega_d = \hat{\omega}_d - \omega_d$ 是多普勒估计误差; a 、 d 和 ϕ 分别表示 GPS 信号的幅度、导航电文和载波初相, 考虑到导航电文码率较低、信号幅度变化缓慢, 这里假设它们在捕获处理的时间段内恒定, 表示为 $\beta = ad \exp(j\phi)$; $v(n)$ 是噪声项; $c(n; \omega_d)$ 表示多普勒为 ω_d 时的 C/A 码序列的半码片打包数据。

当多普勒估计准确时, 有 $\hat{\omega}_d = \omega_d$ 和 $\Delta\omega_d = 0$, 式 (2) 表示为:

$$\begin{aligned} r(n; \omega_d) &= \beta c(n; \omega_d) + v(n) \approx \\ &= \beta c(n; 0) + v(n) \end{aligned} \quad (3)$$

式中的近似处理考虑如下: 在非高动态应用中, 多普勒频率的范围通常为 $[-5, 5]$ KHz, 折算到 C/A 码上约为 $[-3.24, 3.24]$ Hz。相对于 1.023 M 的 C/A 码码率而言, 这个多普勒频率在 1 ms 内的影响可以忽略不计^[2]。因此, 式中有 $c(n; \omega_d) \approx c(n; 0)$ 。

定义 $\mathbf{c}_0=[c(0; 0), c(1; 0), \dots, c(2N-1; 0)]^T \in \mathbb{C}^{2N \times 1}$ 。根据上面的分析, \mathbf{c}_0 及其循环移位序列之间仍可以看作是近似正交的。令 \mathbf{c}_m 为 \mathbf{c}_0 循环移位 m 个数据后的序列, 即 $\mathbf{c}_m=[c(m; 0), c(m+1; 0), \dots, c(2N-1; 0), c(0; 0), c(1; 0), \dots, c(m-1; 0)]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$, $m=0, 1, 2, \dots, 2N-1$ 。因此, 在正确剥离载波和多普勒后, 从任意码相位开始的一个 C/A 码周期的信号都可以构成一个向量, 即 $\mathbf{r}(\omega_d)=[r(0; \omega_d), r(1; \omega_d), \dots, r(2N-1; \omega_d)]^T \in \mathbb{C}^{2N \times 1}$, 它可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\omega_d) &= \beta [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{2N-1}] \begin{bmatrix} p(0; \omega_d) \\ p(1; \omega_d) \\ \vdots \\ p(2N-1; \omega_d) \end{bmatrix} + \\ &= \mathbf{C} \mathbf{p}(\omega_d) + \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{C}=[\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{2N-1}] \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ 为变换基矩阵; $\mathbf{p}(\omega_d)=[p(0; \omega_d), p(1; \omega_d), \dots, p(2N-1; \omega_d)]^T \in \mathbb{C}^{2N \times 1}$ 为多普勒估计准确时的码相位向量; $\mathbf{v}=[v(0), v(1), \dots, v(2N-1)]^T \in \mathbb{C}^{2N \times 1}$ 为噪声向量。

显然, 如果多普勒频率被成功剥离, 则 $\mathbf{p}(\omega_d)$ 是一个稀疏向量, 仅有少数较大的非零值, 其峰值出现的地方为 C/A 码相位估计值。与之相对, 如果多普勒估计值存在误差, 即 $\hat{\omega}_d \neq \omega_d$, 则 $\mathbf{r}(\hat{\omega}_d)$ 中仍残留有多普勒分量, $\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$ 的稀疏性就会受到影响。

2 压缩感知捕获模型

基于式 (1) 中 GPS 信号的稀疏表示, 可利用压缩感知理论^[16-17] 完成对稀疏向量 $\mathbf{p}(\omega_d)$ 的估计, 从而取代传统捕获算法中的循环相关运算。

使用和变换基矩阵 \mathbf{C} 不相关的观测矩阵 $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{C}^{M \times 2N}$, $M \ll 2N$, 对 $\mathbf{r}(\omega_d)$ 进行压缩采样, 得到观测序列:

$$\mathbf{y}(\omega_d) = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}(\omega_d) = \boldsymbol{\Omega} [\mathbf{C} \mathbf{p}(\omega_d) + \mathbf{v}] = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{p}(\omega_d) + \mathbf{u} \quad (5)$$

式中, $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times 2N}$; $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}$ 。实际应用中, 观测矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 的选择很多, 常用的有随机高斯矩阵、贝努利矩阵、随机傅立叶矩阵等。

由于多普勒估计准确时, $\mathbf{p}(\omega_d)$ 为稀疏向量, 可以通过求解如下优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{P1}) \quad & \min_{\mathbf{p}(\omega_d)} \|\mathbf{p}(\omega_d)\|_0 \\ & \text{s.t. } \mathbf{y}(\omega_d) = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{p}(\omega_d) \end{aligned} \quad (6)$$

获得 $\mathbf{p}(\omega_d)$ 的估计值。

基于上述模型, 本文提出了基于压缩感知的 GPS 信号捕获算法, 其核心步骤为:

- 1) 初始化捕获参数, 获得随机观测矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 、基矩阵 \mathbf{C} 和混合矩阵 $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{C}$;
- 2) Repeat;
- 3) 设置多普勒估计值 $\hat{\omega}_d$;
- 4) 剥离载波和多普勒频率, 半码片打包, 获得 $\mathbf{r}(\hat{\omega}_d)$;

5) 压缩采样, 获得 $\mathbf{y}(\hat{\omega}_d) = \mathbf{Q}\mathbf{r}(\hat{\omega}_d)$;

$$(6) \quad \mathbf{p}(\hat{\omega}_d) = \arg \min_{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)} \|\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_0$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{y}(\hat{\omega}_d) = \mathbf{\Theta}\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$$

7) Until 遍历所有多普勒估计值 $\hat{\omega}_d$;

8) 分析所有的 $\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$, 判断是否捕获成功;

该算法与传统捕获算法最大的差别是不再需要循环相关运算, 而是通过求解 (P1) 获得当前多普勒频率估计值 $\hat{\omega}_d$ 对应的相位估计结果 $\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$, 如步骤 6) 所示。与此同时, 捕获过程仅需要存储维度为 M 的向量 $\mathbf{y}(\hat{\omega}_d)$, 而非维度为 $2N$ 的向量 $\mathbf{r}(\hat{\omega}_d)$, 这里有 $M \ll 2N$ 。当获得所有多普勒估计值对应的相位估计结果后, 通过峰值检测和计算峰均比来判断是否成功捕获到某颗卫星的信号, 并给出相应的多普勒频率和 C/A 码相位估计值。

由于 l_0 范数项是非凸的, (P1) 的求解十分复杂, 常见处理方法是使用 l_1 范数来近似 l_0 范数, 即:

$$(P2) \quad \min_{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)} \|\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_1$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{y}(\hat{\omega}_d) = \mathbf{\Theta}\mathbf{p}(\hat{\omega}_d) \quad (7)$$

由此得到的 (P2) 为凸优化问题, 常见求解算法有基追踪法、(正交) 匹配追踪法 (orthogonal matching pursuit, OMP)、子空间追踪法^[16-17] 等。除此之外, 还可以通过软件包 (如 CVX^[24] 等) 直接求解。但是, 上述一系列追踪算法本质上是贪婪搜索算法, 计算复杂度偏高^[17], 同时难以并行执行 (基于软件包的方法同样难以并行执行)。考虑到整个优化问题维数较高, 分布式的并行求解算法显然更具吸引力。为此, 本文将 (P2) 纳入 ADMM 的框架, 提出一种高效的并行 GPS 信号捕获算法。

3 基于交错方向乘子法的捕获算法

在下面的讨论中, 考虑 (P2) 更一般的形式:

$$(P2a) \quad \min_{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)} \|\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_1$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{y}(\hat{\omega}_d) = \mathbf{\Theta}\mathbf{p}(\hat{\omega}_d) \quad (8)$$

由于存在噪声 $\mathbf{v}[n]$, (P2a) 可能没有可行解。为了完成捕获, 对 (P2a) 做如下变形, 得到:

$$(P2b) \quad \min_{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)} \lambda \|\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{\Theta}\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_2^2 \quad (9)$$

式中, $\lambda > 0$ 用于调节 (P2a) 求解过程中目标函数和限制条件的权重。

为将 (P2b) 分解成相对独立的子问题, 引入冗余变量 $\mathbf{q}(\hat{\omega}_d) = \mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$, 则 (P2b) 可以等效为:

$$(P2c) \quad \min_{\{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}(\hat{\omega}_d)\}} \lambda \|\mathbf{q}(\hat{\omega}_d)\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{\Theta}\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_2^2$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{q}(\hat{\omega}_d) = \mathbf{p}(\hat{\omega}_d) \quad (10)$$

使用增广拉格朗日 (augmented Lagrangian) 方法^[25], (P2c) 的最优解可以通过求解如下问题获得:

$$(P3) \quad \max_{\{\boldsymbol{\eta}\}} \min_{\{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}(\hat{\omega}_d)\}} L_\rho(\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}(\hat{\omega}_d), \boldsymbol{\eta}) \quad (11)$$

式中, $\rho > 0$ 为惩罚因子; $\boldsymbol{\eta} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{2N-1}]^T$ 是 $\mathbf{q}(\hat{\omega}_d) = \mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$ 的拉格朗日乘子 (Lagrangian Multiplier); $L_\rho(\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}(\hat{\omega}_d), \boldsymbol{\eta})$ 为增广拉格朗日函数, 定义为:

$$L_\rho(\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}(\hat{\omega}_d), \boldsymbol{\eta}) =$$

$$\lambda \|\mathbf{q}(\hat{\omega}_d)\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{\Theta}\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_2^2 +$$

$$\text{Re}\{\boldsymbol{\eta}^H [\mathbf{q}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{p}(\hat{\omega}_d)]\} + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{q}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{p}(\hat{\omega}_d)\|_2^2 \quad (12)$$

于是, 可将变量 $\{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}(\hat{\omega}_d)\}$ 分成 $\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$ 和 $\mathbf{q}(\hat{\omega}_d)$, 按照如下的 ADMM 框架^[25] 迭代求解:

$$\begin{cases} \mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d) = \arg \min_{\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)} L_\rho(\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}^{(t)}(\hat{\omega}_d), \boldsymbol{\eta}^{(t)}) \\ \mathbf{q}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d) = \arg \min_{\mathbf{q}(\hat{\omega}_d)} L_\rho(\mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}(\hat{\omega}_d), \boldsymbol{\eta}^{(t)}) \\ \boldsymbol{\eta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\eta}^{(t)} + \rho [\mathbf{q}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)] \end{cases} \quad (13)$$

式中, t 为迭代序号。尽管从表面上看, 增加冗余变量 $\mathbf{q}(\hat{\omega}_d)$ 使问题更加复杂, 但更新 $\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$ 和 $\mathbf{q}(\hat{\omega}_d)$ 的问题可以分解成更多相对独立的子问题, 从而进行分布式并行求解。

更新 $\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$ 时, 利用一阶最优条件, 即:

$$\frac{\partial L_\rho(\mathbf{p}(\hat{\omega}_d), \mathbf{q}^{(t)}(\hat{\omega}_d), \boldsymbol{\eta}^{(t)})}{\partial \mathbf{p}(\hat{\omega}_d)} =$$

$$\boldsymbol{\Theta}^H [\boldsymbol{\Theta}\mathbf{p}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{y}(\hat{\omega}_d)] - \boldsymbol{\eta}^{(t)} + \rho [\mathbf{p}(\hat{\omega}_d) - \mathbf{q}^{(t)}(\hat{\omega}_d)] = 0 \quad (14)$$

求得 $\mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)$ 的最优解为:

$$\mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d) = (\boldsymbol{\Theta}^H \boldsymbol{\Theta} + \rho \mathbf{I})^{-1} [\boldsymbol{\Theta}^H \mathbf{y}(\hat{\omega}_d) + \rho \mathbf{q}^{(t)}(\hat{\omega}_d) + \boldsymbol{\eta}^{(t)}] \quad (15)$$

注意 $\boldsymbol{\Theta}^H \mathbf{y}(\hat{\omega}_d)$ 和逆矩阵 $(\boldsymbol{\Theta}^H \boldsymbol{\Theta} + \rho \mathbf{I})^{-1}$ 都可以事先计算, 不妨将后者简记为:

$$\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Theta}^H \boldsymbol{\Theta} + \rho \mathbf{I})^{-1} = [\boldsymbol{\varphi}_0^T, \boldsymbol{\varphi}_1^T, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{2N-1}^T]^T \quad (16)$$

即 $\boldsymbol{\varphi}_m \in \mathbb{C}^{2N \times 1}$ 表示 $\boldsymbol{\Phi}$ 的第 m 行, $m=0, 1, \dots, 2N-1$ 。则 $\mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)$ 中的各元素可以并行计算, 即:

$$\mathbf{p}^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d) = \boldsymbol{\varphi}_m [\boldsymbol{\Theta}^H \mathbf{y}(\hat{\omega}_d) + \rho \mathbf{q}^{(t)}(\hat{\omega}_d) + \boldsymbol{\eta}^{(t)}]$$

$$m = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (17)$$

根据式中各参数的维度, 可知更新 $\mathbf{p}^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)$

的运算量为 $O(2N)$; 更新整个 $\mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)$ 的运算量为 $O((2N)^2)$ 。

更新 $q(\hat{\omega}_d)$ 的问题可以表示为:

$$(P4) \quad \min_{q(\hat{\omega}_d)} \sum_{m=0}^{2N-1} \left\{ |q(m; \hat{\omega}_d)| + \operatorname{Re} \{ [\eta_m^{(t)}]^* q(m; \hat{\omega}_d) \} + \frac{\rho}{2} |q(m; \hat{\omega}_d) - p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)|^2 \right\} \quad (18)$$

显然, (P4) 可以分解为 $2N$ 个独立的子问题, 分别更新 $q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)$, $m=0, 1, \dots, 2N-1$, 即:

$$\min_{q(m; \hat{\omega}_d)} \left\{ |q(m; \hat{\omega}_d)| + \operatorname{Re} \{ [\eta_m^{(t)}]^* q(m; \hat{\omega}_d) \} + \frac{\rho}{2} |q(m; \hat{\omega}_d) - p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)|^2 \right\} \quad (19)$$

同样, 利用一阶最优条件, 有:

$$-\eta_m^{(t)} - \rho [q(m; \hat{\omega}_d) - p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)] \in \lambda \frac{\partial |q(m; \hat{\omega}_d)|}{\partial q(m; \hat{\omega}_d)} \quad (20)$$

由于 $|q(m; \hat{\omega}_d)|$ 是非平滑的, 这里需要使用它的次梯度 (sub-gradient), 表示为^[26]:

$$\frac{\partial |q(m; \hat{\omega}_d)|}{\partial q(m; \hat{\omega}_d)} = \begin{cases} \frac{q(m; \hat{\omega}_d)}{|q(m; \hat{\omega}_d)|} & q(m; \hat{\omega}_d) \neq 0 \\ \{x | |x| \leq 1\} & q(m; \hat{\omega}_d) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

将式代入式有:

$$q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d) = \begin{cases} 0 & |\xi| \leq \lambda \\ \frac{|\xi| - \lambda}{\rho} \frac{\xi}{|\xi|} & \text{其他} \end{cases} \quad (22)$$

式中, $\xi = \rho p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d) - \eta_m^{(t)}$ 。显然, 更新 $q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)$ 的运算量为 $O(1)$; 更新整个 $q^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)$ 的运算量为 $O(2N)$ 。

更新拉格朗日乘子 η 同样可以并行执行, 即:

$$\eta_m^{(t+1)} = \eta_m^{(t)} + \rho [q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d) - p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)] \quad m=0, 1, \dots, 2N-1 \quad (23)$$

式中, 更新 $\eta_m^{(t+1)}$ 的运算量为 $O(1)$, 更新整个 $\eta^{(t+1)}$ 的运算量为 $O(2N)$ 。

因此, 上述步骤 6) 可以利用基于 ADMM 的并行迭代算法来完成, 最终获得 C/A 码相位估计值 $\mathbf{p}(\hat{\omega}_d)$, 算法的主要步骤如下所示。

1) 初始化 $\rho, \lambda, \eta^{(0)}$ 和 $q^{(0)}(\hat{\omega}_d)$, 计算 $\Phi = (\Theta^H \Theta + \rho \mathbf{I})^{-1}$;

2) 重复

3) 更新 $\mathbf{p}^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)$

for $m=0, 1, 2, \dots, 2N-1$, 并行执行

$$p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d) = \varphi_m \left[\Theta^H \mathbf{y}(\hat{\omega}_d) + \rho q^{(t)}(\hat{\omega}_d) + \eta^{(t)} \right]$$

end

4) 更新 $q^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)$

for $m=0, 1, 2, \dots, 2N-1$, 并行执行

$$q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d) = \begin{cases} 0 & |\xi| \leq \lambda \\ \frac{|\xi| - \lambda}{\rho} \frac{\xi}{|\xi|} & \text{其他} \end{cases}$$

end

5) 更新 $\eta^{(t+1)}$:

for $m=1, 2, \dots, 2N-1$, 并行执行

$$\eta_m^{(t+1)} = \eta_m^{(t)} + \rho [q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d) - p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)]$$

end

6) Until 迭代过程收敛;

ADMM 算法可以确保求得 (P2b) 的全局最优解。由文献 [25] 可知, 如果 (P2b) 具有可行解, 且 ADMM 各个子问题都可以唯一地求解, 则 ADMM 迭代过程的每一个聚集点都是原问题的最优解。由于 (P2b) 是一个无限制条件的凸优化问题, 因而必然具有可行解。同时, 由于 ADMM 迭代过程的每一个子问题均为强凸 (strongly convex) 的, 因此, 使用一阶最优条件可以唯一地获得其最优解。因此, 本文提出的 ADMM 算法能够获得原问题的全局最优解。

同时, 本文提出的 ADMM 算法具有可分解的结构, 特别适合分布式并行实现, 能够提高算法效率。如图 1 所示, 整个捕获算法可以由 $2N$ 个捕获通道并行执行, 同时需要一个数据通道负责数据收集和分发。具体而言, 每一轮 ADMM 迭代分为 4 个阶段。在阶段 1, 通道 m 更新 $p^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)$; 在阶段 2, 通道 m 更新 $q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)$; 在阶段 3, 通道 m 更新 $\eta_m^{(t+1)}$; 在阶段 4, 通道 m 将 $q^{(t+1)}(m; \hat{\omega}_d)$ 和 $\eta_m^{(t+1)}$ 传送给数据通道, 数据通道收集整理这些数据, 获得 $q^{(t+1)}(\hat{\omega}_d)$ 和 $\eta^{(t+1)}$, 并将它们广播给 $2N$ 个捕获通道。然后转入阶段 1, 开始下一轮 ADMM 迭代。

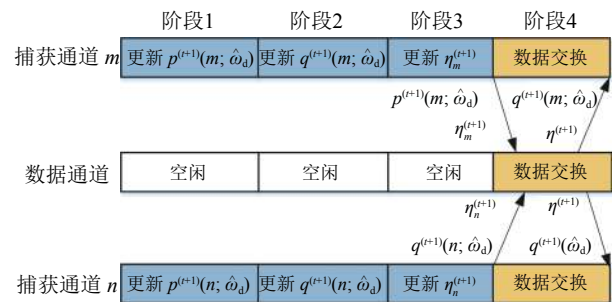


图 1 ADMM 捕获算法的分布式并行执行

注意到在算法并行迭代的每一步都有简单闭合解, 因而运算量很低。根据上述分析, ADMM 算法每轮迭代的运算量为 $O((2N)^2)$, 并行执行过程中单个通道的运算量为 $O(2N)$ 。OMP 算法每轮迭代的平均运算量为 $O(N^3)$, 主要用于求解最小二乘

问题,同时,OMP 算法难以并行执行。因此,本文提出的 ADMM 算法比 OMP 算法更高效。

4 计算机仿真

简便起见,使用仅包含 1 颗 GPS 卫星信号的数据进行仿真测试。该卫星为 2 号星,半码片的 C/A 码相位为 201,多普勒频率为 1 KHz,信号强度为 -125 dBm。

图 2 为 ADMM 算法的典型收敛曲线,此时压缩比为 $M/(2N)=0.7$,即一次捕获利用了 $2\ 046 \times 0.7 \approx 1\ 432$ 个数据包,等效的采样频率为 1.432 MHz。图中的结果表明,在各种惩罚因子取值下,ADMM 算法的迭代过程都能快速收敛。一般经过 50 轮迭代后,ADMM 捕获算法收敛。

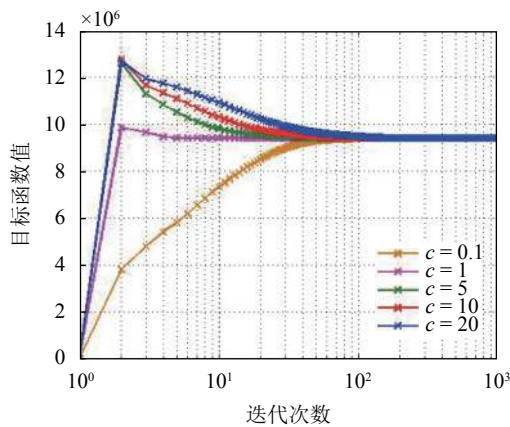


图 2 ADMM 捕获算法的典型收敛曲线

图 3 所示为 ADMM 算法的典型捕获结果。在多普勒频率和 C/A 相位的二维平面上,出现了明显的相关峰,表明捕获到了 2 号星的信号。同时,相关峰出现的位置对应的多普勒频率为 1 000 Hz, C/A 码相位为 201,与预设值相同,实现正确捕获。

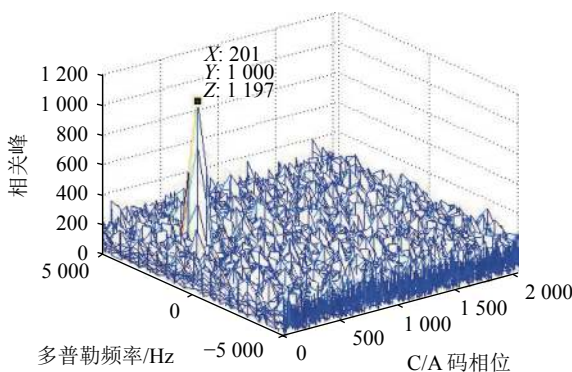


图 3 ADMM 捕获算法的典型捕获结果

图 4 为各种捕获算法在不同信号强度下的捕获概率对比。参与比较的算法有: 1) 传统时域循环相关算法; 2) 基于 OMP 的捕获算法,它利用 OMP

算法求解压缩感知捕获问题 (P1), 详见文献 [19-20]; 3) 基于 SFT 的频谱捕获算法, 详见文献 [23]; 4) 本文的基于 ADMM 的捕获算法。图中结果表明,基于压缩感知的捕获算法能够在低于 Nyquist 采样频率时完成 GPS 信号的捕获,代价是捕获概率略有下降。与之相对,此时传统的时域循环相关算法几乎不能进行捕获。一般而言,采样频率越高(使用的数据量越多,压缩率越高),捕获概率越高。在 3 种压缩感知捕获算法中,基于 ADMM 的捕获算法和基于 OMP 的捕获算法性能接近,优于基于 SFT 的捕获算法。与基于 OMP 的捕获算法相比,本文提出的基于 ADMM 的捕获算法运算量更低,且算法具有可分解结构,十分利于并行实现,使得算法的效率进一步提升,因而实用性更强。

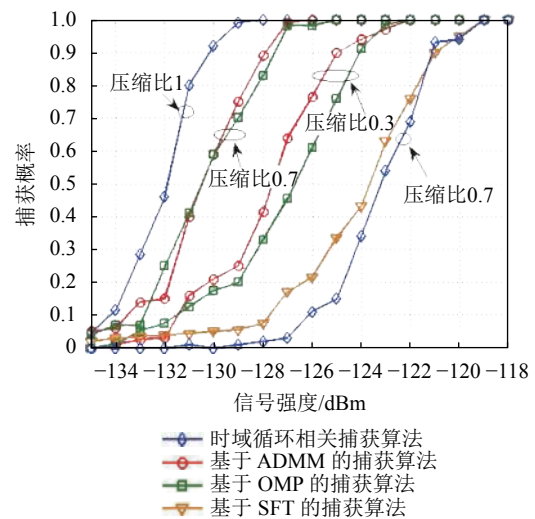


图 4 各种算法的捕获概率对比

5 结束语

本文提出了一种基于 ADMM 的并行 GPS 信号捕获算法。基于 GPS 信号在相关域的稀疏特性,该算法利用 C/A 序列构造正交基,对 GPS 信号进行稀疏表示,据此完成了基于压缩感知的 GPS 信号捕获问题建模。为了高效地求解该问题,本文将该其纳入 ADMM 算法框架,提出一种高效的并行捕获算法。在该算法中,原压缩感知问题被分解成多个相对独立的子问题并行迭代求解,并且迭代的每一步都有简单闭合解,因而具有很低的运算量。仿真结果验证了该算法的正确性和有效性。

参考文献

- [1] 陈忠贵, 帅平, 曲广吉. 现代卫星导航系统技术特点与发展趋势分析[J]. 中国科学, 2009, 39(4): 686-695.
CHEN Zhong-gui, SHUAI Ping, QU Guang-ji. Technical

- characteristics and development tendency of modern satellite navigation systems[J]. *Science in China*, 2009, 39(4): 686-695.
- [2] JAMES B Y T. Fundamentals of global positioning system receivers: A software approach[M]. 2nd Ed. New York: Wiley, 2005.
- [3] LIN D M, TSUI B Y. Comparison of acquisition methods for software GPS receiver[C]//Proceedings of ION GPS 2000. Salt Lake City, USA: [s.n.], 2000: 2385-2390.
- [4] LIN Jing-ran, LUO Zheng-ping, LI Yu-bai. A fast time acquisition method for PSK-2DSS system[C]//Proc IEEE ICCP. Chengdu, China: IEEE, 2011: 414-418.
- [5] 覃新贤, 韩承德, 谢应科. GPS 软件接收机中的一种实用高灵敏度快速捕获算法[J]. *电子学报*, 2010, 38(1): 100-104.
QIN Xin-xian, HAN Cheng-de, XIE Ying-ke. A high sensitive fast acquisition algorithm suitable to implementation software GPS receiver[J]. *Acta Electronic Sinica*, 2010, 38(1): 100-104.
- [6] YNAG C, VASQUEZ M J, CHAFFEE J. Fast direct P(Y)-code acquisition using XFAST[C]//Proceedings of ION GPS 1999. Nashville, USA: [s.n.], 1999: 317-324.
- [7] 杨浩钊. 地北斗伪卫星捕获算法研究及实现 [D]. 成都: 电子科技大学, 2016.
YANG Hao-zhao. Research and realization on Beidou pseudolite acquisition algorithm[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2016.
- [8] VAN NEE D J R, COENEN A J R M. New fast GPS code acquisition technique using FFT[J]. *Electronics Letters*, 1991, 27(2): 158-160.
- [9] 焦瑞祥, 茅旭初. 基于 DBZP 方法的微弱 GPS 信号快速捕获[J]. *电子学报*, 2008, 36(2): 2285-2289.
JIAO Rui-xiang, MAO Xu-chu. Double block zero padding based fast acquisition of weak GPS signal[J]. *Acta Electronic Sinica*, 2008, 36(2): 2285-2289.
- [10] STARZYK J A, ZHU Z. Averaging correlation for C/A code acquisition and tracking in frequency domain[C]//Proc MWSCAS 2001. Dayton: IEEE, 2001: 905-908.
- [11] LIU Ning-qing, SUN Bin, GUAN Chun-meng. Research on an improved PMF-FFT fast PN code acquisition algorithm[J]. *Communication and Network*, 2013, 5(3): 266-270.
- [12] 赵丽, 陈小惠, 潘树国. GPS 频域并行码捕获改进算法[J]. *电子测量与仪器学报*, 2011, 25(11): 985-990.
ZHAO Li, CHEN Xiao-hui, PAN Shu-guo. Improved frequency domain parallel code acquisition algorithm for GPS signal[J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2011, 25(11): 985-990.
- [13] 李新山, 郭伟. GPS 信号 C/A 码快速精密捕获技术研究[J]. *计算机应用研究*, 2014, 31(4): 1131-1134.
LI Xin-Shan, GUO Wei. Research on fast fine C/A code acquisition technique of GPS signal[J]. *Application Research of Computers*, 2014, 31(4): 1131-1134.
- [14] KOU Wei, WEN Zhi-ping, ZHANG Yong-xue, et al. New compress sampling algorithm for FFT-based GPS signal acquisition[C]//The 2007 International Conference on Convergence Information Technology. Gyeongju: IEEE, 2007: 1770-1774.
- [15] 李仰志, 程剑, 吕晶, 等. 基于 Walsh 变换的 GPS C/A 码快速捕获算法[J]. *电子学报*, 2011, 39(6): 1384-1388.
LI Yang-zhi, CHENG Jian, LÜ Jing, et al. The fast GPS C/A code acquisition algorithm based on Walsh transform[J]. *Acta Electronic Sinica*, 2011, 39(6): 1384-1388.
- [16] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [17] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. *电子学报*, 2009, 37(5): 1070-1081.
SHI Guang-ming, LIU Dan-hua, GAO Da-hua, et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [18] 阮迪, 韩崇昭. 压缩传感理论在 GPS/SINS 组合导航中的应用[J]. *导弹与航天运载技术*, 2010, 4: 49-53.
RUAN Di, HAN Chong-zhao. Application of compressive sensing theory in GPS/SINR integrated navigation[J]. *Missiles and Space Vehicles*, 2010, 4: 49-53.
- [19] 林静然, 李玉柏. 一种新的直接序列扩频信号的捕获方法: 中国, CN201110278605.3[P]. 2011-09-25.
LIN Jing-ran, LI Yu-bai. A novel acquisition algorithm for direct sequence spread spectrum signals: China, CN201110278605.3[P]. 2011-09-25.
- [20] 陈绘宇. 基于压缩感知的 GPS 信号捕获算法及其在 OMAP3530-EVM 板上的实现 [D]. 成都: 电子科技大学, 2013.
CHEN Hui-yu. The compressive sensing based GPS signal acquisition algorithm and its implementation on the OMAP3530-EVM board[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2013.
- [21] 程艳合, 杨文革. 基于压缩感知的 DSSS 信号双阶段捕获方法[J]. *北京航空航天大学学报*, 2015, 41(4): 624-631.
CHENG Yan-he, YANG Wen-ge. Two-stage acquisition algorithm for DSSS signal based on compressive sensing[J]. *Journal of University of Aeronautics and Astro-nautics*, 2015, 41(4): 624-631.
- [22] 郭晓彤. 基于压缩感知的 GPS 信号捕获算法研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2014.
GUO Xiao-tong. A study of GPS signal acquisition algorithm based on compressive sensing[D]. Xi'an: Xidian University, 2014.
- [23] 龚巧娟. 基于 SFT 的快速捕获与干扰抑制联合算法研究 [D]. 北京: 北京理工大学, 2015.
GONG Qiao-xian. Research on combined algorithm of acquisition and anti-jamming based on SFT[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015.
- [24] FUKUSHIMA M. Application of alternating direction method of multipliers to separable convex programming problems[J]. *Computational Optimization and Applications*, 1992, 1(1): 93-111.
- [25] GRANT M, BOYD S. The CVX users' guide[EB/OL]. (2014-03-24). <http://cvxr.com/cvx/>.
- [26] KIWIEL K. Methods of descent for nondifferentiable optimization[M]. Berlin: Springer, 1985.