



基于 BEEMD 的单目测距图像区间 阈值降噪算法

孙伟, 杨一涵*, 王野, 李亚丹

(辽宁工程技术大学测绘与地理科学学院 辽宁阜新 123000)

【摘要】 图像噪声是影响单目视觉定位精度的主要因素。该文在二维经验模态分解 (BEMD) 和阈值降噪方法的基础上, 提出一种基于二维集合经验模态分解 (BEEMD) 的区间阈值图像噪声滤除方法。图像经过 BEEMD 分解为不同尺度的多个二维本征模态函数 (IMF) 分量和 1 个残余分量, 依据图像和 IMF 分量的 2 范数准则和概率密度函数方法剔除纯噪声 IMF 分量, 通过合理选择调节因子 α , 利用改进的区间阈值降噪方法实现图像降噪。将该算法应用于单目视觉测距中, 并与 BEMD 算法进行对比, 结果表明, 该方法不仅能有效抑制 BEMD 中的模态混叠问题, 而且能有效削弱图像噪声影响, 从而提高单目视觉测距的精度和可靠性。

关键词 集合经验模态分解; 区间阈值降噪; 单目视觉测距; 随机噪声

中图分类号 P209 文献标志码 A doi:10.12178/1001-0548.2019214

Interval Threshold Denoising Algorithm of Monocular Ranging Image Based on BEEMD

SUN Wei, YANG Yi-han*, WANG Ye, and LI Ya-dan

(School of Geomatics, Liaoning Technical University Fuxin Liaoning 123000)

Abstract Image noise is the main factor affecting the accuracy of monocular vision positioning. Based on bidimensional empirical mode decomposition (BEMD) and threshold denoising, an interval threshold image noise filtering method based on bidimensional ensemble empirical mode decomposition (BEEMD) is proposed. The image is decomposed into multiple bidimensional intrinsic mode function (IMF) components and one residual component of different scales by BEEMD. The pure noise IMF components are eliminated according to the 2-norm criterion and the probability density function method of image and IMF components, the reasonable regulatory factor α is selected, and the image denoising is realized by the improved interval threshold denoising method. The proposed algorithm is applied to monocular vision and compared with the BEMD algorithm. The results show that the method could not only effectively suppress the modal aliasing problem in BEMD, but also effectively reduce the influence of image noise, so the accuracy and reliability of monocular vision are improved.

Key words empirical mode decomposition; interval threshold de-noising; monocular vision ranging; random noise

图像信息质量的高低影响视觉定位的精度, 图像在采集、传输过程中受到外在和内在条件的影响可能导致图像信号质量降低, 从而导致视觉定位测姿精度、测距精度和可靠性降低, 因此, 对图像信息开展降噪处理成为视觉定位技术得以发展的核心。

文献 [1-3] 提出了一种自适应的时频分析方法-经验模态分解 (empirical mode decomposition, EMD),

用于处理非线性及非平稳信号, 但当信号的噪声不明显或噪声存在异常时, 导致相邻本征模态函数 (IMF) 产生分量混叠现象。针对此问题, 文献 [4] 在 EMD 算法基础上提出了集合经验模态分解 (ensemble empirical mode decomposition, EEMD) 方法, 在原始信号 EMD 分解之前加入高斯白噪声, 再均值化处理分解结果, 以抑制甚至消除模态混叠

收稿日期: 2019-09-18; 修回日期: 2020-03-08

基金项目: 辽宁省自然科学基金 (2019-MS-157); 辽宁省高等学校创新人才支持计划 (LR2018005); 辽宁省教育厅高等学校基本科研项目 (LJ2017FAL005); 辽宁省“百千万人才工程”人选科技活动资助项目 (辽百千万立项【2019】45号); 城市空间信息工程北京市重点实验室项目 (2018206)

作者简介: 孙伟 (1984-), 男, 博士, 教授, 主要从事惯性与组合导航方面的研究。

通信作者: 杨一涵, E-mail: 757699262@qq.com

现象, 达到信号分解的目的。文献 [5] 提出一种对比 IMF 分量和原始信号概率密度函数 (probability density function, PDF) 的相似程度的方法, 证实基于 2 范数的几何相似性度量方法准确性更高, 但当 IMF 分量中不存在噪声时, 会出现 2 范数距离高于噪声的现象, 从而致使噪声 IMF 分量判断出现误差。

针对上述问题, 结合图像二维信息的特点, 本文提出一种基于 BEEMD 的区间阈值降噪方法。该方法首先将图像进行 BEMD 分解, 将有用信息与噪声分散到 IMF 分量中, 通过利用原始图像信号与 IMF 分量的 PDF 的 2 范数距离来确定噪声的 IMF 分量。最后通过区间阈值降噪方法获得连续的降噪信号, 达到图像降噪的目的, 并应用于单目视觉测距中, 提高单目视觉测距的精度和可靠性。

1 BEMD 和 BEEMD 算法

BEMD 算法是将时域信号在频域中逐级分解, 产生一系列具有不同特征尺度的 IMF 分量和一个残余分量^[6-8]。对二维图像 $f(x,y)$ 进行分解的流程为:

1) 将原始图像进行初始化, 即输入图像为 $h_{ij}(x,y) = f(x,y)$, 且令 $i = 1, j = 1$ 。

2) 计算 $h_{ij}(x,y)$ 极大值谱 P_{ij} 和极小值谱 Q_{ij} , 绘制二维图像的上、下包络面 $U_{ij}(x,y)$ 和 $L_{ij}(x,y)$ 后, 计算均值包络面:

$$M_{ij}(x,y) = \frac{U_{ij}(x,y) + L_{ij}(x,y)}{2} \quad (1)$$

3) 对源图像局部信息 $h_{i(j+1)}(x,y)$ 开展计算:

$$h_{i(j+1)}(x,y) = h_{ij}(x,y) - M_{ij}(x,y) \quad (2)$$

4) 判定 $h_{i(j+1)}(x,y)$ 是否满足 IMF 约束条件 $SD < (0.2 \sim 0.3)$, 若不满足, 令 $j = j + 1$, 重返流程 2), 直至 K 次循环后满足约束条件为止, 得到本征模态函数 $IMF_i(x,y)$ 。

$$SD = \frac{\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n |h_{i(j+1)}(x,y) - h_{ij}(x,y)|^2}{\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n |h_{ij}(x,y)|^2} \quad (3)$$

5) 求取 $h_{ij}(x,y)$ 残余分量。令 $r_i(x,y) = h_{ij}(x,y)$, $i = i + 1$, 与 $IMF_i(x,y)$ 相减得到第 1 个残余分量 $r_1(x,y)$, 将 $r_1(x,y)$ 按照流程 2) 进行分解, 得到第 2 个 IMF 分量 $r_2(x,y)$, 依次类推, 当第 n 个残余分

量 $r_n(x,y)$ 为单调函数时, 结束 BEMD 分解。

经过上述流程, 原图像可以分解为 n 个 IMF 分量和 1 个残余分量之和, 即:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^n IMF_i(x,y) + r_n(x,y) \quad (4)$$

当图像噪声较多且存在干扰噪声或异常噪声时, 导致模态混叠现象的产生^[9-10], 即 BEMD 分解出的某个 IMF 分量中出现多个不同尺度成分, 或者相同的尺度成分出现在不同的 IMF 分量中。围绕此问题, 提出一种改进的 BEMD 方法, 即 BEEMD 方法, 利用高斯白噪声频率分布均匀的特征, 通过对原始图像进行多次 BEMD 分解, 并且在每次分解时加入白噪声, 得到多个 IMF 分量, 这些 IMF 分量的频率随着其指数的增加而降低, 从而有效避免了模态混叠现象的产生。其算法的具体步骤如下:

1) 在原始信号 $f(x,y)$ 中加入随机高斯白噪声序列:

$$F(x,y) = f(x,y) + \varphi(x,y) \quad (5)$$

2) 利用 BEMD 方法分解 $F(x,y)$, 得到 n 个 IMF 分量 $r_{ik}(x,y)$ 和 1 个残余分量 $r_{nk}(x,y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

3) 重复步骤 2), 对分解结果继续进行 K 次 BEMD 分解, 即 $k = 1, 2, \dots, K$, 计算所有的 IMF 分量和残余分量的均值, 从而得到 BEEMD 分解的结果:

$$\begin{cases} r_i(x,y) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_{ik}(x,y) & i = 1, 2, \dots, n \\ r_n(x,y) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_{nk}(x,y) \end{cases} \quad (6)$$

2 BEEMD 阈值降噪

BEEMD 自适应分解图像得到不同尺度特性 IMF。由于图像信号的能量主要集中在低频区域, 而噪声信息出现在高频区域, 因此提出 BEEMD 阈值降噪方法, 即首先确定并滤除纯噪声 IMF 分量, 然后对其余剩下的 IMF 分量进行阈值降噪处理, 将降噪后的 IMF 分量与剩余 1 个残余分量结合, 并重构得到降噪后的图像信息。降噪后的图像信息可以表示为:

$$\bar{f}(x,y) = \sum_{i=k}^n \bar{r}_i(x,y) + r_n(x,y) \quad (7)$$

式中, $\tilde{f}(x,y)$ 表示降噪后的图像信息; $\tilde{r}_i(x,y)$ 表示进行阈值降噪后的第 i 个 IMF 分量; k 为 IMF 分量中第 1 个噪声共有阶次, 前 $k-1$ 个 IMF 分量为噪声 IMF 分量。

2.1 纯噪声 IMF 分量的确定

通常采用 n 个残余分量与原始图像信息的相关系数确定图像中的纯噪声分量。利用经验阈值确定纯噪声 IMF 分量的个数^[11]:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i &= \sum f(x,y)r_i(x,y) / \left[\sqrt{\sum f^2(x,y)} \sqrt{\sum r_i^2(x,y)} \right] \\ k &= \arg \operatorname{last}_{1 \leq i \leq N} \{ \rho_i \geq \zeta \} + 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中, $r_i(x,y) = f(x,y) - \sum_{k=1}^i r_k(x,y)$; ρ_i 表示相关系数; $\operatorname{last}\{\cdot\}$ 表示相关系统 ρ_i 中最后一个不小于经验阈值 ζ 为 $0.7 \sim 0.8$ 的值。在不同信号中以及信号信噪比偏低的环境下, 经验阈值 ζ 难以准确判定。使用 IMF 分量与原始信号 PDF 之间的 2 范数距离指标判断两个信号的相似程度更为可靠, 并在此基础上得到噪声 IMF 分量的判定方法^[12]:

$$\left\{ \begin{aligned} L_i &= \left[\sum (\operatorname{pdf}(f(x,y)) - \operatorname{pdf}(r_i(x,y)))^2 \right]^{1/2} \\ m &= \arg \max_{1 \leq i \leq N} \{ L_i \} + 1 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

式中, $\operatorname{pdf}(f(x,y))$ 表示图像信息 $f(x,y)$ 的概率密度函数; L_i 为基于 PDF 的 2 范数距离。由于 L_i 伴随 IMF 分量频率降低的同时, 纯噪声分量也逐渐降至最低, 下一阶 IMF 分量中的信号信噪比最高, 继而出现降低趋势。因而式 (9) 会存在后续 IMF 分量的 L_i 高于噪声 IMF 的情况, 导致判断失误。因此本文假设 L_i 中最大值分量为最后一个纯噪声 IMF 分量, 而之后的 IMF 分量存在噪声共存:

$$\left\{ \begin{aligned} L_i &= \left[\sum (\operatorname{pdf}(f(x,y)) - \operatorname{pdf}(r_i(x,y)))^2 \right]^{1/2} \\ m &= \arg G \max_{1 \leq i \leq N} \{ L_i \} + 1 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

与式 (9) 不同, 式 (10) 中 $G \max\{\cdot\}$ 为 L_i 中的第一个极大值, 如果 $\{L_i\}$ 呈现逐步减小且无局部极大值时, 可认定图像中不存在噪声; 如果 $\{L_i\}$ 呈现逐步增加且无局部极大值时, 认定残余分量中存在有用信息。

拍摄实验室走廊图像并将其作为测试图像进行分解, 其分解结果如图 1 所示。取其峰值处的 IMF 阶数作为 m 参数, 得到图 2。

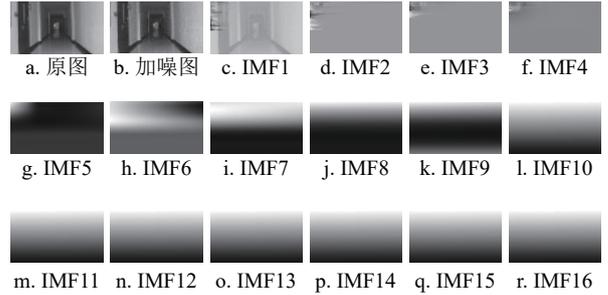


图 1 图像 BEEMD 分解结果

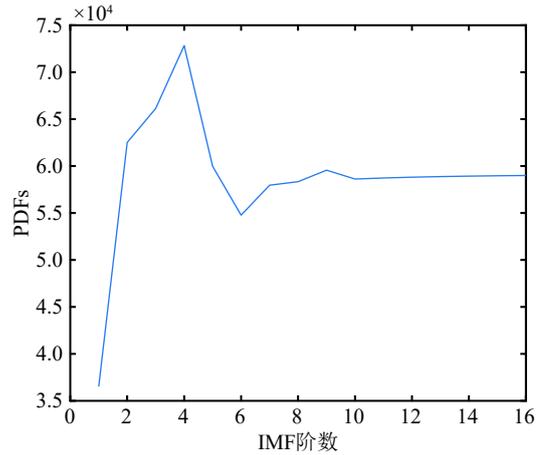


图 2 图像信号中 m 参数的确定

2.2 区间阈值降噪

采用阈值降噪方法剔除图像中的纯噪声 IMF 分量, 将信号值小于阈值的部分置零, 将大于阈值的部分保留或者缩放, 进行信号重构获取降噪后的图像信息^[13-15]。典型的阈值降噪处理方法包括硬阈值法和软阈值法, 但是硬阈值法具有信号在阈值处不连续的问题, 而软阈值法在进行缩放大于阈值部分的信号时会导致恒定偏差的产生。针对此问题, 结合软硬阈值定义方法设计了一种改进的自适应阈值判定方法, 如图 3 所示。

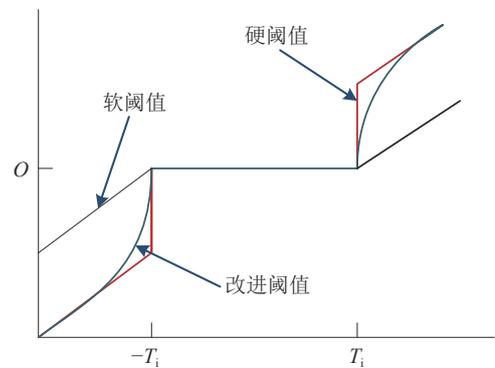


图 3 改进阈值函数

$$\tilde{r}_i(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(r_i(x,y)) \left[|r_i(x,y)| - T_i e^{(\alpha T_i - \alpha |r_i(x,y)|)} \right] & |r_i(x,y)| \geq T_i \\ 0 & |r_i(x,y)| < T_i \end{cases} \quad (11)$$

式中, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数; T_i 为第 i 个 IMF 分量的阈值; $r_i(x,y)$ 为图像中各个点的像素值。当调节因子 $\alpha=0$ 时, 自适应阈值函数变为软阈值函数; 当 α 趋于无穷大时, 自适应阈值函数变为硬阈值函数。通过对调节因子 α 的合理选择, 阈值设定能够兼顾软硬阈值的优点, 通常在 $\alpha \geq 100$ 的区间内进行选择。以区间内的极值点为依据, 对整个区间进行统一的降噪处理, $\tilde{r}_i(x,y)$ 为降噪之后的处理结果。

$$\begin{cases} \hat{E}_i = E_1^2 \rho^{-i} / \tau & i = 2, 3, \dots, n \\ \hat{\sigma}_1 = \text{med}(|c_1(t)| : t = 1, 2, \dots, T) / 0.6745 \end{cases} \quad (12)$$

式中, \hat{E}_i 表示第 i 个 IMF 分量的噪声能量; 参数 ρ 和 τ 分别取值 0.719 和 2.01; $\hat{\sigma}_1$ 为第 1 个 IMF 分量的噪声标准差, 且第 1 个 IMF 分量的噪声能量 $E_1 = \hat{\sigma}_1$ 。

结合式 (12) 给出的各阶 IMF 分量与 1 阶 IMF 分量噪声的能力关系, 可进一步获取去除纯噪声 IMF 分量后各 IMF 分量判断噪声的阈值为:

$$T_i = \sqrt{E_i \times 2 \ln N} \quad i = m, m+1, \dots, n \quad (13)$$

由此可见, 采用 BEEMD 区间阈值降噪方法实现图像降噪的基本步骤为: 1) 对原始图像添加高斯白噪声后进行 BEEMD 分解, 得到多个 IMF 和 1 个残余分量; 2) 采用本文提出的噪声 IMF 分量判定方法, 判断纯噪声 IMF 分量并去除; 3) 在剩余 IMF 分量中, 根据噪声能量关系得到其噪声阈值后, 获取降噪后的 IMF 分量, 结合式 (7) 获得降噪后的图像信号。

3 实验与分析

3.1 图像降噪比对分析

为验证本文提出图像降噪方案的可行性与可靠性, 并客观评价算法降噪效果, 采用华为 matebook13 笔记本进行数据的采集与处理工作。电脑配置参数如表 1。

表 1 电脑配置参数

参数	电脑配置
CPU	I7-8565U 1.80 GHz
内存	8 GB
显卡	NVIDIA GeForce Mx150

将笔记本电脑连接摄像头进行图像采集, 拍摄实验室走廊图像, 利用 matlab 软件对加入随机噪声的实验室走廊图像分别采用小波阈值降噪、BEMD 降噪及本文提出的改进阈值 BEEMD 方法进行比对实验, 结果如图 4 所示。同时采用均方误

差 MSE 和信噪比 SNR 两项指标对不同算法的降噪效果进行比较, 结果如表 2 所示。



a. 原图像



b. 加入随机噪声



c. 小波阈值降噪



d. BEMD方法



e. 本文算法

图 4 随机噪声图像降噪对比结果

从表 2 得知, 小波降噪和 BEMD 算法均可对图像中的噪声进行削弱, 但 BEMD 算法效果略差, 因为该算法在图像降噪中没有准确区分出噪声主导模态分量和信号主导模态分量, 只对前两阶 IMF 进行了阈值降噪。而本文算法对噪声图像降噪后获取的 MSE 和 SNR 均高于小波和 BEMD 算法, 且降噪效果不受噪声强度影响。

表 2 不同方差随机噪声降噪前后 MSE 和 SNR 对比结果

噪声标准方差	降噪前		小波降噪		BEMD		本文算法	
	MSE	SNR	MSE	SNR	MSE	SNR	MSE	SNR
0.005	0.0049	9.2806	0.0024	11.6163	0.0026	11.6842	0.0020	12.9472
0.01	0.0098	6.7584	0.0029	10.8284	0.0032	10.5314	0.0023	11.8688
0.05	0.0431	2.4130	0.0053	7.9323	0.0057	7.3953	0.0049	8.2802
0.1	0.0725	1.3098	0.0074	5.1074	0.0070	6.6838	0.0058	8.0051

从时间成本上考虑, 小波降噪算法需要人为的选择合适的小波基函数及分解层数, 失去了对比时间成本的必要性, 因此仅对 BEMD 分解算法及本文所提的 BEEMD 区间阈值降噪算法进行时间成本的对比, 实验结果如表 3 所示。

表 3 BEMD 与 BEEMD 时间成本对比

噪声标准方差	BEMD/s	BEEMD/s
0.005	8.43	8.41
0.01	7.58	7.58
0.05	7.34	7.34
0.1	7.52	7.51

在分别加入标准方差为 0.005、0.01、0.05、0.1 的噪声下, BEMD 算法的平均运行时间为 7.72 s, 本文 BEEMD 算法的平均运行时间为 7.71 s, 两者时间一致的情况下, 本文 BEEMD 算法的降噪效果更好, 降噪精度更高。

3.2 室外单目测距实验及分析

搭建室外测距环境, 分别进行静态和动态测距实验, 采用全自动全站仪实时监测待测点与相机之间的距离作为参考基准。同样采用华为 matebook13 笔记本连接摄像头进行图像的采集, 获取测试平台测距所需的标定图像, 并利用 python 程序分别对使用本文 BEEMD 算法、小波算法和 BEMD 算法降噪处理后的图像进行测距解算。

在静态测距实验中, 为验证测距方法的可靠性, 分别等间距设置 4 个同等特征待测点, 如图 5 所示, 将摄像头置于棱镜上方且保持静止状态, 然后拍摄此时的标定图像, 然后将标定图像取下, 并在此位置放置一台全自动全站仪, 测出此时全站仪与棱镜之间的距离作为参考基准, 并将摄像头获取的图像分别采用小波、BEMD 算法和本文提出的 BEEMD 算法进行降噪处理并完成摄像头与待测点距离的解算, 与参考基准进行对比得到对应的测距误差如表 4 所示。

从表 4 得出, BEEMD 算法降噪后获取的测距误差远优于小波和 BEMD 算法, 且对不同距离的

待测点均体现出本文算法的稳定性和准确性。

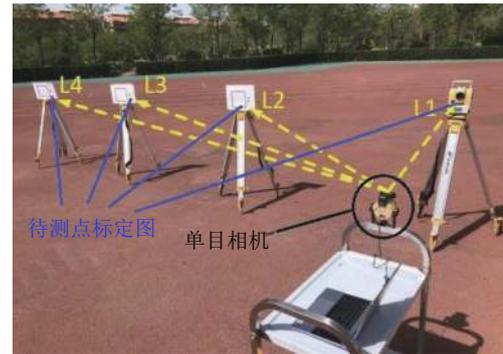


图 5 实验系统与测试环境

表 4 不同待测点测距误差

待测点	小波降噪/cm	BEMD/cm	BEEMD/cm
待测点1	1.334	1.925	0.274
待测点2	2.265	2.708	0.470
待测点3	1.608	2.834	0.521
待测点4	2.856	2.267	0.664

为验证本文提出 BEEMD 降噪方法对于动态环境中测距的可行性及优势, 将载有单目相机的实验车进行直线运动。同时拍摄车载相机运动环境下的运动画面及采集对应的全站仪监测数据后, 以 1 s 为单位分别截取对应的 30 帧画面后, 采用 BEEMD 算法、小波和 BEMD 算法进行降噪处理并完成测距解算, 结果如图 6 所示。

表 5 给出实验车直线运动条件下 30 帧画面对应的测距均方根误差 (RMSE)。

结合图 6 及表 5, 30 帧图像采用 BEMD 降噪方法获取的最大测距位移变化误差达到 6.965 cm, 均方根误差为 3.074 cm; 采用小波降噪方法获得最大测距误差为 5.685 cm, 均方根误差为 3.074 cm; 而本文提出的 BEEMD 方法在运动情况下获取的测距误差均优于小波降噪和 BEMD 且体现出较好的稳定性, 其最大测距误差优于 1.020 cm, 均方根误差为 0.569 cm, 论文提出的 BEEMD 方法可有效提高单目视觉测距的鲁棒性。

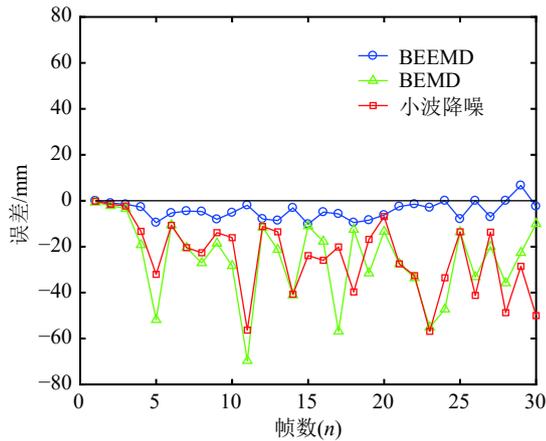


图 6 不同帧图像对应的测距位移变化量

表 5 直线运动下不同方法解算结果 RMSE

算法	距离误差/cm
小波降噪	2.907
BEMD	3.074
BEEMD	0.569

4 结束语

单目视觉测距中, 被匹配图像质量成为制约匹配精度的重要因素, 针对现有 BEMD 图像分解中存在模态混叠问题, 论文提出一种基于 BEEMD 分解的图像区间阈值降噪算法, 用此方法对含有随机噪声的实验图像进行处理, 并与小波降噪和 BEMD 降噪算法比较, 取得了更好的降噪效果。开展静态和动态环境下的单目视觉测距实验, 将不同降噪方法用于测距并开展对比性分析, 结果表明, 与小波降噪算法和 BEMD 降噪算法相比, 在测距误差方面本文算法较其他方法均有大幅度改善, 能有效削弱图像噪声并提高单目视觉测距的精度和可靠性。

参考文献

- [1] HUANG N E, SHEN Zheng, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, 454(1971): 903-995.
- [2] KOMATY A, BOUDRAA A O, AUGIER B, et al. EMD-based filtering using similarity measure between probability density functions of IMFs[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2014, 63(1): 27-34.
- [3] KOPSINIS Y, MCLAUGHLIN S. Development of EMD-based denoising methods inspired by wavelet thresholding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(4): 1351-1362.
- [4] WU Zhao-hua, HUANG N E. Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method[J].

- [5] 胡建平, 李玲, 谢琪, 等. 多通道图像 EMD 及应用[J]. *计算机工程与应用*, 2019, 55(5): 211-218, 250.
- [6] 张绘娟, 张达敏, 闫威, 等. 基于改进阈值函数的小波变换图像去噪算法[J]. *计算机应用研究*, 2018, 37(5): 1-6.
- [7] 刘晓杰, 范虹, 党小虎. 结合二维 EEMD 和小波分解的遥感图像纹理方向检测[J]. *地理与地理信息科学*, 2016, 32(1): 66-70.
- [8] 刘韬, 徐爱功, 隋心. 惯性导航 EEMD 区间阈值降噪方法[J]. *测绘学报*, 2018, 47(7): 907-915.
- [9] 张雪峰, 韩志玲. 一种改进 BEMD 的指纹边缘检测算法[J]. *西安邮电大学学报*, 2018, 23(1): 45-52.
- [10] 柳笛, 陈熙源, 方文辉. 一种改进的 BEMD 阈值去噪算法在单目视觉定位中的应用[J]. *中国惯性技术学报*, 2018, 26(6): 737-746.
- [11] 甘雨, 隋立芬. 基于经验模分解的陀螺信号消噪[J]. *测绘学报*, 2011, 40(6): 745-750.
- [12] YANG Gong-liu, LIU Yuan-yuan, WANG Yan-yong, et al. EMD interval thresholding denoising based on similarity measure to select relevant modes[J]. *Signal Processing*, 2015, 109(1): 95-109.
- [13] PARK M, KIM D, OH H S. Quantile-based empirical mode decomposition: an efficient way to decompose noisy signals[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2015, 64(7): 1802-1813.
- [14] SHAHDOOSTI H R, KHAYAT O. Image denoising using sparse representation classification and non-subsampled shearlet transform[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2016, 10(6): 1081-1087.
- [15] SELESNICK I. Sparse regularization via convex analysis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 65(17): 4481-4494.