

• 复杂性科学 •

多层网络的结构与功能研究进展



吴宗柠, 狄增如, 樊 瑛*

(北京师范大学系统科学学院 北京 海淀区 100875)

【摘要】该文对多层网络的研究现状与进展进行了综述。首先,介绍了不同类型多层网络的概念,描述了多层网络的数学模型构建;其次,根据多层网络的拓扑结构,分别从基本统计性质、节点重要性、社团结构、鲁棒性与动力学行为 4 个方面综述多层网络的研究进展;最后展望了多层网络的未来研究方向。

关键词 动力学; 多层网络; 统计性质; 拓扑结构

中图分类号 TP39; N94 **文献标志码** A **doi**:10.12178/1001-0548.2020068

The Structure and Function of Multilayer Networks: Progress and Prospects

WU Zong-ning, DI Zeng-ru, and FAN Ying*

(School of Systems Science, Beijing Normal University Haidian Beijing 100875)

Abstract The progress of multilayer networks is summarized in this article. First, the concepts of various types of multi-layer networks are introduced and their mathematical models are described. Then, according to the topological structure properties, the existing research is reviewed from four parts: basic statistical properties, node importance, community structure, robustness, and dynamic behavior. At last, the future research directions of multi-layer networks are prospected.

Key words dynamics process; multilayer networks; statistical properties; topology structures

复杂网络是通过对复杂系统相互作用结构的简化和抽象,从而给出一种理解复杂系统性质和功能的研究途径。自小世界特性和无标度特性被提出以来^[1-2],该研究范式经过不断发展与完善,已成为复杂系统与复杂性科学重要的研究工具与方法。复杂网络分析方法在研究复杂系统的演化机制和功能上扮演着重要的角色,并被广泛地应用于各个领域,包括社会经济、交通电力、脑科学及生命科学等^[3-6]。

尽管该研究框架对相关研究起到重要的推动作用,但将复杂系统简单地抽象成单个网络忽略了复杂系统中多类型关系交互的贡献。复杂系统由众多个体组成,它们之间以某种或多种方式发生非线性的相互作用。这些相互作用关系使其在时间和空间上产生各种形式的关联结构,并呈现出系统的时空多尺度特征。因此,将复杂系统抽象成单个网络的研究范式无法进一步满足复杂系统研究的需要。

在网络科学中,多层网络是研究前沿和热点,它突破了单层网络中节点和连边同质性的限制,考虑了多种类型节点及其连边关系(包括层内连边和层间连边)^[7-8]。事实上,由几个网络的相互作用关系刻画的复杂系统普遍存在。如在社会系统中,不同类型的社交关系(朋友、同事、亲属等)能够被抽象成不同的网络层,进而代表友谊、协作、家庭等社会关系;基础设施系统可以通过区分不同的运输工具(公共汽车、地铁、火车、飞机等),进而研究基础设施系统应对突发灾难的能力;大脑系统中,不同脑功能区的相互作用可能有所不同,用一个全面的多层框架来研究大脑系统可以处理不同类型相互作用之间存在的差异。复杂系统的时空多尺度特征通过多层网络建模及分析,可以揭示系统拓扑性质与演化机制。已有的多层网络研究在理论上主要关注网络的拓扑结构、动力学、功能以及它们

收稿日期: 2020-03-18; 修回日期: 2020-10-29

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(71731002); 国家自然科学基金面上项目(61573065)

作者简介: 吴宗柠(1993-),男,主要从事复杂网络、计算社会科学和网络嵌入等方面的研究。

通信作者: 樊瑛, E-mail: yfan@bnu.edu.cn

之间的关系, 同时在社会经济系统、生态和生物系统等领域进行了应用。这些研究已取得了一系列重要且有影响力的成果, 如多层网络理论研究^[3]、耦合网络传播^[9]、时序网络^[10-11]以及相互依存网络鲁棒性和抗毁性^[12-13]。本文在这些研究的基础上, 对多层网络的最新进展进行综述。

目前, 多层网络研究也开始从简单地扩展单层网络的概念与方法, 发展到针对多层网络结构与实际问题定义相应的拓扑性质和动力学行为^[14]。本文重点从如下几个方面对多层网络的研究进展进行梳理与评述: 多层网络建模、基本统计性质、社团结构、多层网络功能与动力学行为, 进而阐述多层网络所产生的新现象与规律。

1 多层网络模型构建

研究多层网络面临的首要问题是网络的构建与数学描述, 即定义网络中节点和连边。虽然多层网络概念没有明确的统一的定义, 但是依据拓扑结构特征可将其划分为多路复用网络、时序网络、网络的网络、相互依赖网络等不同的类型。本章主要关注多层网络一般形式的数学描述, 并从矩阵表达、张量表达和聚合表达3个方面进行介绍。

1.1 多层网络的矩阵表达

多层网络更加关注复杂系统中的异质性, 这种异质性包括不同类型节点以及属于不同网络层节点之间相互作用模式的刻画。这使得多层网络研究框架能够更全面完整地描述复杂系统的结构。单个网络中的节点及其相互作用关系可以由邻接矩阵完整地刻画, 这种建模方案可以很自然地扩展至多层网络。多层网络的矩阵表达也被称为超邻接矩阵或者分块矩阵^[3, 7]。

一个含有 M 层的多层网络 (multilayer networks) 可以用超邻接矩阵 $G = (A, O)$ 来表示。其中 $A = \{A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[M]}\}$ 表示多层网络中的层的邻接矩阵集合, $A^{[\alpha]} = (V^{[\alpha]}, E^{[\alpha]})$ 表示 α 层的邻接矩阵, $V^{[\alpha]}$ 表示 α 层的节点集合 (该集合中的节点 i 表示为 $v_i^{[\alpha]}$), $E^{[\alpha]}$ 表示 α 层的层内连边集合。 $a_{ij}^{[\alpha]}$ 是 $A^{[\alpha]}$ 中的元素: 当 α 层中节点 i 和节点 j 有连边时, $a_{ij}^{[\alpha]} = 1$, 否则 $a_{ij}^{[\alpha]} = 0$ 。 $O = \{O^{[1,2]}, O^{[1,3]}, \dots, O^{[\alpha,\beta]} | \alpha \neq \beta\}$ 表示层间网络邻接矩阵的集合。 $O^{[\alpha,\beta]} = (V^{[\alpha]}, V^{[\beta]}, E^{[\alpha,\beta]})$, 其元素 $O_{ij}^{[\alpha,\beta]}$ 代表是否存在 α 层节点 i 到 β 层节点 j 的连边。 $V^{[\alpha]}$ 和 $V^{[\beta]}$ 分别表示 α 层和 β 层的节点集合, $E^{[\alpha,\beta]} = \{(v_i^{[\alpha]}, v_j^{[\beta]}) | i, j \in \{1, 2, \dots\}; \alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, M\}\}$ 表示 α 层和 β 层的层间连边集合。

根据上述定义, 多层网络的一般形式可被定义为 $G = (A, O) = \{A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[M]}; O^{[1,2]}, O^{[1,3]}, \dots, O^{[\alpha,\beta]}\}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, M\}$)。示意图如图 1a 所示。用超邻接矩阵可表示为:

$$G = \begin{pmatrix} A^{[1]} & O^{[1,2]} & \dots & O^{[1,M]} \\ O^{[2,1]} & A^{[2]} & \dots & O^{[2,M]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O^{[M,1]} & O^{[M,2]} & \dots & A^{[M]} \end{pmatrix} \quad (1)$$

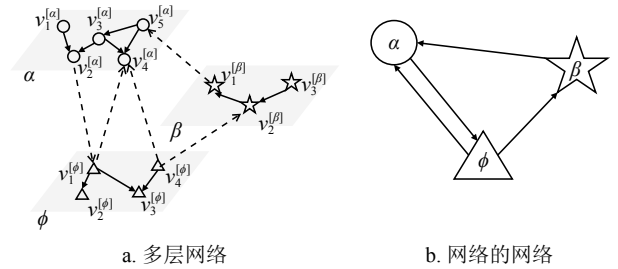


图 1 多层网络和网络的网络示意图

与单层网络一样, 多层网络 G 也可以被定义为加权、有向和符号等不同的网络形式, 不加赘述。需要说明的是一些文章也将这种具有不同网络相互关系所组成的“大网络”称为网络的网络 (network of networks), 如图 1b 所示, 其本质上与多层网络的概念是一致的。此外, 一些研究还针对特殊的多层网络结构类型进行了定义。下面将介绍 3 种常见的模型: 相互依存网络、多路复用网络、时序网络。

相互依存网络 (interdependent networks) 是由多个具有相依存关系的网络所组成, 示意图如图 2 所示。层间连边表示了节点的依存关系, 这种依存关系使得一个网络层的动态变化会极大地影响其他网络层。如“计算机-电力”相互依存网络: α 层表示电站之间相互传输电力, β 层表示计算机之间互通信息。电站之间的电力传输通过计算机进行控制, 而计算机间的通信又依赖于电站供给必需的电力。

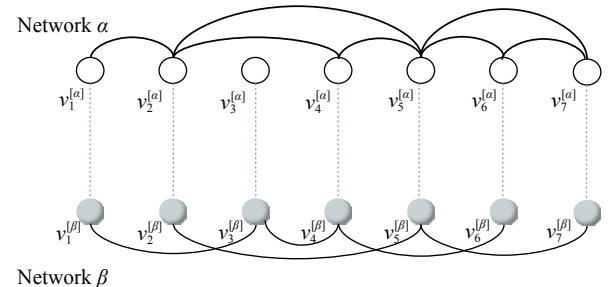


图 2 相互依存网络示意图

多路复用网络 (multiplex networks) 中的所有网络层由同一组节点构成, 如图 3 所示。该网络的特点是每一个网络层表示节点间的某种关系或者相互作用模式, 而层间连边表示同一个节点在不同网络层的对应关系。如不同的社会关系所构成的多层社交网络, 其中不同层表示的是个体间不同的社交关系 (可以包括朋友关系、合作关系或者家庭关系等)。

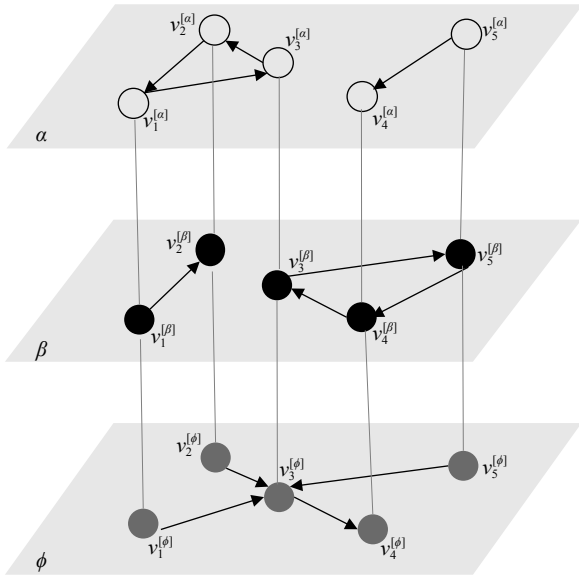


图 3 多路复用网络示意图

多层网络还可以用于研究单个网络随时间演变的情况。在随时间演变的过程中, 节点和连边都有可能发生变化 (新增或移除), 这种变化可能是某种因素带来的, 如网络遭受攻击或者故障等。在此, 由单个网络随时间变化所构成的多层网络被称为时序网络 (temporal networks), 示意图如图 4 所示。

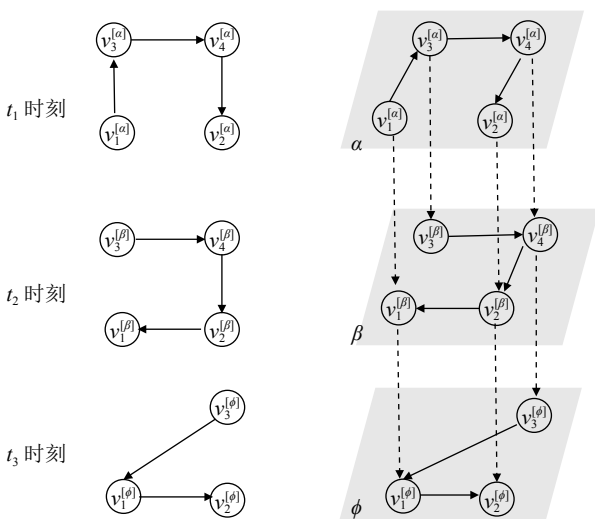


图 4 时序网络示意图

1.2 多层网络的张量表达

张量本质是多维数组, 也是数量、向量、矩阵的自然推广。一阶张量是一个向量, 二阶张量是一个矩阵, 三阶以上的张量称为高阶张量。张量的阶 (order) 表示为张量维度的数目。以多路复用网络为例, 该类型多层网络的张量表达是 $U = (u_{i\alpha j\beta}) \in \mathfrak{R}^{N \times M \times N \times M}$, 这是一个四阶张量 (fourth-order tensor)^[15-16]。S 中每个元素可以被定义为: 如果节点 $v_i^{[\alpha]}$ 和节点 $v_j^{[\beta]}$ 存在连边, 则 $u_{i\alpha j\beta} = 1$; 否则 $u_{i\alpha j\beta} = 0$ 。其中, $1 \leq i, j \leq N, 1 \leq \alpha, \beta \leq M$, N 表示多路复用网络中每层网络的节点总数, 为了简写有时候 $u_{i\alpha j\beta}$ 也被写成 $u_{j\beta i\alpha}^{\alpha}$ 。

张量表征方法为研究多层网络及其动态过程提供了一个强有力的工具。多层网络的张量表达不仅可以直接得出不同层之间的对应关系, 还不会丢失网络的细节信息。文献 [15] 给出了多层网络拓扑性质的张量形式描述, 包括度中心性、聚类系数、特征向量中心性、熵和扩散等。

1.3 多层网络的聚合表达

多层网络模型由于多维度网络层的引入, 为网络基本统计性质、社团结构以及动力学行为的刻画带了新的挑战。为了降低研究的复杂性, 早期的研究考虑了多层网络的聚合表达^[8], 即在不考虑多层结构层间交互性质的情况下, 将多层网络压缩成单层网络 (该单层网络被称为聚合网络)。

聚合网络的邻接矩阵可以被定义为: $B = \{b_{ij}\}$, 即当任意的网络层 $\alpha: a_{ij}^{[\alpha]} = 1$, 则 $b_{ij} = 1$, 否则 $b_{ij} = 0$ 。聚合网络也可以是加权的, 权重的含义是 i 和 j 在多层网络中连边的次数。值得说明的是, 聚合网络本质上是一个单层网络, 而在聚合网络中连边的含义是两个节点在至少一层上共享一条边。

聚合网络是多层网络的简化形式。这样的建模方式虽然降低了后续研究的难度, 但是丢失了多层网络特有的拓扑信息 (层间相互作用关系)。一个开放性的问题是究竟需要多少层才能够准确地表示复杂系统的结构, 即考虑如何用较少的层数尽可能保留整个系统的信息。文献 [17] 提出了一种层聚合和结构可还原的模型, 采用网络层的熵定义了多层网络的可区分性指数, 并通过最优化该指数来获得最优划分。结果表明一些真实网络可以减少 75% 的冗余层。

2 多层网络的拓扑性质

多层网络的拓扑性质能够量化地描述复杂系统的基本特征。本节从多层网络的基本统计特征和

中心性测度两方面进行总结。

2.1 多层网络基本统计特征

2.1.1 节点的统计特征

节点度是网络的一阶属性, 其刻画了网络的局部统计特征, 即节点的邻居数量。给定一个多层网络, 节点 i 的度是 $k_i = \{k_i^{[1]}, k_i^{[2]}, \dots, k_i^{[M]}\}$, 其中 $k_i^{[\alpha]} = \sum_{i \neq j} a_{ij}^{[\alpha]}$ 表示节点 i 在 α 层内的度值。节点在各个层中度值总和为重叠度, 定义为 $o_i = \sum_{\alpha=1}^M k_i^{[\alpha]}$ 。在加权多层网络中, 点强度指某个节点与其近邻节点权重之和并被定义为 $s_i = \{s_i^{[1]}, s_i^{[2]}, \dots, s_i^{[M]}\}$, 其中 $s_i^{[\alpha]} = \sum_{i \neq j} w_{ij}^{[\alpha]}$ 表示节点 i 在 α 层内连接的点强。

与单层网络相比, 多层网络中节点有着更丰富的拓扑性质, 如参与系数和熵^[8]。参与系数衡量了节点在不同层中连边分布的异质性, 其本质是辛普森多样性指标^[18] 并被定义为 $p_i = \frac{M}{M-1} \left[1 - \sum_{\alpha=1}^M \left(\frac{k_i^{[\alpha]}}{o_i} \right)^2 \right]$ ($p_i \in [0, 1]$)。当节点 i 的所有连边都在同一层时, $p_i = 0$, 而节点 i 在不同的网络层中具有相同的连接方式时 $p_i = 1$ 。根据参与系数值可以将节点划分为3类, 即 $p_i \in [0, 0.3]$ 称集中型点; $p_i \in (0.3, 0.6]$ 称混合型; $p_i \in (0.6, 1]$ 称多重型。相似的定义还有节点熵, 其本质是香农熵^[19] 并被定义为 $H_i = - \sum_{\alpha=1}^M \frac{k_i^{[\alpha]}}{o_i} \ln \left(\frac{k_i^{[\alpha]}}{o_i} \right)$ 。值得说明的是, 香农熵与辛普森多样性指标在衡量生物多样性方面有着广泛的应用, 这两个指标都是兼顾了均匀度 (刻画了各个物种个体数目分配的均匀程度) 与丰富度 (样本中物种的数量) 的综合指标。

2.1.2 网络层的统计特征

多层网络关注了不同网络层之间的相互作用关系, 使得网络层的统计性质也备受关注。相关研究关注层的统计性质, 包括层的重叠性、相关性和中心性等。

文献 [8] 考虑了多路复用网络层的重叠性 $Q_{\alpha\beta}$, 它计算了两个层之间共同出现的节点占整个网络节点的比例。 $Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^{[\alpha]} v_i^{[\beta]}$, 其中 $v_i^{[\alpha]}$ 是取值为 0 或 1 的整数, 1 代表节点 i 在第 α 层中活跃 (在 α 层中的节点 i 的度值大于 0), 0 代表不活跃。 $Q_{\alpha\beta} \in [0, 1]$, $Q_{\alpha\beta} = 1$ 表示所有节点在两层均为活跃状态, $Q_{\alpha\beta} = 0$ 则表示所有节点均为非活跃状态。

层的度相关性指的是每个层度序列之间的相关

系数。研究表明层间存在强的度相关性, 而这种强相关性对网络的鲁棒性、多层网络社团探测以及链路预测等方向的研究有着积极的作用^[3]。

2.1.3 集聚系数

集聚系数是对复杂网络中节点紧密程度的刻画, 也是网络的高阶属性。集聚系数被定义为网络中节点的邻居之间也互为邻居的比例, 即网络中三角关系的比例^[1]。文献 [8, 20] 将集聚系数扩展到多路复用网络。在三角结构 $j-i-k$ 中, 存在 3 种情况: 1-triangle (三条边在同一层), 2-triangle (仅有两条边在同一层) 和 3-triangle (三条边在不同层)。进一步, 以节点 i 为中心还可以定义三元结构: 1-triad ($i-j$ 和 $i-k$ 属于同一层) 和 2-triad ($i-j$ 和 $i-k$ 属于不同层)。由此, 根据 2-triangle 和 3-triangle 的比例分别定义了两种多路复用网络的集聚系数。需要说明的是多路复用网络的层间连接是一一对应的, 故三角结构的定义未考虑层间连接信息。

第一种定义集聚系数关注以节点 i 为中心, 2-triangle 三角形数和 1-triad 三元数的比例, 即:

$$C_{i,1} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{[\alpha]} a_{jm}^{[\beta]} a_{mi}^{[\alpha]})}{(M-1) \sum_{\alpha} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{[\alpha]} a_{mi}^{[\alpha]})} \quad (2)$$

第二种定义集聚系数关注以节点 i 为中心, 3-triangle 三角形数和 2-triad 三元数的比例, 这种定义仅适用于大于 3 层的网络模型。即:

$$C_{i,2} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{\phi \neq \alpha} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{[\alpha]} a_{jm}^{[\phi]} a_{mi}^{[\beta]})}{(M-2) \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{j \neq i, m \neq i} (a_{ij}^{[\alpha]} a_{mi}^{[\beta]})} \quad (3)$$

式中, α, β, ϕ 表示不同的网络层。

2.2 多层网络中心性测度

量化网络中心性是复杂网络分析的重要话题, 也对研究网络结构与功能的关系具有重要意义。多层网络的中心性测度包括节点中心性与层中心性。本节将对多层网络中心性量化的方法进行总结与分析。

2.2.1 多层网络的节点中心性

量化多层网络的中心性主要基于两种思路: 一方面, 以预先确定的恒定权重作为层对节点中心性影响的权重; 另一方面, 着眼于一些特殊的多层网络类型定义中心性, 如多路复用网络。本节主要关注多层网络节点的中心性指标。

PageRank 算法已广泛地应用于复杂网络中节点中心性的度量,其基本思想是一个节点的重要性取决于指向该节点的邻居数量和质量。在多层网络中,PageRank 节点中心性不仅仅取决于指向该节点的数量和质量,还取决于所在层的相对重要性。文献 [21-22] 基于层间的相互作用关系定义了多层网络的 PageRank。以两层相互依存网络为例, $\mathbf{A}^{[\alpha]}$ 和 $\mathbf{A}^{[\beta]}$ 分别表示双层网络中层的邻接矩阵。为了方便表述,规定 α 层中节点的 PageRank 中心性表示为 $f = [f_1, f_2, \dots, f_N]$, 以及 β 层中节点的 PageRank 中心性表示为 $z = [z_1, z_2, \dots, z_N]$ 。首先,由经典 PageRank 算法获得 α 层中的节点中心性 f 。其次, β 层中的节点中心性不仅考虑网络层中指向该节点的节点数量与质量影响,还要考虑来自其他层节点的影响。故 β 层的节点中心性可被描述为 $z_i = \tau^{[\beta]} \sum_j f_i^\mu a_{ij}^{[\beta]} \frac{z_j}{G_j} + (1 - \tau^{[\beta]}) \frac{f_i^\lambda}{N \langle f^\lambda \rangle}$ 。其中 $G_j = \sum_l a_{lj}^{[\beta]} f_l^\mu + \delta \left(0, \sum_l a_{lj}^{[\beta]} f_l^\mu \right)$, 模型的调节参数为 $\lambda, \mu > 0, \tau^{[\beta]}$ 为 β 层 PageRank 参数, $\langle f \rangle$ 表示 f 的平均值。文献 [23] 针对多路复用网络提出了一种新的 PageRank (functional multiplex PageRank, FMP) 方法量化节点中心性。FMP 方法首先将节点 PageRank 中心性 X_i 定义为一组参数的函数 $X_i(\lambda)$: 单层网络上的 PageRank、聚合网络上的 PageRank 以及边 (i, j) 同时在每一层网络上的 PageRank; 然后,通过最大化中心性函数获得稳定的节点重要性排序。文献 [24] 将多路复用网络的 PageRank 看作平稳分布,通过一些约束条件,对该类型网络的 PageRank 精确估计。文献 [22] 则基于有偏的随机游走定义了多层 PageRank, 直接考虑网络之间的相互作用对节点重要性的影响。有偏的随机游走指的是在下一节点跳跃时,会以概率 p 在 α 层网络上游走和概率 $1-p$ 在 β 层网络游走。

此外,还有一些研究关注层间连接如何影响多层网络的节点中心性。文献 [25] 采用张量框架来研究多层网络特征向量中心性,并证明了在给定层间影响形式下多层网络的特征向量中心性存在的唯一性。该方法在资源分配时考虑了层间相互作用模式对多层中心性的贡献,即 $H_{j\beta}^{i\alpha} \Theta_{i\alpha} = \lambda \Theta_{i\beta}$ 。其中,层的相互作用表示为 $H_{j\beta}^{i\alpha} = W_{\beta}^{\alpha} u_{j\beta}^{i\alpha}$, 即 α 层的 i 节点到 β 层的 j 节点的相互作用 $u_{j\beta}^{i\alpha}$ 与网络层 α 对网络层

β 的影响程度 W_{β}^{α} 的乘积, λ 是参数。

2.2.2 多层网络的层中心性

层的中心性对定量化研究其他统计测度有着重要意义,它的含义是每一层网络在多层网络中的相对重要程度。层的中心性定义目前有两种比较常用的方法:一是通过张量分析方法量化其重要性;二是根据层内拓扑结构信息量化其重要性。

张量分析方法是研究多层网络的一种重要的数学工具,近年来也被用于研究多层网络的层中心性。文献 [26] 基于张量分解量化了多层网络的中心性。文献 [27] 基于网络的张量定义提出了一种新的特征向量中心性度量方案,并验证了该方法的唯一性与收敛性。文献 [28-29] 利用张量方程的迭代算法,提出了一种多路复用网络中心性的度量方法。该方法同时计算了层中心性和节点中心性,并利用布劳沃不动点定理证明了该中心性在某些条件下的存在唯一性和迭代算法的收敛性。张量迭代方程为:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^M O_{i\alpha j\beta} x_j y_{\alpha} y_{\beta} \\ y_{\alpha} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{\beta=1}^M O_{i\alpha j\beta} x_i x_j y_{\beta} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $1 \leq i, j \leq N; 1 \leq \alpha, \beta \leq M$; x_i 和 y_{α} 分别表示多层网络的节点中心性和层的中心性。

此外,还有一些研究基于层内拓扑信息量化层中心性。文献 [28] 提供了两种策略计算层中心性:边的介数中心性和最短路径。该指标的核心思想是承担全局连接越多的网络层具有越高的中心性。具体来说,首先将多层网络压缩成聚合网络并量化边的重要性;然后根据某些策略将边中心性分布到每一层,最后将层中心性定义为层中边中心性之和。文献 [30] 融合了层与节点的信息以确定层中心性和节点中心性。该算法的基本思想是如果一个节点能够连接到影响力较高的层则具有更大的中心性,相应地,如果网络层中高中心性的节点越多则该层越具有影响力。

3 社团结构

社团结构是复杂网络研究中的重要内容之一。研究社团结构对拓扑结构分析、功能分析和行为预测有着至关重要的意义。相比于单层网络,多层网络结构具有更加丰富的拓扑信息,这将有助于更精准地探测网络中潜藏的社团结构,进而加深对结构

与功能关系的理解。

3.1 基于模块度优化的社团划分算法

多层网络是单个网络自然地扩展, 并用于描述现实复杂系统中不同网络之间的相互作用关系。融合多层网络大数据并对其进行社团结构挖掘是一个重要的研究方向。模块度函数优化是探测社团结构的经典方法, 其核心思想是通过最大化目标函数获得最优的社团划分结果。

多层网络社团结构具有代表性的研究是 2009 年发表在 *Science* 上的论文。该文将模块度的概念推广到动态的、具有多种连接形式的多层网络, 其核心思想是通过比较最大化实际网络中边的总权重与作为零模型的随机图中边的期望总权重之间的区别, 以此将网络分为若干个不同的社团^[31]。具体来说, 首先将网络中的每个节点都视为一个社团, 并在多层网络模块度函数最大化的约束下合并社团, 然后不断重复这个过程, 直到模块度函数达到一个局部最大值。文献 [32] 提出了多层边缘混合模型, 其核心思想是将边的混合信息引入模块度函数, 其中边的权值反映了边缘在社团探测过程中的作用, 进而识别出不同的社团。文献 [33] 利用局部社团检测框架给出了 3 种优化函数, 分别对应于不同的层内和层间拓扑特征的融合。

3.2 基于网络层聚合的多层网络社团划分算法

由于层间相互作用的存在, 多层网络比单层网络社团探测更具有复杂性。为了降低社团探测的难度, 相关研究基于多层网络的聚合结构进行社团划分。该研究主要有两种思路: 聚合网络社团划分算法和共识聚类算法。

聚合网络社团划分算法是将一个多层网络压缩成单层网络后, 直接利用单层网络的社团划分算法对其进行社团探测。该方法明显的缺点是忽略了层相互作用的异质性。文献 [34] 将层间信息纳入了网络聚合的过程。首先, 计算了每层网络的节点相似性矩阵和重要度。若该层网络与其他网络层的相似性越强则说明其重要程度越高。然后, 利用层重要性对节点相似性矩阵进行加权求和。最后, 在该加权网络上进行社团划分。文献 [35] 考虑了在阈值约束下, 多层网络由 M 层到 K 层 ($K < M$) 的聚合过程如何影响社团结构。结果表明带阈值的层聚合是一个非线性的数据过滤器, 而合适的阈值可以检测出原本无法检测到的小社团 (即直接以多层网络或者聚合网络进行社团划分)。

共识社团划分算法 (consensus community structure) 是通过利用每个网络层的社团划分结果和节点相似性矩阵进行聚类分析。具体来说, 首先对多层网络的每个层进行社团探测, 然后根据每个节点对 (i, j) 在同一层网络中属于同一社团的次数与网络层数的比值定义节点之间的相似性, 最后基于节点相似性的聚类分析方法获得最终的社团结构。文献 [36] 则直接考虑通过计算每个节点对在同一层网络中属于同一社团的次数作为边权构造出一个单层网络, 然后直接对该网络进行社团划分。结果表明基于共识聚类的多层网络社团划分算法可以快速地在真实的网络中生成一致和稳定的社团。文献 [37] 采用了频谱聚类或低秩矩阵分解的方法组合多层网络中的多源信息, 进而识别了多层网络的社团结构。

3.3 基于动力学的社团划分

复杂网络的结构与功能具有紧密的联系, 许多网络动力学的方法也被用于识别社团结构^[38]。下面将介绍随机游走和压缩流方法在多层网络社团划分中的应用。

文献 [33] 分析了多路复用网络上不同随机游走的局部行为与社团结构之间的关系。文献 [39] 提出一种局部自适应随机游走算法, 通过调整转移概率, 使其依赖于任意给定节点和网络层之间的拓扑相似性。首先, 该方法定义了一个节点 $v_i^{[\alpha]}$ 在下一时刻呆在原位置 $v_i^{[\alpha]}$, 跳到同一层的邻居节点 $v_j^{[\alpha]}$ 以及跳到其他层的同一节点 $v_i^{[\beta]}$ 和不同节点 $v_j^{[\beta]}$ 处的概率。其次, 基于多层随机游走的长度定义了距离矩阵。该矩阵包含层内和层间任意一对节点之间的所有可能的距离。无论两个节点是否在同一层中, 当这两个节点属于同一社团时, 它们之间的距离较小; 反之距离较大。最后, 对距离矩阵进行聚类。为了确保每个可以检测到的社团都是连接的, 规定只有当节点和社团之间至少有一个层内或层间连接时才可以合并。在此过程中, 该方法同时考虑了被检测社团的层内连接和层间连接, 并用模块化函数来最终确定社团结构。

压缩流方法有助于捕捉加权和有向网络中的社团探测, 文献 [40] 将该方法扩展到多层网络。通过随机沃克模型对动力学建模证明了该方法可以揭示具有更多重叠的、更小的模块。在该模型中节点的转移概率为 $\phi_{ij}^{[\alpha, \beta]} = (O_i^{[\alpha, \beta]} / s_i^{[\alpha]}) (a_{ij}^{[\beta]} / s_i^{[\beta]})$, 其中, $s_i^{[\alpha]} = \sum_{\beta} O_i^{[\alpha, \beta]}$ 为层间点强, $s_i^{[\beta]} = \sum_j a_{ij}^{[\beta]}$ 为层内点

强, $O_i^{\alpha\beta}$ 为节点 i 的层间邻接矩阵, a_{ij}^{β} 表示为 β 层内邻接矩阵。值得注意的是, 实际数据中很少包含层间权重的信息, 为此该模型采用具有松弛率 r 的随机游走过程模拟节点的跳跃过程。在给定的步骤中, 节点分别以 r 和 $1-r$ 的概率在层间与层内随机游走。节点 i 从 α 层随机游走到 β 层的概率为 s_i^{β}/s_i^{α} 。由此, 节点的转移概率可以描述为 $\phi_{ij}^{\alpha\beta}(r) = (1-r)\delta(a_{ij}^{\beta}/s_i^{\beta}) + r(a_{ij}^{\beta}/s_i)$ 。其中, $s_i = \sum s_i^{\beta}$, δ 为模型参数。然后, 通过随机游走生成序列并对其进行层次编码。编码长度最小时, 所对应的社团结构即为最佳划分。

3.4 多层网络中的重叠社团划分

大多数社团探测算法考虑的对象是节点, 即将节点划分到唯一的社团, 但这会忽略节点属性的多样性。节点同时属于多个社团的现象被称为社团结构的重叠性。本节主要介绍两种重叠社团的划分算法。

3.4.1 派系过滤算法

一个社团从某种意义上可以看成是一些互相连通的“小的全耦合网络”的集合。这些“全耦合网络”称为“派系”, k -派系则表示该全耦合网络的节点数目为 k 。网络中的 k -派系社团可以看成是由所有彼此连通的 k -派系构成的集合, 如网络中的 2-派系代表了网络中的边。文献 [41] 将派系过滤方法拓展到了多层网络。该方法的思路是用邻接矩阵和连边标签的信息同时找到多层网络中的社团。与单层网络派系过滤算法相似, 多层网络的派系过滤社团划分方法分为 3 部分: 1) 定义多路复用网络层的派系 (AND-派系)。AND-派系是由各个层次的派系组合而成的, 即 k - m -AND-派系为具有 k 个节点的多层网络中的子图, 该子图包括来自 m 个不同层的至少 m 个不同 k -团的组合。2) 通过 AND-派系定义找到最大派系及其派系邻接矩阵。3) 聚合派系。当两个派系至少共享 $k-1$ 个点和 m 条边时, 则将这两个派系聚合在一起, 进而得到最终的社团结构。

3.4.2 边聚类算法

多层网络社团结构可以通过由许多不同类型的连边构成, 利用边聚类社团划分的思想可以量化节点间连边的相似性进而探测多层网络的重叠社团。文献 [42] 提出了一种基于边聚类的多层网络社团检测方法。通过比较两条边实际观察到的局部结构与最大熵模型的期望结构, 计算出两条边之间的

相似性并得到相似矩阵。然后根据相似矩阵进行分层聚类构造树状图, 进而得到最佳的社团结构。文献 [43] 结合了层间信息与层内信息提出了一种新的重叠社团探测算法。该社团划分算法主要分为如下步骤: 首先, 计算同一层和跨层边的相似性。然后, 计算多层网络社团密度。计算社团密度的基本思路是计算 V_c^{α} 中节点之间的连接可能性, 并使用社团 c^{α} 中的最小链接数 $\min(E_c^{\alpha}) = V_c^{\alpha} - 1$ 和最大链接数 $\max(E_c^{\alpha}) = \left(\frac{2}{V_c^{\alpha}} \right)$ 来规范这种可能性。其中 $c^{\alpha} = (V_c^{\alpha}, E_c^{\alpha})$ 表示 α 层中社团 (c) 节点和边的集合。最后, 通过连边相似权和树状图社团密度, 并根据最大密度和聚类分析找到网络的社团。该方法同时考虑了节点在层内与层间的相互作用信息, 使其在真实网络中可以找到更小、更密集的重叠社团。

4 多层网络功能

现代社会中各类基础设施的交互依赖关系使其具有脆弱性, 如从飓风到大规模停电停水, 从恐怖袭击到交通与互联网瘫痪, 以及经济金融危机的联动效应等。研究多层网络结构与功能的关系对寻求复杂系统一般机理与演化规律有着重要意义。本节将从鲁棒性与渗流问题、动力学过程以及“一致性”现象等方面梳理多层网络的研究进展。

4.1 多层网络的鲁棒性与渗流

4.1.1 多层网络的鲁棒性

网络的结构与功能性质紧密联系在一起, 多层网络中节点与连边的多样性会影响系统的鲁棒性及其动力学过程。实际网络经常面临各种突发事件的干扰, 使网络崩溃与瘫痪, 甚至遭受经济损失。深入探讨网络拓扑结构对鲁棒性的影响, 将有助于更好地了解实际网络的鲁棒性能, 进而设计具有抗毁性的网络结构。本节综述了多层网络鲁棒的研究进展。

网络类型对多层网络鲁棒性的影响。文献 [44] 研究了相互依存网络的鲁棒性问题, 结果表明减少网络之间的耦合强度会导致渗流在临界点附近从一级相变转为二阶相变。文献 [45] 研究了多层网络中的冗余结构如何调控系统的鲁棒性。结果表明通过在层之间增加额外的连边会提高系统的鲁棒性。文献 [46] 则考虑了多层网络的层次结构对鲁棒性的影响。结果表明层次结构可以影响基础设施网络的脆弱性。文献 [47] 基于沙堆模型还分析了无标度性质和层间关联度如何抑制多层网络中节点的大规模失效。

不同类型的层间相关性对多层网络鲁棒性的影响。文献 [48] 关注层间的度相关性对鲁棒性的影响。研究表明在随机攻击的情况下正相关的多层网络比负相关的网络更加健壮; 相反, 在蓄意攻击的情况下正相关网络具有脆弱性而负相关网络则具有鲁棒性。此外, 多层网络中层间的入度(出度)相关性增加了网络的鲁棒性^[49]。文献 [50] 研究了多层网络潜在的几何相似性对鲁棒性的影响。研究表明多层网络潜在的几何相似性会缓解网络目标攻击的脆弱性。文献 [51] 考虑了非最大连通集团中的节点被激活所带来的影响。结果表明随着网络层间依赖关系的增加, 系统鲁棒性的边界也会随之提高。

网络社团结构对多层网络鲁棒性的影响。多层网络不仅具有相互关联层间耦合结构, 还具有社团结构。网络在特定区域发生局部故障时, 社团结构对影响整个系统发挥着重要作用。社团结构的变化会给耦合系统带来极端的风险^[52]。文献 [53] 关注了一类特殊的多层网络: 每层网络中具有相同的社团数量且层间连接被限制在不同层对应的社团之间。结果表明模块化结构会显著地影响相变的类型。

多层有向网络的不对称性对多层网络鲁棒性的影响。文献 [49] 基于生成函数和渗流理论的理论框架分析了相互依赖的有向网络的鲁棒性。结果表明, 每层网络不对称性增加了多层网络的脆弱性并呈现混合相变。更为重要的是异质网络比同质网络更具鲁棒性。此外, 有向多层网络中巨强连接组件比巨弱连接组件更容易受到攻击^[54]。文献 [55] 基于不需要跟踪每个级联步骤的自洽概率方法分析了有向依赖边对临界性的影响。结果表明, 多层网络的相变性质只能由几个参数来决定, 且节点间有向依赖关系大大降低了网络鲁棒性。文献 [56] 发现在有向多层网络中, 层间的耦合强度会使系统呈现不同的相变现象。

4.1.2 多层网络的渗流

多层网络中一些节点的故障会导致从属节点以及其他层节点的故障, 这种级联故障破坏了网络连接性质, 最终会导致系统突然崩溃^[44, 57]。一个重要的问题是如何控制失效节点的比例以避免系统的功能性失效。该问题可以用渗流方法进行建模与模拟, 进而分析系统的脆弱性。本节将从网络结构与渗流现象、最优渗流以及群体渗流等方面综述多层网络上渗流过程的最新进展。

1) 从网络结构的视角讨论多层网络的渗流。文献 [58] 提出了一个通用框架并研究了相互依存网

络的渗流特性。结果表明层间耦合强度 q (层间节点对之间的连边权重)能够影响系统的相变。在渗流的过程中存在最大的耦合强度 q_{\max} 和有效的耦合强度 q_c^{eff} : 当 $q < q_c$ 时, 多层网络有二级相变; 当 $q_c^{\text{eff}} < q < q_{\max}$ 时, 则呈现出混合相变。这里混合相变是指序参量在临界点有不连续的跃变和临界指数关系; 其他情况下不存在相变现象。渗流的临界阈值不取决于网络的层数。文献 [56] 量化了多层有向网络的不对称性对网络鲁棒性的影响, 结果表明了多层有向网络的不对称性会增强级联故障的鲁棒性。文献 [59] 则从节点的空间地势差异的视角讨论 3D 网络拓扑结构的渗流理论。以道路网络为例, 一个小的局部扰动可能导致整个道路网络在临界点处的大规模系统故障。文献 [46] 考察了具有层次结构的多层网络的渗流过程。结果表明层次结构的弹性取决于每一层的社团结构的数量、节点度、移除节点的比例以及层间的耦合强度。文献 [60] 关注了多层网络的迭代渗流过程, 即探究历史依赖机制的作用。结果表明连续渗流相变可能由若干过程迭代作用而成。而无限迭代渗流过程会改变系统巨分支的涌现方式, 进而呈现出不连续相变。

2) 多层网络上的最优渗流。最优渗流指的是在复杂网络中如何移除尽可能少的节点以最大程度破坏渗流过程中的最大连通集团, 从而将连通集团分裂成许多小规模且相互断开连接的集团。文献 [61] 将该思路拓展到多层网络, 重点关注在最优渗流过程中忽略多层结构所产生的后果。结果表明, 如果忽略层的存在会高估系统的鲁棒性。文献 [62] 通过耦合网络的灾难性崩溃与活跃节点的动态消亡过程展示了网络之间的相互依赖的最佳范围。

3) 从增强系统抵御风险能力的视角, 许多研究还考虑了群体渗流和键渗流。一方面, 实际系统中一些节点会以群组的形式相互协作以增强其抵御风险的能力, 但是在无法抵御风险时, 这些相互协作的节点会同时失效。这一现象被称为群体渗流。文献 [63] 发现多层网络中一些节点构成的群组可以显著地提高网络的鲁棒性, 但是无论群大小的分布如何, 渗流相变总是一级的。另一方面, 多层网络键渗流则描述了网络中所有连接组件的结构和大小如何受到键渗流的影响。文献 [64] 建立了一个通用的理论来研究上述问题, 研究结果对优化网络和检测网络崩溃前的细微信号有着重要的作用。实际上, 多路复用网络鲁棒性的增强会导致多个不连续渗流相变的产生^[65]。在相互依存网络中, 只需要加

强一小部分节点的抗压能力就可以防止突然灾难性崩溃^[66]。文献 [67] 提出了一个用动力学模型和拓扑网络结构来描述级联故障的研究框架, 并且提供了一系列能够预测系统故障程度的定量结果。

4.2 多层网络上的动力学

4.2.1 传播动力学

多层网络上的传播动力学是值得探索的课题。多层网络中层间交互耦合信息使得其动力学过程具有多样性与复杂性。文献 [68] 总结了复杂网络扩散过程数值模拟的经典方法。本节主要从多层网络传播与扩散机制的角度评述相关工作。

扩散现象描述的是系统中微观个体从高浓度区域到低浓度区域的运动^[69]。早期研究多层网络的扩散行为有两种模式: 所有层中具有相同扩散机制的动态过程^[70] 和不同层中具有不同扩散机制的动态过程^[71-72]。在相同扩散机制下, 层间的耦合强度能够调控扩散过程, 即弱的层间耦合会减缓扩散, 而强的耦合会使得扩散速度收敛至所有层叠加的平均速度。在研究多层网络动力学过程时, 层间和层内扩散的权衡可以采用有偏的随机游走模型表述^[73]。在不同扩散机制下, 双层耦合网络是被研究得较为全面和透彻的。双层网络的协同演化动力学过程对于实际问题的模拟与机制研究有着重要的意义。根据协同演化传播研究的对象, 可以将其大致分为生物协同演化传播问题(描述实际系统中两个传染病同时爆发的传播行为)、社会协同演化传播问题(社会传播具有加强效应, 多次传播行为具有很强的不确定性)、意识-流行病传播(定量刻画意识对流行病传播范围的影响)和资源-流行病传播(在有限的社会资源下通过优化分配以极大程度地抑制流行病爆发)四大类^[9, 74]。

根据传播模式来看, 可以将其分为 3 种情况: 相互促进^[75]、相互抑制^[76] 以及既有促进又有抑制^[77]。文献 [77] 通过微观马尔可夫链, 将上述 3 种传播类型统一到相同的框架之下讨论。首先定义传播速率的层间调控参数 λ_1 和 λ_2 , 使得原来独立的两个层的感染率由 η_1 和 η_2 变为 $\lambda_1\eta_1$ 和 $\lambda_2\eta_2$ 。当 $\lambda_1 > 1$ 时, α 层传播率变大, 表示 β 层对 α 层的传播有促进作用, 反之有抑制作用。同理通过 k_1 和 k_2 的不同组合可得到对应的传播模式。在这样的传播机制下, 系统存在一条可以区别局部传播和非局部传播的临界曲线, 该曲线显示了两个区域之间的交叉: 两个区域之间的临界特征既有独立性又有依赖性^[69]。

拓扑结构也影响着多层网络的扩散。首先, 多

层网络中层的某些拓扑度量相关性影响着扩散结果。文献 [78] 通过量化层间距离研究了层间相似性对网络扩散的影响, 结果表明低的层间相似性会增强多层网络的扩散。当存在于多个层上的节点的时间激活模式正相关时, 节点复用程度的增加会显著降低流行病阈值^[79]。层间节点的重叠度会影响扩散能力: 当扩散能力较强时, 层间重叠性缺失对促进最大化传播有重要的影响^[80]。值得关注的是低重叠度和中低值扩散系数不利于扩散。其次, 文献 [81] 关注了多层有向网络中层间耦合程度和不对称程度对扩散过程的影响, 结果表明中度耦合的网络会比完全耦合的网络具有更高的传播能力。最后, 多层网络结构与动力学和其 Laplace 矩阵光谱特性是相互影响的^[70, 82-83]。文献 [82] 对多路复用网络拉普拉斯算子进行了频谱渐近分析, 结果表明网络在扩散过程中呈现超扩散现象。超扩散现象指的是扩散从弛豫到稳定状态的时间尺度比孤立的任何层都小^[70]。超扩散最早出现在扩散层较弱的系统中且与层重叠性无关。

此外, 多种病毒传播涉及丰富的动力学过程也备受关注^[84]。多种病毒传播动力学的复杂性体现在病毒之间的多种交互方式和接触网络层间的相互作用模式。当两种病毒在一个网络上传播时, 系统存在共存阈值(两种疾病会在传染病阈值与共存阈值之间同时流行)^[85]。若将其推广到两种病毒不在同一个网络上传播时, 共同阈值则作为一种特殊情况出现^[86]。文献 [87] 提出了一个研究框架以讨论网络层的相互作用所带来的影响。结果表明两种病毒不会在单个接触网络上长期共存, 但在双层网络中可以长期共存。此外, 一些研究还关注了多层网络及其聚合网络上的多病毒传播问题。文献 [86] 研究了重叠网络上两种流行病的动态传播过程, 结果表明两个网络的重叠程度对抑制第二种病毒的传播是有益的。但是, 当两个相互作用的流行病在多层网络上传播时, 重叠的连边对动力学过程没有影响^[88]。

4.2.2 多层网络上的交通动力学

交通系统由多个相互影响的运输网络组成, 包括道路网络、公交网、地铁网等等。交通运输过程中所产生的拥堵现象不仅仅受到交通事故、极端天气、大型活动等随机因素的干扰, 还会受到多层网络结构的影响。深入了解交通系统的特征有助于理解交通堵塞问题, 也对提升突发交通状况的应对能力有着重要的意义。本节将对多层网络上的交通动力学研究进行总结与评述。

网络结构对交通拥堵的影响。文献 [89] 提出了一个交通动力学模型, 分析了多层交通网络结构中网络层之间的协作现象。文献 [90] 构建了一个耦合交通网络模型并定义了包含路径长度和交通负荷系数的效用函数。结果表明层间最佳的耦合关系与最小平均路径不是等价的。在双层网络中, 对节点进行分类耦合比随机耦合更容易缓解交通拥堵问题^[91]。文献 [92] 分析了不同交通拥堵情况下不同网络结构的抗拥堵能力。结果表明双层网络中无论哪一层具有无标度特性, 都能让交通系统具有更高的抗拥塞能力。此外, 文献 [93] 指出多路复用网络结构会导致拥堵, 同时不同层运输效率的失衡也会导致拥堵。

考虑到不同类型的交通工具传输效率不同, 一些研究还关注了传输速度异质性的作用, 了解传输速度异质性有助于设计出合理的流量分配策略, 进而为缓解交通堵塞等问题提供科学依据。文献 [91] 研究了耦合空间网络上的交通动力学, 结果表明网络最大承载量与双层网络中的传输速度比有关。文献 [94] 提出了一种有效的多层网络流量分配策略, 可以合理地将低速网络层的流量重新分配到高速层。文献 [95] 提出了一种负载均衡模型, 该模型在保持高速层传输优势的同时减少了资源消耗。

4.2.3 多层网络上的演化博弈

演化博弈关注的是有限理性的个体如何在重复博弈的过程中通过策略学习来优化收益。在演化博弈的过程中, 参与者之间的关系所形成的网络结构至关重要。多层网络是对多种社会关系的抽象, 其中节点表示博弈实验的参与者, 在不同层中的连边表示参与者间某种特定的关系, 层间连边表示不同网络层之间的依赖关系^[96]。本节将对多层网络上的演化博弈进行评述与分析。

参与者的层外收益对演化博弈结果的影响, 即参与者的收益来源包括层内与层外两部分。文献 [97] 分析了当所有参与者都能与层外参与者互动的情况, 结果表明两个相互依赖的网络促进了合作。而在层内只有一部分特定参与者能与层外参与者互动时, 则存在最佳的相互依存关系以保证最高的合作水平^[98]。这种最佳相互依赖关系可以自发演化, 即使在极端不利的条件下也能保持协作。然而, 参与者的适应性和奖励会自组织地产生促进合作行为的超级参与者, 这种现象的产生与博弈规则和网络结构无关^[99]。

网络层之间的依赖关系还可以通过策略更新机

制的影响来确定。参与者采用某种特定策略, 同时依赖于其所在网络层中邻居的收益和其他网络层的其他策略, 这种耦合方式有利于促进合作^[100]。对于合作区域而言, 如果某个策略在参与者所在的区域被频繁使用, 那么采用其他策略的意愿将大大减弱。反之亦成立, 即如果其他策略在其他网络层中被频繁使用, 那么这将增大其在当前网络层中被接受的可能性。

网络结构对演化博弈结果的影响。文献 [101] 研究了多路复用网络的层数与边重叠度的作用, 结果表明多个社会关系的存在本身可能会促进合作。在度相关性很强的多路复用网络中, 博弈的最终结果会独立于收益参数^[102]。在相互依赖的加权网络中, 参与者的多样性会影响合作的发展^[103]。在网络层间的连边模式产生不同的纳什均衡, 这会对处于不同地位的参与者产生反直觉的博弈结果^[104]。此外, 节点在层间的分类匹配可以增强协作, 这种现象与层中的网络结构无关^[105]。

4.3 多层网络上的“一致性”行为

4.3.1 多层网络的同步行为

同步现象是指在满足一定条件和耦合相互作用的影响下, 个体状态在宏观上形成步调一致的现象。现实生活中同步是一种常见的现象, 如多个钟摆的一致性摆动, 萤火虫的同步发光, 以及鼓掌时呈现的一致性等等。系统的同步行为有两种呈现形式: 一是序参量在通过相变点后呈现增长, 即呈现连续相变; 二是序参量在通过相变点时发生突变, 即呈现一级相变(也被称为爆炸性同步)^[106]。随着多层网络研究的兴起, 多层网络上同步行为的研究也备受关注。

从多层网络拓扑结构的视角看同步行为。文献 [107] 研究了通过随机连接的双层网络, 网络层内连边的权重与网络层间连边的权重之间的平衡会导致两个网络之间的同步性更高。相关研究还对时序网络、耦合星形网络与耦合无标度网络等不同类型的网络上的同步行为做了分析^[108]。

从多层网络同步行为的机制上分析, 文献 [109] 研究了节点在网络之间的连接方式如何影响网络的同步和稳定性。结果表明, 通过非随机方式连接节点可最大限度地提高网络同步性。文献 [110] 研究了不同动力学交织在一起的多层网络的同步行为。文献 [111] 则提出了一种多层网络同步和扩散之间动态依赖关系的研究框架。文献 [112] 提出了一个通用框架, 用于评估具有多层网络中同步状态的稳

定性,从而得出了推广主稳定性函数方法的必要条件。

爆炸性同步是近年来比较热门的研究领域,其特征为序参量通过相变点后出现突然的跃变,并随着耦合强度的变化,相变点前后的过程不可逆。多层网络的爆炸性同步研究的突破点在于放宽了早期研究爆炸性同步的第二个基本假设:节点度与频率成正比。文献[113]通过耦合网络表明在一定条件下,系统可以呈现爆炸性同步,且节点度与频率不需要强关联条件。进一步,文献[114]在双层网络上验证了在自适应条件下,系统爆炸性现象的出现不依赖于第二个条件。值得说明的是,多层网络中具有自适应演化特征的振子所占的比例会影响系统的同步行为,尤其是在该比例小于1时,系统会同时存在爆炸性同步和经典同步^[115]。

4.3.2 多层网络上的投票模型

复杂系统中的集群行为是复杂系统涌现性的重要表现,它通过微观个体之间的相互作用,并在宏观上表现出一定的时空或者功能的有序结构。许多物理学家和社会学家试图通过物理模型揭示社会经济系统中的集群行为,包括投票模型。文献[116]最早通过该模型模拟了社会舆论如何从无序的混乱状态演化到整体认识的过程。在多层网络框架中研究多数投票模型对了解多元化对意见动态的影响是至关重要的,这种动态过程可以采用蒙特卡洛模拟、非均匀平均场近似和主方程等方法进行定量化研究^[117-119]。

从多层网络的角度研究投票者模型的类型,发现网络中可能存在两种状态的共存阶段,其中个体倾向于通过层间连边在不同的层中保持相同的观点^[120-121]。文献[119]讨论了3种类型的选民如何达成共识,以及在这些不同类型的选民达成共识背后起作用的微观基础。文献[117]研究了由两个无标度网络组成的多路复用网络的多数表决模型,结果表明铁磁相变的临界指数取决于层中的度分布。

在共同演化的投票者模型中,节点的状态和网络拓扑结构彼此协同发展,并呈现碎片化过渡^[122]。在实际系统中,个体的行为通常与环境变化相耦合,文献[118]研究了多数投票过程与反应扩散过程耦合网络的非均衡模型,结果表明噪声层中的噪声参数与投票行为有关。

5 结束语

本文基于多层网络的基础理论和最新研究进

展,从多层网络模型构建、基本统计特征、节点重要性、社团结构、鲁棒性以及动力学行为等方面总结了多层网络的研究脉络,尤其是从网络结构与动力学机制等视角系统地归纳了多层网络结构与功能的相关研究,为相关领域研究提供了便利。虽然多层网络的研究取得了一系列重要的进展,但是还存在许多科学问题值得进一步挖掘。

首先,多层网络拓扑结构的研究还可以做很多工作。一方面,近年来复杂网络潜在的几何性质备受关注^[123-126]。探究多层网络的几何性质与拓扑结构之间的内在联系会有助于推动相关研究的进展,如社团结构、链路预测等。另一方面,多层网络的基本统计指标与社团结构探测等方向的研究需要建立起合理的数学形式。在网络拓扑结构研究的过程中应该充分考虑层间耦合交互的非线性关系,这对深入理解多层网络结构与功能的关系尤为重要。

其次,探索多层网络结构与其功能的内在机制依旧面临巨大挑战。一方面,在动态的信息传递和多种耦合动力学的背景下,个体的风险认知具有不确定性。这种不确定性对探索动态的疾病预防措施以及动态的方式控制病毒攻击策略尤为重要。另一方面,探索多层网络的弹性也是一个比较有趣的话题。复杂网络的弹性指的是网络在应对外部攻击或者其他因素变化时,维护其功能的能力^[127]。多层网络由于层相互作用的异质性可能会产生出乎预料的结果,这也是具有挑战性的问题。

最后,机器学习在复杂网络领域的应用有广阔的前景。随着信息与大数据技术发展,数据规模暴增,尤其是实证网络和带有标签与时间序列的数据,这也为多层网络的研究提供了一个新的思路。如现有的动力学过程往往基于既定的传播机制^[9]。一个开放性的问题是如何刻画多层网络上的真实动力学?大数据时代不仅为网络科学的研究提供了丰富的经验数据,还提供了数据的时间序列、节点的标签等信息。如何利用机器学习或者深度学习等方法,从这些数据中挖掘多层网络潜在的真实动力学过程有着重要意义。

本文研究工作得到北京师范大学博一学科交叉基金项目(BNUXKJC1921)的资助,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440.

- [2] BARABÁSI A-L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.
- [3] BOCCALETTI S, BIANCONI G, CRIADO R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks[J]. *Phys Rep*, 2014, 544(1): 1-122.
- [4] ZENG An, SHEN Zhe-si, ZHOU Jian-lin, et al. The science of science: From the perspective of complex systems[J]. *Phys Rep*, 2017, 714: 1-73.
- [5] 吴宗柠, 樊瑛. 复杂网络视角下国际贸易研究综述[J]. 电子科技大学学报, 2018, 47(3): 469-480.
WU Zong-ning, FAN Ying. Review of international trade: The complex network approach[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2018, 47(3): 469-480.
- [6] LYNN C W, BASSETT D S. The physics of brain network structure, function and control[J]. *Nat Rev Phys*, 2019, 1(5): 318.
- [7] KIVEL M, ARENAS A, BARTHELEMY M, et al. Multilayer networks[J]. *Journal of Complex Networks*, 2014, 2(3): 203-271.
- [8] BATTISTON F, NICOSIA V, LATORA V. Structural measures for multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89(3): 032804.
- [9] WANG Wei, LIU Quan-hui, LIANG Jun-hao, et al. Coevolution spreading in complex networks[J]. *Phys Rep*, 2019, 820: 1-51.
- [10] HOLME P, SARAM KI J. Temporal networks[J]. *Phys Rep*, 2012, 519(3): 97-125.
- [11] LI A, CORNELIUS S P, LIU Yang-yu, et al. The fundamental advantages of temporal networks[J]. *Science*, 2017, 358(6366): 1042-1046.
- [12] 李国颖, 成柏松, 张鹏, 等. 相互依存网络鲁棒性研究综述[J]. 电子科技大学学报, 2013, 42(1): 23-28.
LI Guo-ying, CHENG Bo-song, ZHANG Peng, et al. Review of the interdependent networks[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2013, 42(1): 23-28.
- [13] 董政呈, 方彦军, 田猛. 相互依存网络抗毁性研究综述[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2019, 14(3): 30-44.
DONG Zheng-chen, FANG Yan-jun, TIAN Meng. Review on invulnerability of interdependent networks[J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2019, 14(3): 30-44.
- [14] BATTISTON F, NICOSIA V, LATORA V. The new challenges of multiplex networks: Measures and models[J]. *Eur Phys J - Spec Top*, 2017, 226(3): 401-416.
- [15] DOMENICO M N, RIBALTA A S, COZZO E, et al. Mathematical formulation of multilayer networks[J]. *Phys Rev X*, 2013, 3(4): 041022.
- [16] COZZO E, DE ARRUDA G F, RODRIGUES F A, et al. *Multiplex networks*[M]. Cham: Springer. 2018: 87-112.
- [17] DE DOMENICO M, NICOSIA V, ARENAS A, et al. Structural reducibility of multilayer networks[J]. *Nat Commun*, 2015, 6: 6864.
- [18] SIMPSON E H. Measurement of diversity[J]. *Nature*, 1949, 163(4148): 688.
- [19] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. *Bell Syst Tech J*, 1948, 27(3): 379-423.
- [20] COZZO E, KIVELA M, DE DOMENICO M, et al. Structure of triadic relations in multiplex networks[J]. *New J Phy*, 2015, 17(7): 073029.
- [21] HALU A, MONDRAG N R J, PANZARASA P, et al. Multiplex pagerank[J]. *PloS One*, 2013, 8(10): e78293.
- [22] PEDROCHE F, ROMANCE M, CRIADO R. A biplex approach to PageRank centrality: From classic to multiplex networks[J]. *Chaos*, 2016, 26(6): 065301.
- [23] IACOVACCI J, RAHMEDE C, ARENAS A, et al. Functional multiplex pagerank[J]. *EPL*, 2016, 116(2): 28004.
- [24] PEDROCHE F, GARC A E, ROMANCE M, et al. Sharp estimates for the personalized multiplex pageRank[J]. *J Comput Appl Math*, 2018, 330: 1030-1040.
- [25] WU Min-cheng, HE Shi-bo, ZHANG Yong-tao, et al. A tensor-based framework for studying eigenvector multicentrality in multilayer networks[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2019, 116(31): 15407-15413.
- [26] WANG Ding-jie, WANG Hai-tao, ZOU Xiu-fen. Identifying key nodes in multilayer networks based on tensor decomposition[J]. *Chaos*, 2017, 27(6): 063108.
- [27] TUDISCO F, ARRIGO F, GAUTIER A. Node and layer eigenvector centralities for multiplex networks[J]. *SIAM J Appl Math*, 2018, 78(2): 853-876.
- [28] CHEN Xiao, LU Zhe-ming. Measure of layer centrality in multilayer network[J]. *Int J Mod Phys C*, 2018, 29(6): 1850051.
- [29] LÜ Lai-shui, ZHANG Kun, ZHANG Ting, et al. Nodes and layers PageRank centrality for multilayer networks[J]. *Chin Phys B*, 2019, 28(2): 020501.
- [30] RAHMEDE C, IACOVACCI J, ARENAS A, et al. Centralities of nodes and influences of layers in large multiplex networks[J]. *Journal of Complex Networks*, 2018, 6(5): 733-752.
- [31] MUCHA P J, RICHARDSON T, MACON K, et al. Community structure in time-dependent, multiscale, and multiplex networks[J]. *Science*, 2010, 328(5980): 876-878.
- [32] ZHANG Han, WANG Chang-dong, LAI Jian-huang, et al. Community detection using multilayer edge mixture model[J]. *Knowl Inf Syst*, 2019, 60(2): 757-779.
- [33] JEUB L G, MAHONEY M W, MUCHA P J, et al. A local perspective on community structure in multilayer networks[J]. *Network Science*, 2017, 5(2): 144-163.
- [34] TANG Lei, WANG Xu-fei, LIU Huan. Community detection via heterogeneous interaction analysis[J]. *Data Min Knowl Discov*, 2012, 25(1): 1-33.
- [35] GHASEMIAN A, ZHANG P, CLAUSET A, et al. Detectability thresholds and optimal algorithms for community structure in dynamic networks[J]. *Phys Rev X*, 2016, 6(3): 031005.
- [36] LANCICHINETTI A, FORTUNATO S. Consensus clustering in complex networks[J]. *Sci Rep*, 2012, 2(1): 336.
- [37] PAUL S, CHEN Y. Spectral and matrix factorization methods for consistent community detection in multi-layer networks[J]. *The Annals of Statistics*, 2020, 48(1): 230-

- 250.
- [38] LOV S Z L. Random walks on graphs: A survey[J]. *Combinatorics*, 1993, 2(1): 1-46.
- [39] KUNCHEVA Z, MONTANA G. Community detection in multiplex networks using locally adaptive random walks[C]//*Advances in Social Networks Analysis and Mining*. [S.l.]: IEEE, 2015: 1308-1315.
- [40] DE DOMENICO M, LANCICHINETTI A, ARENAS A, et al. Identifying modular flows on multilayer networks reveals highly overlapping organization in interconnected systems[J]. *Phys Rev X*, 2015, 5(1): 011027.
- [41] AFSARMANESH N, MAGNANI M. Finding overlapping communities in multiplex networks[EB/OL]. (2016-02-11). <http://arxiv.org/abs/1602.03746>.
- [42] MONDRAGON R J, IACOVACCI J, BIANCONI G. Multilink communities of multiplex networks[J]. *PLoS One*, 2018, 13(3): e0193821.
- [43] LIU Wei-yi, SUZUMURA T, JI Hong-yu, et al. Finding overlapping communities in multilayer networks[J]. *PLoS One*, 2018, 13(4): e0188747.
- [44] PARSHANI R, BULDYREV S V, HAVLIN S. Interdependent networks: Reducing the coupling strength leads to a change from a first to second order percolation transition[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105(4): 048701.
- [45] RADICCHI F, BIANCONI G. Redundant interdependencies boost the robustness of multiplex networks[J]. *Phys Rev X*, 2017, 7(1): 011013.
- [46] SHEKHTMAN L M, HAVLIN S. Percolation of hierarchical networks and networks of networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98(5): 052305.
- [47] TURALSKA M, BURGHARDT K, ROHDEN M, et al. Cascading failures in scale-free interdependent networks[J]. *Phys Rev E*, 2019, 99(3): 032308.
- [48] MIN B, DO Y S, LEE K M, et al. Network robustness of multiplex networks with interlayer degree correlations[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89(4): 042811.
- [49] LIU Xue-ming, STANLEY H E, GAO Jian-xi. Breakdown of interdependent directed networks[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2016, 113(5): 1138-1143.
- [50] KLEINEBERG K-K, BUZNA L, PAPAPOPOULOS F, et al. Geometric correlations mitigate the extreme vulnerability of multiplex networks against targeted attacks[J]. *Phys Rev X*, 2017, 118(21): 218301.
- [51] ROTH K, MORONE F, MIN B, et al. Emergence of robustness in networks of networks[J]. *Phys Rev E*, 2017, 95(6): 062308.
- [52] SUN Jia-chen, ZHANG Rui, FENG Ling, et al. Extreme risk induced by communities in interdependent networks[J]. *Commun Phys*, 2019, 2(1): 45.
- [53] SHEKHTMAN L M, SHAI S, HAVLIN S. Resilience of networks formed of interdependent modular networks[J]. *New J Phys*, 2015, 17(12): 123007.
- [54] AZIMI-TAFRESHI N, DOROGOVTSEV S N, MENDES J. Organization of directed multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2014(90): 052809.
- [55] NIU Duan-biao, YUAN Xin, DU Min-hui, et al. Percolation of networks with directed dependency links[J]. *Phys Rev E*, 2016, 93(4): 042312.
- [56] LIU Xue-ming, PAN Lin-qiang, STANLEY H E, et al. Multiple phase transitions in networks of directed networks[J]. *Phys Rev E*, 2019, 99(1): 012312.
- [57] BULDYREV S V, PARSHANI R, PAUL G, et al. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks[J]. *Nature*, 2010, 464(7291): 1025-1028.
- [58] GAO Jian-xi, BULDYREV S V, STANLEY H E, et al. Percolation of a general network of networks[J]. *Phys Rev E*, 2013, 88(6): 062816.
- [59] WANG Wei-ping, YANG Sai-ni, STANLEY H E, et al. Local floods induce large-scale abrupt failures of road networks[J]. *Nat Commun*, 2019, 10(1): 2114.
- [60] LI Ming, LU Lin-yuan, DENG You-jin, et al. History-dependent percolation on multiplex networks[J]. *Natl Sci Rev*, 2020, 7(8): 1296-1305.
- [61] OSAT S, FAQEEH A, RADICCHI F. Optimal percolation on multiplex networks[J]. *Nat Commun*, 2017, 8(1): 1540.
- [62] SINGH R K, SINHA S. Optimal interdependence enhances the dynamical robustness of complex systems[J]. *Phys Rev E*, 2017, 96(2): 020301.
- [63] WANG Ze-xun, ZHOU Dong, HU Yan-qing. Group percolation in interdependent networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 97(3): 032306.
- [64] KRYVEN I. Bond percolation in coloured and multiplex networks[J]. *Nat Commun*, 2019, 10(1): 404.
- [65] KRYVEN I, BIANCONI G. Enhancing the robustness of a multiplex network leads to multiple discontinuous percolation transitions[J]. *Phys Rev E*, 2019, 100(2): 020301.
- [66] YUAN Xin, HU Yan-qing, STANLEY H E, et al. Eradicating catastrophic collapse in interdependent networks via reinforced nodes[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2017, 114(13): 3311-3315.
- [67] DUAN Dong-li, LÜ Chang-chun, SI Shu-bin, et al. Universal behavior of cascading failures in interdependent networks[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2019, 116(45): 22452-22457.
- [68] DE ARRUDA G F, RODRIGUES F A, MORENO Y. Fundamentals of spreading processes in single and multilayer complex networks[J]. *Phys Rep*, 2018, 756: 1-59.
- [69] DE DOMENICO M, GRANELL C, PORTER M A, et al. The physics of spreading processes in multilayer networks[J]. *Nature Phys*, 2016, 12(10): 901.
- [70] GOMEZ S, DIAZ-GUILERA A, GOMEZ-GARDENES J, et al. Diffusion dynamics on multiplex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 110(2): 028701.
- [71] DE DOMENICO M, SOL-RIBALTA A, MEZ-GARDE G E J, et al. Navigability of interconnected networks under random failures[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2014, 111(23): 8351-8356.
- [72] RADICCHI F. Driving interconnected networks to supercriticality[J]. *Phys Rev X*, 2014, 4(2): 021014.
- [73] AN Ning-bo, CHEN Han-shuang, MA Chuang, et al. Spontaneous symmetry breaking and discontinuous phase transition for spreading dynamics in multiplex

- networks[J]. *New J Phys*, 2018, 20(12): 125006.
- [74] 刘权辉, 王伟, 唐明. 多层耦合网络传播综述[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2016, 13(1): 48-57.
LIU Quan-hui, WANG Wei, TANG Ming. The review of spreading dynamics on multilayer coupled networks[J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2016, 13(1): 48-57.
- [75] SANZ J, XIA Cheng-yi, MELONI S, et al. Dynamics of interacting diseases[J]. *Phys Rev X*, 2014, 4(4): 041005.
- [76] GRANELL C, MEZ-GARDE G E J, ARENAS A. Dynamical interplay between awareness and epidemic spreading in multiplex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 111(12): 128701.
- [77] WEI Xiang, CHEN Shi-hua, WU Xiao-qun, et al. A unified framework of interplay between two spreading processes in multiplex networks[J]. *EPL*, 2016, 114(2): 26006.
- [78] SERRANO A B, MEZ-GARDE G E J, ANDRADE R F. Optimizing diffusion in multiplexes by maximizing layer dissimilarity[J]. *Phys Rev E*, 2017, 95(5): 052312.
- [79] LIU Quan-hui, XIONG Xin-yue, ZHANG Qian, et al. Epidemic spreading on time-varying multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98(6): 062303.
- [80] CENCETTI G, BATTISTON F. Diffusive behavior of multiplex networks[J]. *New J Phys*, 2019, 21(3): 035006.
- [81] TEJEDOR A, LONGJAS A, FOUFOULA-GEORGIOU E, et al. Diffusion dynamics and optimal coupling in multiplex networks with directed layers[J]. *Phys Rev X*, 2018, 8(3): 031071.
- [82] SOLE-RIBALTA A, DE DOMENICO M, KOUVARIS N E, et al. Spectral properties of the Laplacian of multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2013, 88(3): 032807.
- [83] YANG Yong, TU Li-lan, GUO Tian-jiao, et al. Spectral properties of Supra-Laplacian for partially interdependent networks[J]. *Appl Math Compu*, 2020, 365: 124740.
- [84] 靳帧, 孙桂全, 刘茂省. 网络传染病动力学建模与分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
JIN Zhen, SUN Gui-quan, LIU Mao-sheng. Dynamic modeling and analysis of network infectious diseases[M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [85] KARRER B, NEWMAN M E. Competing epidemics on complex networks[J]. *Phys Rev E*, 2011, 84(3): 036106.
- [86] FUNK S, JANSEN V A. Interacting epidemics on overlay networks[J]. *Phys Rev E*, 2010, 81(3): 036118.
- [87] SAHNEH F D, SCOGLIO C. Competitive epidemic spreading over arbitrary multilayer networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89(6): 062817.
- [88] ZHOU Shen-yu, XU Shuang-die, WANG Lin, et al. Propagation of interacting diseases on multilayer networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98(1): 012303.
- [89] GU Chang-gui, ZOU Sheng-rong, XU Xiu-lian, et al. Onset of cooperation between layered networks[J]. *Phys Rev E*, 2011, 84(2): 026101.
- [90] MORRIS R G, BARTHELEMY M. Transport on coupled spatial networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, 109(12): 128703.
- [91] TAN Fei, WU Jia-jing, XIA Yong-xiang, et al. Traffic congestion in interconnected complex networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89(6): 062813.
- [92] DING Rui, YIN Jian, DAI Peng, et al. Optimal topology of multilayer urban traffic networks[J]. *Complexity*, 2019(9): 4230981.
- [93] SOL-RIBALTA A, MEZ S G, ARENAS A. Congestion induced by the structure of multiplex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2016, 116(10): 108701.
- [94] GAO Lei, SHU Pan-pan, TANG Ming, et al. Effective traffic-flow assignment strategy on multilayer networks[J]. *Phys Rev E*, 2019, 100(1): 012310.
- [95] ZHANG Yong-qiang, LI Ya-ming, LI Min, et al. Method to enhance traffic capacity for multilayer networks[J]. *Int J Mod Phys C*, 2020, 34(13): 2050140.
- [96] WANG Zhen, WANG Lin, SZOLNOKI A, et al. Evolutionary games on multilayer networks: A colloquium[J]. *Euro Phys J B*, 2015, 88(5): 1-15.
- [97] WANG Zhen, SZOLNOKI A, PERC M. Evolution of public cooperation on interdependent networks: The impact of biased utility functions[J]. *EPL*, 2012, 97(4): 48001.
- [98] WANG Zhen, SZOLNOKI A, PERC M. Optimal interdependence between networks for the evolution of cooperation[J]. *Sci Rep*, 2013, 3: 2470.
- [99] WANG Zhen, SZOLNOKI A, PERC M. Rewarding evolutionary fitness with links between populations promotes cooperation[J]. *J Theor Biol*, 2014, 349: 50-56.
- [100] SZOLNOKI A, PERC M. Information sharing promotes prosocial behaviour[J]. *New J Phys*, 2013, 15(5): 053010.
- [101] BATTISTON F, PERC M, LATORA V. Determinants of public cooperation in multiplex networks[J]. *New J Phys*, 2017, 19(7): 073017.
- [102] KLEINEBERG K-K, HELBING D. Topological enslavement in evolutionary games on correlated multiplex networks[J]. *New J Phys*, 2018, 20(5): 053030.
- [103] LIU Si-cheng, ZHANG Lin, WANG Bao-kui. Evolution of cooperation with individual diversity on interdependent weighted networks[J]. *New J Phys*, 2020, 22(1): 013034.
- [104] IRANZO J, BULD J M, AGUIRRE J. Competition among networks highlights the power of the weak[J]. *Nat Commun*, 2016, 7(1): 1-7.
- [105] DUH M, GOSAK M, SLAVINEC M, et al. Assortativity provides a narrow margin for enhanced cooperation on multilayer networks[J]. *New J Phys*, 2019, 21(12): 123016.
- [106] GUAN Shu-guang. Explosive synchronization in complex networks[J]. *Scientia Sinica*, 2019, 50(1): 010504.
- [107] HUANG Liang, PARK K, LAI Ying-cheng, et al. Abnormal synchronization in complex clustered networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, 97(16): 164101.
- [108] 徐明明, 陆君安, 周进. 两层星形网络的特征值谱及同步能力[J]. *物理学报*, 2016, 65(2): 28902.
XU Ming-ming, LU Jun-an, ZHOU Jin. Synchronizability and eigenvalues of two-layer star networks[J]. *Acta Phys Sin*, 2016, 65(2): 28902.

- [109] AGUIRRE J, SEVILLA-ESCOBOZA R, GUTIERREZ R, et al. Synchronization of interconnected networks: the role of connector nodes[J]. *Phys Rev Lett*, 2014, 112(24): 248701.
- [110] NICOSIA V, SKARDAL P S, ARENAS A, et al. Collective phenomena emerging from the interactions between dynamical processes in multiplex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2017, 118(13): 138302.
- [111] DANZIGER M M, BONAMASSA I, BOCCALETTI S, et al. Dynamic interdependence and competition in multilayer networks[J]. *Nature Phys*, 2019, 15(2): 178.
- [112] DEL GENIO C I, MEZ-GARDE G E J, BONAMASSA I, et al. Synchronization in networks with multiple interaction layers[J]. *Sci Adv*, 2016, 2(11): e1601679.
- [113] SU Gui-feng, RUAN Zhong-yuan, GUAN Shu-guang, et al. Explosive synchronization on co-evolving networks[J]. *EPL*, 2013, 103(4): 48004.
- [114] ZHANG Xi-yun, BOCCALETTI S, GUAN Shu-guang, et al. Explosive synchronization in adaptive and multilayer networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2015, 114(3): 038701.
- [115] DANZIGER M M, MOSKALENKO O I, KURKIN S A, et al. Explosive synchronization coexists with classical synchronization in the Kuramoto model[J]. *Chaos*, 2016, 26(6): 065307.
- [116] SZNAJD-WERON K, SZNAJD J. Opinion evolution in closed community[J]. *Int J Mod Phys C*, 2000, 11(6): 1157-1165.
- [117] KRAWIECKI A, GRADOWSKI T, SIUDEM G. Majority vote model on multiplex networks[J]. *Acta Phys Pol A*, 2018, 133: 1433-1440.
- [118] LIU Jing, FAN Ying, ZHANG Jiang, et al. Coevolution of agent's behavior and noise parameters in majority vote game on multilayer networks[J]. *New J Phys*, 2019, 21(1): 015007.
- [119] CHOI J, GOH K-I. Majority-vote dynamics on multiplex networks with two layers[J]. *New J Phys*, 2019, 21(3): 035005.
- [120] CHMIEL A, SZNAJD-WERON K. Phase transitions in the q-voter model with noise on a duplex clique[J]. *Phys Rev E*, 2015, 92(5): 052812.
- [121] AMATO R, KOUVARIS N E, SAN M M, et al. Opinion competition dynamics on multiplex networks[J]. *New J Phys*, 2017, 19(12): 123019.
- [122] DIAKONOVA M, SAN M M, EGU L V M. Absorbing and shattered fragmentation transitions in multilayer coevolution[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89(6): 062818.
- [123] KRIOUKOV D, PAPADOPOULOS F, KITSAK M, et al. Hyperbolic geometry of complex networks[J]. *Phys Rev E*, 2010, 82(3-2): 036106.
- [124] ALLARD A, SERRANO M Á, GARC P G, et al. The geometric nature of weights in real complex networks[J]. *Nat Commun*, 2017, 8: 14103.
- [125] WU Zong-ning, DI Zeng-ru, FAN Ying. An asymmetric popularity-similarity optimization method for embedding directed networks into hyperbolic space[J]. *Complexity*, 2020(5): 1-16.
- [126] KLEINEBERG K K, BOGUNÁ M, SERRANO M Á, et al. Hidden geometric correlations in real multiplex networks[J]. *Nature Phys*, 2016, 12(11): 1076-1081.
- [127] LIU Xue-ming, LI Da-qing, MA Man-qing, et al. Network resilience[EB/OL]. (2020-07-26). <http://arxiv.org/abs/2007.14464>.

编辑 蒋晓