

• 成电青年学者·信息与通信工程专栏 •



# 针对特定 LDPC 码的多子译码器并行组合译码方法

张 哲, 周 亮\*, 周志恒

(电子科技大学通信抗干扰国家级重点实验室 成都 610054)

**【摘要】**对于分组纠错码的译码, 由多个子译码器构建的并行译码系统比单译码器系统有较大的性能提升, 但是可实现并行译码处理的子译码器的构造却是一个挑战性难题。为此, 该文提出一种针对特定 LDPC 码的适于 BP 译码算法运用的多子译码器并行组合译码方法。该方法针对基于本原多项式构造的一类 LDPC 码的译码尤其有效, 其特点是: 各个子译码器所依赖的校验矩阵由基础校验矩阵的恰当循环移位获得, 而循环移位量的恰当选择则依赖于  $m$  序列 (唯一对应于本原多项式) 的采样特性; 各个子 BP 处理过程的迭代次数设置为其校验矩阵最短环长的一半, 由此可消除短环对 BP 译码性能的影响; 各子 BP 处理模块输出的信息比特外信息再经过基础译码模块处理后与并行配置的基础译码输出, 一并进行最大似然判决处理并获得译码输出。该方法的仿真结果显示, 在误码率为  $10^{-5}$  且多子译码器并行组合译码方法在设置 5 个子译码模块时, 其译码性能比原单译码器译码方法高约 0.4 dB。

**关键词** BP 算法; 译码算法; LDPC 码; 多子译码器; 并行结构  
中图分类号 TN911 文献标志码 A doi:10.12178/1001-0548.2020442

## Parallel Decoding Method with Multiple Sub-Decoders for Specific LDPC Code

ZHANG Zhe, ZHOU Liang\*, and ZHOU Zhi-heng

(National Key Laboratory of Science and Technology on Communication, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 610054)

**Abstract** The parallel decoding system with multiple sub-decoders has much performance improvement than that of single-decoder system for decoding the block codes. However, the construction of sub-decoders for the parallel decoding implementation is still the challenging problem. To solve this problem, this paper proposes a parallel decoding method with multiple sub-decoders based on BP (belief propagation) algorithm for some specific low-density parity-check (LDPC) codes. This method is particularly effective for decoding the LDPC code generated via primitive polynomial. The method has characteristics as the parity-check matrix used for each sub-decoder depends on a proper cyclic shift of the original parity-check matrix, and the number of cyclic shift depends on the sampling property of the  $m$  sequence (which uniquely corresponds to a primitive polynomial). The iteration times of each BP processes in the sub-decoder are set as half of the girth of Tanner graph of the parity-check matrix, thus the affection of short cycles on BP performance would be eliminated. The output extrinsic information for each bit generated by the sub-decoder is processed further by a decoding module to output the candidate codeword, and then the LMS module picks out the maximum likelihood candidate codeword as the output of the decoding system. The simulation results show that the performance of the proposed parallel decoding method with 5 sub-decoders is about 0.4 dB superior to that of the original single-decoder decoding method at the bit error rate of  $10^{-5}$ .

**Key words** belief propagation algorithm; decoding algorithm; LDPC code; multiple sub-decoders; parallel structure

对于分组纠错码的译码, 通过多个子译码器构建的并行译码系统比单译码器系统有明显的性能提升<sup>[1]</sup>。因此, 较早即有多子译码器结构概念的 Chase

算法<sup>[2]</sup> 和其变型的混合译码系统<sup>[3-4]</sup>。Chase 算法作为广义最小距离译码算法<sup>[5]</sup> 的推广, 它通过对软判决接收序列的不同似然门限选取和处理而获得多个

收稿日期: 2020-12-22; 修回日期: 2021-01-05

基金项目: 国家重点研发计划 (SQ2018YFB180027-04); 国家自然科学基金 (61801095)

作者简介: 张哲 (1991-), 男, 博士生, 主要从事通信编码方面的研究。

通信作者: 周亮, E-mail: lzhou@uestc.edu.cn

待译码的“硬判决接收”序列，因此多个可并行实现的子译码器输出的候选码字为最后的最大后验概率原则提供了最佳码字的输出可能。在并行译码系统中，针对具体分组码的代数结构特性，设计和构造多个具有对同一信息数据进行不完全相同的校验译码的独立子译码器是一个挑战性难题。

文献 [6] 提出了一类称为 MBBP (multiple-based belief propagation) 的方法，可以选取一个校验矩阵 (即基础矩阵) 扩展出多个不同的其他校验矩阵 (即扩展校验矩阵)，再由这些扩展矩阵各自独立构成了一个子译码器。文献 [7] 提出的 mRRD(modified random redundant decoding) 算法结合了 MBBP 思想和 RRD(random redundant decoding) 算法 [3] 来设计子译码器。其中，RRD 算法随机选取码的自同构群中的置换元素作用于基础矩阵来构造扩展校验矩阵用以译码，直到译码成功或达到次数上限时输出一个特定码字。

LDPC 码是分组码的一个重要子类 [8-9]，其校验矩阵的构造途径多种多样，提供了实现多子译码器系统的较大可能。文献 [10] 在 MBBP 的基础上，针对 PEG(progressive edge-growth) 算法 [11] 构造的 LDPC 码提出了一种合并短环来获取扩展校验矩阵的方法。文献 [12] 提出一种由循环码构造的 LDPC 码，利用 mRRD 算法取得了并行译码的较大性能提升。这些 MBBP 算法运用中的 BP 译码模块所使用的扩展校验矩阵均需要具有良好的环结构，但是文献 [6, 10] 并没有给出相应的矩阵扩展方法。虽然 mRRD 算法使用自同构群从一个具有良好环结构的校验矩阵扩展出具有相同环结构的矩阵。但是对于一般的 LDPC 码而言却很难找到其自同构群 [10, 12]。

本文提出的多子译码器并行组合译码方法，与 MBBP 算法不同之处在于新设计了包含两种子译码器的组合结构。第一种子译码器是扩展译码模块与基础译码模块级联，前者通过 BP 算法输出辅助译码的外信息，后者确定候选码字。其中扩展译码模块的 BP 算法迭代次数设置为其对应扩展校验矩阵中最短环长的一半，以此避免 BP 算法受短环的影响。第二种子译码器则仅包含基础译码模块。这两类子译码器的输出的候选码字通过同一个 LMS(east metric selector) 依据最大后验概率原则筛选出最终译码码字。

本文提出的并行组合译码方法对由本原多项式生成的 LDPC 码 [13] 尤为有效。这类 LDPC 码编码

开销极低，其码字是连接多项式是本原式的线性移位寄存器生成的序列片段。由此，本原式作为序列的零化约束关系可以转换为序列 (即码字) 奇偶校验关系。本原式对应特征向量的循环位移即为生成该码的基础校验矩阵。具体地，为了构建用于并行组合译码的子译码器的扩展译码矩阵，首先找出约束此 LDPC 码的  $m$  序列，再使用多个特定采样间隔进行采样获得采样序列；然后由采样序列获得约束它们的新本原多项式，并把这些新本原式对采样序列的约束转化为对码字序列的约束；最后，将这些新本原式的对应向量循环位移生成扩展校验矩阵。

本文使用本原式  $f(x) = x^{89} + x^{38} + 1$  构造了码长 3000 的  $m$  序列编码，并进行了误码率仿真实验。实验中构造了 6 个由约束采样序列的本原式生成的扩展校验矩阵。此外，通过实验观察发现当子译码器个数为 5 时，误码率曲线即有良好的收敛特性。误码率仿真结果显示，本文提出的并行组合译码方法比文献 [13] 中的单译码器译码算法有约 0.4 dB 的提升。

## 1 MBBP 算法以及 mRRD 算法

### 1.1 MBBP 算法

MBBP 算法是一个多个子译码器构建的并行译码系统 [6]，它的子译码器是由使用不同校验矩阵的 BP 译码模块构成。图 1 是 MBBP 算法的结构，其中子译码器  $D_0$  中的基础译码模块使用基础校验矩阵  $H_0$  对输入进行 BP 译码，子译码器  $D_i (i = 1, 2, \dots, N)$  中扩展译码模块则使用了扩展校验矩阵  $H_i$  进行 BP 译码。

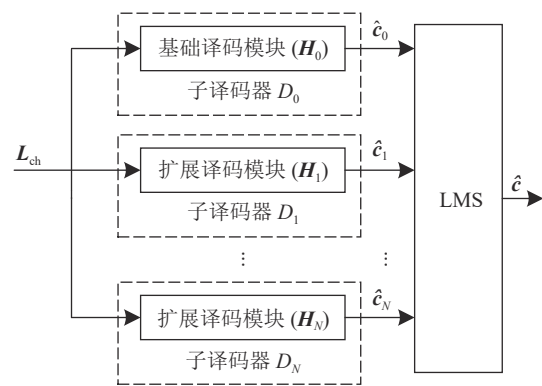


图 1 MBBP 算法结构

MBBP 算法对信道接收序列  $y$  的向量 LLR 值  $L_{ch}$  同时做  $N+1$  个子译码处理，并获得候选的双极性表示码字  $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_N$ ，即码元取值为“+1”或“-1”；最终输出的码字  $\hat{c}$  由 LMS 模块获得，即对平稳信道：

$$\hat{c} = \arg \max_{i \in \{0,1,\dots,N\}} \Pr\{y|c = \hat{c}_i\} = \arg \min_{i \in \{0,1,\dots,N\}} d(y, \hat{c}_i) \quad (1)$$

式中,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  是向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的欧几里得距离。

MBBP 算法的性能取决于子译码器输出候选码字的误字率及其等价的误码率, 进一步地, 依赖于各个子校验矩阵的环结构。

## 1.2 mRRD 算法

mRRD 算法与 MBBP 类似, 由  $N+1$  个完全相同的子译码器  $D_0, D_1, \dots, D_N$  并行构成, 但每个子译码器的内部构造与 MBBP 算法不同。mRRD 算法的子译码器结构如图 2 所示。

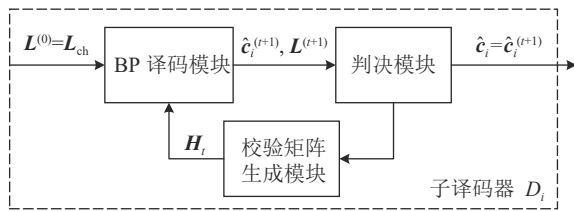


图 2 子译码器  $D_i$  的结构

mRRD 算法第  $i$  个子译码器  $D_i$  的译码流程是:

1) 初始化: 令  $\theta$  为置换; 令  $t=0$ ; 记 BP 译码输入为  $L^{(0)} = L_{ch}$ ; 最大迭代次数为  $t_0$ 。

2) 第  $t$  次译码时: 以  $H_t$  对  $L^{(t)}$  进行 BP 译码, 并输出软信息  $L^{(t+1)}$  和硬判决码字  $\hat{c}_i^{(t+1)}$ 。

3) 若  $H_0(\hat{c}_i^{(t+1)})^T = 0$  或  $t+1 = t_0$ , 则输出候选码字  $\hat{c}_i = \hat{c}_i^{(t+1)}$  并结束算法。

4) 随机选取置换  $\gamma \in \text{Per}(C)$ , 令  $\theta = \theta\gamma$ ; 将  $\theta$  作用于基础矩阵  $H_0$  得到校验矩阵并记为  $H_{t+1} = g(\theta, H_0)$ ; 令  $t = t+1$ , 回到步骤 2)。

由于自同构群中的置换作用于基础矩阵后得到的扩展矩阵具有和基础矩阵一样的环结构, 因此可以保证每个子译码器的误码率没有结构性恶化。显然, mRRD 算法构建的关键是找到码的自同构群。

## 2 多子译码器并行组合译码方法

对于构造 LDPC 码的扩展校验矩阵的许多方法而言, 不经意的方法会导致矩阵中的短环更短也更多, 将其用于子译码器中的 BP 处理时, 难以有效改善译码性能。为获得适于多子译码器的扩展矩阵序列, 本节首先分析短环导致译码性能恶化的机理和消除短环影响的途径, 然后再给出一种可改善译码性能的扩展译码模块级联基础译码模块的子译码器结构。

### 2.1 BP 算法中短环的影响分析

BP 算法是在校验矩阵的等效 Tanner 图上, 计算变量节点的似然值并计算校验节点的信道外信息产出值, 并在两类节点之间交换信息后再进行迭代计算的过程。若 Tanner 图中存在由某个变量节点至校验节点再至其他变量节点并最终回返至原变量节点自身的较短连接回路 (即短环), 则环中各节点的信息难以在足够多的节点中遍历足够的交互与平滑处理, 从而导致变量节点的似然值估计存在较大误差。因此, 短环较多的校验矩阵通常无法获得良好的译码性能。

图 3 展示了 Tanner 图中短环的信息流动情况, 其中图 3a 与 3b 分别是 4 环和 6 环的情况。实线代表第一次迭代时候的信息传递, 段状虚线和点状虚线分别代表第 2 次和第 3 次迭代时候的信息流。

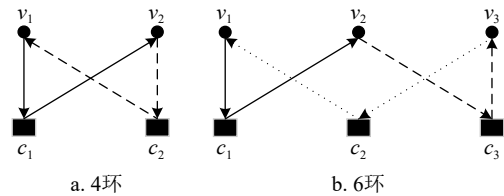


图 3 Tanner 图中短环的信息流动

以图 3a 为例, 第一次迭代的信息通过校验节点  $c_1$  传给了  $v_2$ 。第二次迭代的时候,  $v_2$  把信息经  $c_2$  传回给了  $v_1$ , 完成了一次循环。图 3b 通过 3 次迭代完成了一次循环。

从图 3 可以看出, 若迭代次数是短环环长的一半, 则短环中流动的信息将不会再次流入原始起点, 从而消除了由短环引起的节点信息估计存在误差的问题。

### 2.2 多子译码器并行组合译码方法

虽然, 将 BP 算法的迭代次数设置为校验矩阵的最短环长的一半, 可有效消除短环在译码中的影响。但是, 此时 BP 算法无法输出有效码字。为了解决这个问题, 本文提出一种在扩展 BP 之后级联基础译码模块的组合并行译码方法, 其译码结构如图 4 所示。

由图 4 可见, 本文设计的子译码器  $D_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , 可以分为两类。第一类子译码器由一个扩展 BP 模块和一个基础译码模块级联构成。基于扩展校验矩阵  $H_i$  的扩展 BP 模块对信道输入  $L_{ch}$  进行 BP 算法处理并获得外信息  $L_{ex}^i$ 。然后,  $L_{ex}^i$  与  $L_{ch}$  合并后由基于基础校验矩阵  $H_0$  的基础译码模块进行 BP 译码并输出候选码字  $\hat{c}_i$ 。其中, 扩展译码模块

的迭代次数被设置为 $H_i$ 中最短环长的一半。因此， $L_{ex}^i$ 不受 $H_i$ 中环结构的影响。第二类子译码器 $D_0$ 仅由基础校验矩阵 $H_0$ 确定的译码模块构成，输入信

道信息 $L_{ch}$ 并输出码字 $\hat{c}_0$ 。这两类子译码器输出的候选码字 $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_N$ 均通过一个 LMS 最大后验概率选出系统译码输出码字 $\hat{c}$ 。

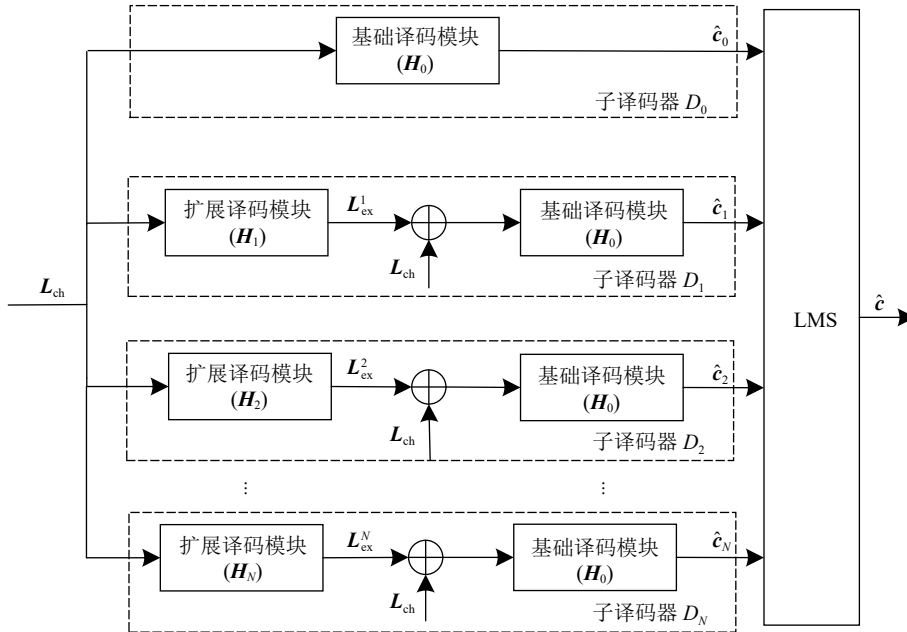


图 4 并行组合译码结构

本文提出的并行组合译码方法的步骤如下：

- 1) 初始化：设候选码字集合  $S = \emptyset$ ；将信道接收值序列  $y$  的向量 LLR 值  $L_{ch}$  分别输入到  $N+1$  个子译码器。
- 2) 子译码  $D_i$  输出候选向量  $\hat{c}_i$ ，若有  $H_0 \hat{c}_i^T = 0$ ，则  $S = S \cup \{\hat{c}_i\}$ ， $i = 0, 1, \dots, N$ 。
- 3) 当  $N+1$  个子译码器译码结束后，若  $S = \emptyset$ ，则译码结束并宣称译码失败。
- 4) LMS 选出  $\hat{c} = \arg \min_{\hat{c}_i \in S} d(y, \hat{c}_i)$  为译码输出码字。

### 3 本原式构造的 LDPC 码及其扩展校验矩阵的构造方法

以本原多项式作为连接多项式产生的线性序列是  $m$  序列， $m$  序列的截段可以等价为一个 LDPC 码的码字。这种 LDPC 码可称为  $m$  序列码<sup>[13]</sup>。由于  $m$  序列产生器是一个线性移位反馈寄存器，因此  $m$  序列码的编码开销极低。为了将并行组合译码方法应用于  $m$  序列编码上，本节先介绍该码的编码方法，然后分析其采样序列的约束关系，最后给出用这种约束关系构造扩展校验矩阵的方法。

#### 3.1 编码方式

记二元域上本原式为  $f(x) = x^k + x^p + 1$ ，其中正整数  $k, p$  有  $k > p$ 。再记迹函数  $tr_1^k(\cdot)$  是从域  $GF(2^k)$  到

域  $GF(2)$  的映射<sup>[14]</sup>。设  $\alpha$  是  $f(x)$  的根， $\beta$  是  $f(x)$  确定的线性反馈移位寄存器的初始相位，则由该寄存器生成的  $m$  序列  $(a_i)$  可被描述为：

$$a_i = tr_1^k(\beta \alpha^i) \quad \alpha, \beta \in GF(2^k) \quad (2)$$

序列  $(a_i)$  的  $n$  长片段  $(a_i)_{i=0}^{n-1}$  能被由  $f(x)$  确定的约束关系所校验，即：

$$a_i + a_{i+p} + a_{i+k} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n-k-1 \quad (3)$$

由此可以定义此序列片段  $(a_i)_{i=0}^{n-1}$  为一个分组码的码字。进一步，由于  $f(x)$  是三项式，由式 (3) 等价构成的校验矩阵是稀疏的，从而，可认为  $m$  序列片段  $(a_i)_{i=0}^{n-1}$  是 LDPC 码的码字。

#### 3.2 扩展校验矩阵的构造方法

由于  $GF(2^k)$  可表示为本原元  $\alpha$  的幂指数形式：

$$GF(2^k) = \{\alpha^{-1} = 0, \alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{2^k-2}\} \quad (4)$$

因此， $\alpha^q \in GF(2^k)$  是该有限域的本原元的充分必要条件为  $\gcd(q, 2^k - 1) = 1$ ，其中  $\gcd(a, b)$  是  $a$  和  $b$  的最大公约数<sup>[14]</sup>。而且新找出的本原元  $\alpha^q$  能代替  $\alpha$  重新表示整个有限域，即：

$$GF(2^k) = \{(\alpha^q)^{-1} = 0, (\alpha^q)^0 = 1, \alpha^q, (\alpha^q)^2, \dots, (\alpha^q)^{2^k-2}\} \quad (5)$$

记本原元  $\alpha^q$  是  $k$  阶本原式  $f_q(x)$  的根，那么本原式  $f_q(x)$  的形式为：

$$f_q(x) = x^k + \sum_{i=1}^{k-1} b_i x^i + 1, \quad b_i \in \{0, 1\} \quad (6)$$

与 $f(x)$ 生成序列 $(a_i)$ 类似, 以 $f_q(x)$ 为连接多项式的线性反馈移位寄存器通过初始相位 $\beta$ , 可生成 $m$ 序列 $(a_i^{(q)})$ :

$$a_i^{(q)} = \text{tr}_1^k(\beta(\alpha^q)^i) \quad (7)$$

比较式(3)可见, 式(7)中的序列 $(a_i^{(q)})$ 受到 $f_q(x)$ 的约束, 即约束关系为:

$$a_i^{(q)} + \sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{i+j}^{(q)} + a_{i+k}^{(q)} = 0 \quad (8)$$

事实上, 序列 $(a_i^{(q)})$ 是序列 $(a_i)$ 的采样间隔为 $q$ 的采样序列, 即:

$$a_i^{(q)} = \text{tr}_1^k(\beta(\alpha^{qi}) = a_{qi} \quad (9)$$

于是, 码字序列 $(a_i)_{i=0}^n$ 的采样间隔为 $q$ 的采样序列 $(a_{qi+s})_{j=0}^{Q-1}$  ( $s=0, 1, \dots, q-1, Q=[n/q]$ )同样满足 $f_q(x)$ 的约束关系。这些约束关系是:

$$\begin{cases} a_{qi+s} + \sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{q(i+j)+s} + a_{q(k+i)+s} = 0 \\ i = 0, 1, \dots, \frac{n-s}{q} - k \end{cases} \quad (10)$$

根据以上分析, 本文设计了一种构造扩展校验矩阵的方法。为满足 $\text{gcd}(q, 2^k - 1) = 1$ 的采样间隔 $q$ , 构造扩展校验矩阵的步骤为:

- 1) 生成 $f(x)$ 约束下的 $m$ 序列 $(a_i)$ 。
- 2) 通过采样间隔 $q$ 对 $m$ 序列进行采样, 获得采样序列 $(a_i^{(q)})$ 。
- 3) 通过 Berlekamp-Massey 算法<sup>[15]</sup>获得约束 $(a_i^{(q)})$ 的本原式 $f_q(x)$ 。
- 4) 通过式(9)将 $f_q(x)$ 对 $(a_i^{(q)})$ 的约束关系转化为 $(a_i)$ 的约束。
- 5) 依照式(10), 将 $f_q(x)$ 对应向量做循环位移生成扩展校验矩阵。

由向量做循环位移生成的矩阵一定存在许多短环。因此, 尽管该扩展校验矩阵不适合 MBBP 算法中的子译码器, 但是能用于本文提出的并行组合译码方法中的子译码器。

## 4 仿真验证

在深空通信和极低信噪比等场合, 必须利用极低码率纠错码的极限纠错能力。为示范这类应用,

本节构造一个极低码率 $m$ 序列 LDPC 码, 选择本原多项式为 $f(x) = x^{89} + x^{38} + 1$ , 设计码长为 3000, 码率约 0.03。仿真性能指标为误码率, 对比对象为该码的单译码器译码算法<sup>[13]</sup>。

为验证子译码器个数对于误码率的影响, 本文通过第 3 节提出的方法, 以采样间隔 $q = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ 构造出 6 个扩展校验矩阵, 对应的本原式 $f_q(x)$ 分别如下:

$$\begin{cases} f_3(x) = x^{89} + x^{72} + x^{55} + x^{38} + 1 \\ f_5(x) = x^{89} + x^{61} + x^{38} + x^{33} + 1 \\ f_7(x) = x^{89} + x^{69} + x^{38} + x^{29} + 1 \\ f_9(x) = x^{89} + x^{72} + x^{55} + x^{38} + x^{31} + x^{24} + 1 \\ f_{11}(x) = x^{89} + x^{67} + x^{52} + x^{38} + x^{30} + x^{15} + 1 \\ f_{13}(x) = x^{89} + x^{44} + x^{43} + x^{40} + x^{39} + x^{38} + 1 \end{cases} \quad (11)$$

不同信噪比下误码率仿真结果如图 5 所示。可见, 译码性能随着子译码器个数增加而改善, 但是子译码器个数大于 5 后, 译码性能趋于稳定。

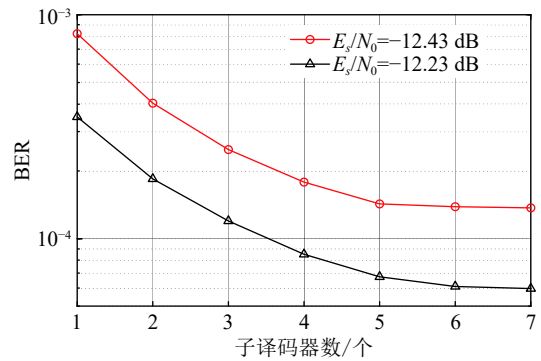


图 5 子译码器个数的误码率曲线

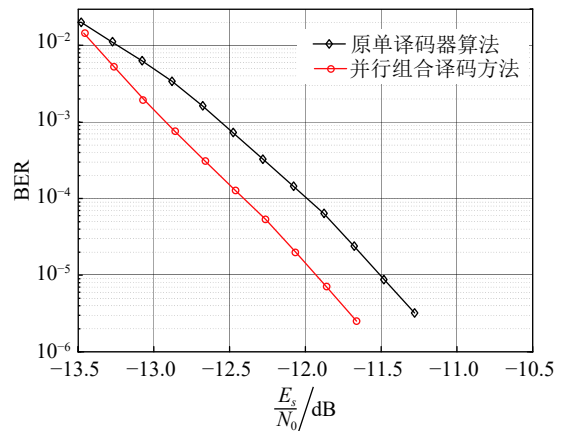


图 6 误码率曲线

图 6 展示了不同译码方法下 $m$ 序列码的误码率曲线, 从图中可以看出, 本文提出的并行组合译

码方法比原单译码器译码算法有更好的性能, 当误码率为 $10^{-5}$ 时, 本文的方法比原单译码器译码算法提升约 0.4 dB。

## 5 结束语

研究和设计适用于分组码译码的并行译码系统是提高分组码纠错性能的又一条有效途径, 适用于编码复杂度低但译码复杂度可宽容的, 例如深空探测信息回传地球等通信场合。

本文提出了一种新的多子译码器并行组合译码系统, 消除了子译码器中 BP 译码模块里校验矩阵的短环对译码的影响, 降低了构造适合的扩展校验矩阵的难度。针对  $m$  序列编码, 本文提出了一种构造扩展译码矩阵的方法, 以适用于本文提出的并行组合译码方法。仿真实验显示, 在误码率为 $10^{-5}$ 时, 本文提出的并行组合译码方法比原单译码器译码方法提升约 0.4 dB。

## 参 考 文 献

- [1] HEHN T, HUBER J, LAENDNER S, et al. Multiple-bases belief-propagation for decoding of short block codes[C]//2007 IEEE International Symposium on Information Theory. Nice: IEEE, 2007: 311-315.
- [2] CHASE D. Class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(1): 170-182.
- [3] HALFORD R T, CHUGG K M. Transactions letters random redundant iterative soft-in soft-out decoding[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2008, 56(4): 513-517.
- [4] BELLORADO J, KAVCIC A. Low-complexity soft-decoding algorithms for reed-solomon code-part I: An algebraic soft-in hard-out chase decoder[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(3): 945-959.
- [5] FORNEY G. Generalized minimum distance decoding[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1966, 12(2): 125-131.
- [6] HEHN T, HUBER J, MILENKOVIC O, et al. Multiple-bases belief-propagation decoding of high-density cyclic codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(1): 1-8.
- [7] DIMNIK L, BEERY Y. Improved random redundant iterative HDPC decoding[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(7): 1982-1985.
- [8] ZHU Min, GUO Quan, BAI Bao-ming, et al. Reliability-based joint detection-decoding algorithm for nonbinary LDPC-coded modulation systems[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2016, 64(1): 2-14.
- [9] KANG Peng, XIE Yi-xuan, YANG Lei, et al. Enhanced quasi-Maximum likelihood decoding based on 2D modified min-sum algorithm for 5G LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2020, 68(11): 6669-6682.
- [10] HEHN T, HUBER J, HE Pei, et al. Multiple-bases belief-propagation with leaking for decoding of moderate-length block codes[C]//The 7th International ITG Conference on Source and Channel Coding. Ulm: VDE, 2008: 1-6.
- [11] HU Xiao-yu, ELEFTHERIOU E, ARNOLD D M. Regular and irregular progressive edge-growth tanner graphs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(1): 386-398.
- [12] CHEN Chao, BAI Bao-ming, YANG Xin-quan, et al. Enhancing iterative decoding of cyclic LDPC codes using their automorphism groups[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(6): 2128-2137.
- [13] ZHANG Zhe, ZHOU Liang, DU Jun-yi, et al. An algebraic approach to design low rate low density parity check code[C]//2017 International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP). Nanjing: IEEE, 2017: 1-6.
- [14] DUMMIT D, STEVEN D, FOOTE R M. Abstract algebra[M]. Hoboken: Wiley, 2004.
- [15] REDINBO G R. Correcting DFT codes with a modified Berlekamp-massey algorithm and kalman recursive syndrome extension[J]. *IEEE Transactions on Computers*, 2014, 63(1): 196-203.

编辑 刘飞阳