

# 改进 Fourier-Ritz 方法分析附加质量矩形板的 横向振动



吴涛, 于东, 曲建俊, 陈照波\*

(哈尔滨工业大学机电工程学院 哈尔滨 150001)

**【摘要】**在实际工程中, 附有集中质点或者可以等效为集中质点的矩形薄板结构在机械工程、电子工程以及车辆工程等  
领域具有广泛应用, 如支撑工作台、舰船甲板、PCB 板等。采用改进 Fourier-Ritz 方法对一般边界条件下且附加集中质量的  
矩形薄板建立数值分析模型, 可以避免传统方法在薄板边界处存在的不可导或者不连续等问题。另外采用余弦函数加多项式  
形式的傅里叶展开相较于正弦函数展开, 其结果具有更好的收敛性。该文给出带有集中质量矩形薄板振动的质量矩阵和刚度  
矩阵的计算方法, 分析了不同边界约束的设定参数以及讨论了集中质量大小、位置以及数量对矩形板模态的影响。该方法及  
其分析结果可以应用于矩形薄板的振动分析以及振动控制。

**关键词** 边界约束; 集中质量; 改进 Fourier-Ritz 方法; 矩形板振动  
**中图分类号** TH73; O32 **文献标志码** A **doi**:10.12178/1001-0548.2021094

## Modified Fourier-Ritz Method to Analyze Transverse Vibration of Rectangular Plates with Additional Mass

WU Tao, YU Dong, QU Jianjun, and CHEN Zhaobo\*

(School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology Harbin 150001)

**Abstract** In practical engineering, rectangular thin plate structures with concentrated mass points or  
equivalent to concentrated mass points have a wide range of applications in mechanical engineering, electronic  
engineering, and vehicle engineering, such as supporting workbenches, ship decks, PCB boards and so on. The  
modified Fourier Ritz method is used to establish the numerical analysis model of rectangular thin plate with  
lumped mass under general boundary conditions, which can avoid the problems of non-derivability or discontinuity  
at the boundary of thin plates in traditional methods. In addition, the Fourier expansion in the form of cosine  
function plus polynomial has better convergence than that in the form of sine function. The calculation method of  
mass matrix and stiffness matrix of rectangular thin plate with concentrated mass is given, the parameters of  
different boundary constraints are analyzed, and the influence of the size, position and quantity of concentrated  
mass on the modal of rectangular plate is discussed. The method and its results can be applied to the vibration  
analysis and vibration control of rectangular thin plates.

**Key words** boundary constraints; concentrated mass; modified Fourier-Ritz method; rectangular plate  
vibration

众所周知, 附加质量的矩形薄板在工程实践中  
具有广泛的应用, 如房屋楼板、机翼、电路板、显  
示屏等。其振动形式也主要有弯曲、纵向、横向  
3 种方式, 其中纵向和横向属于面内振动, 由于其  
振动模态频率通常不在主要激励频率范围内, 所以  
仅仅在一些特殊工程应用中予以考虑<sup>[1]</sup>, 而横向弯  
曲振动由于模态频率较低, 很容易在激励频率范围

内, 在研究设计以及实际应用中有很高的参考价  
值。因此, 在过去几十年中, 一直是研究者和工程  
师们的关注点, 特别是具有各种边界条件的矩形板  
的振动。在至少含有一对对边简支的矩形板的振动  
求解中, 精确解通常表示为三角函数和双曲函数或  
其组合的形式存在<sup>[2-3]</sup>, 然而, 其中的一些常数必须  
依据边界条件确定, 主要受到矩形板的长宽比, 约

收稿日期: 2021-04-09; 修回日期: 2021-06-24

基金项目: 国家重点研发项目 (2018YFB2001500)

作者简介: 吴涛 (1990-), 男, 博士生, 主要从事振动控制方面的研究。

\*通信作者: 陈照波, E-mail: chengzb@hit.edu.cn

束弹簧刚度,泊松比,厚度等因数的影响,因此,在一些求解方法中都是被迫重复求解方程得到不同边界条件的解。也有很多研究者通过近似或者数值求解技术来求解矩形板振动的控制方程。

自20世纪50年代以来,许多研究者采用 Rayleigh 方法和 Ritz 方法将矩形板的位移函数用相似边界的梁的特征函数来表示,用来近似求解特定边界的矩形板的振动。相似的,其相结合的 Rayleigh-Ritz 方法,也被用来求解具有弹性约束的经典边界的矩形板横向振动的固有频率,文献[4-5]证明此方法的准确性并且采用了此方法求解了某些条件下矩形板的高阶振型。文献[6]直接用有限积分变换方法获得矩形薄板的自由振动解析解,该方法主要优点是无需重新确定偏差函数,具有一定的通用性。文献[7]利用广义叠加方法减小了刚度矩阵的规模,得到了矩形板振动控制方程的齐次解,并通过实例证明其有效性、准确性和收敛性。文献[8-9]通过求解双调和方程的方法,推导矩形板的动态刚度矩阵,从而比较精确得到矩形板自由振动的双谐方程,并通过挑选模态振型样本证明了其准确性,但是需要冗长的符号计算。文献[10]通过实验的方法对 F-C-F-C 型矩形板进行了研究,通过将实验得到的结果与有限元数值模型结果对比证明了实验方法的有效性。文献[11]采用微分求积(DQ)方法计算了边界条件为 S-C-S-C 矩形板的振动和屈曲,并给出了数值算例证明了此方法的准确性和收敛性,但是结果的收敛是震荡的,而且需要更多项才能得到精确解。另外,现很多研究者采用的有限差分法、有限元法、离散元法等经过适当的修改和优化,也可以得到矩形板振动的比较精确的解<sup>[12]</sup>。而对于附有集中质量的矩形薄板,文献[13]采用约束模态分析的方法研究了其在四边简支条件下的特征值和振型,并给出了相关公式。文献[14]采用 Hamilton 原理建立含有集中质量的矩形薄板的动力学方程,探究了质量的变化对幅频特性的影响。

回顾以上研究成果可以看出,一部分研究者们关注某个特定边界或者经典边界下的矩形板以及附有集中质量矩形板的振动,而在实际中,可能遇到各种边界的组合,包括弹性边界;另一部分研究者试图开发一种包含所有边界条件的算法,但是也存在收敛震荡,收敛较慢以及需要冗长且重复的符号计算等问题。该文采用了一种改进 Fourier-Ritz 方

法用以求解含有一组对边简支,另外一组任意弹性约束的矩形板的自由振动,该方法由文献[15]提出并被应用于单梁结构、双梁结构、板结构的横向振动的求解中。本文将 Fourier-Ritz 方法进行改进并扩展到附有集中质量矩形板的振动求解中,即将其位移函数表示为标准的余弦级数与周期多项式函数和的形式,这样可以消除边界处的位移函数及其导数存在的不连续或者不可导的情况,因此可以将其应用到任一边界条件的求解中,无需频繁修改求解程序,只要设定参数值即可。需要强调的是,文献[15]已指出扩展成余弦级数较正弦级数的收敛性更快。本文还采用此方法分析了集中质量大小、位置以及数量对矩形板模态的影响,并与有限元分析数据进行对比,证明了本文方法的准确性和收敛性,其结果对附有集中质量矩形板的模态分析和振动控制具有一定的参考意义。

## 1 改进 Fourier-Ritz 方法基本原理

如图1所示,矩形薄板沿  $x=0$ ,  $x=a$  方向受弹性支撑约束,沿  $y=0$ ,  $y=b$  方向受简单支撑约束,其通过线性弹簧与扭转弹簧组合的形式实现,在实际应用过程中,根据边界约束条件的不同,可以通过设置不同弹簧的刚度系数来实现建模。根据文献[2],附有集中质量的矩形薄板的自由振动微分方程为:

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \rho h \omega^2 W - \omega^2 \sum_{i=1}^{N_m} m_i \delta(x - x_i, y - y_i) W = 0 \quad (1)$$

式中,  $W$  表示弯曲位移;  $D$  表示弯曲刚度;  $\rho$  和  $h$  分别为矩形板材料密度和厚度;  $x_i$  和  $y_i$  分别是第  $i$  个质量点的横纵坐标;  $m_i$  表示第  $i$  个质量点的质量;  $\omega$  表示角频率。

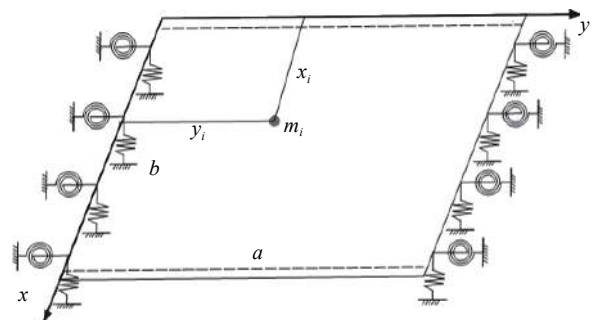


图1 加载弹性约束矩形板模型

在  $x=0$  处的边界条件为:

$$\frac{k_0}{D} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{K_0}{D} \frac{\partial W}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3)$$

在  $x=a$  处的边界条件为:

$$\frac{k_a}{D} - \left( \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{K_a}{D} \frac{\partial W}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5)$$

式中,  $k_0$ 、 $k_a$  为线性弹簧的刚度值;  $K_0$ 、 $K_a$  为扭转弹簧的刚度值;  $\nu$  为矩形板的泊松比。在求解式 (1) 的过程中, 其解必须满足两个条件: 1) 方程的解必须连续且存在  $n-1$  阶导数, 并且第  $n$  阶导数可积; 2) 其解必须满足边界条件 (式 (2)~式 (5))。此处引入改进 Fourier-Ritz 方法, 即将方程的解表示为傅里叶级数展开加上辅助多项式的形式, 在梁的振动问题研究中, 采用此方法来解决传统仅有傅里叶正弦级数展开的解函数可能导致原函数或者导数在端点处存在不连续的情况<sup>[16]</sup>, 基于此种考虑, 将矩形板的振动函数写成:

$$W(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos \lambda_{am} x + (p_1(x) + p_2(x)) \times \cos \lambda_{bn} y \quad n=0,1,\dots,N \quad (6)$$

式中,  $\lambda_{am} = m\pi/a$ ;  $\lambda_{bn} = n\pi/b$ ;  $p_1(x)$ 、 $p_2(x)$  为辅助多项式;  $A_m$  为未知参数。

引入的多项式须满足:

$$(p_1(0) + p_2(0)) \cos \lambda_{bn} y = \alpha_0 \cos \lambda_{bn} y \quad (7)$$

$$(p_1(a) + p_2(a)) \cos \lambda_{bn} y = \alpha_a \cos \lambda_{bn} y \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 (p_1(0) + p_2(0))}{\partial x^2} \cos \lambda_{bn} y = \beta_0 \cos \lambda_{bn} y \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 (p_1(a) + p_2(a))}{\partial x^2} \cos \lambda_{bn} y = \beta_a \cos \lambda_{bn} y \quad (10)$$

式中,  $\alpha_0$ 、 $\alpha_a$ 、 $\beta_0$ 、 $\beta_a$  为未知参数。

多项式  $p_1(x)$ 、 $p_2(x)$  必须是连续的周期函数, 因此可以设  $p_1(x)$  为连续的最低阶多项式:

$$p_1(x) = \frac{\alpha_a x}{a} + \frac{\alpha_0}{a} (a-x) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 p_2(x)}{\partial x^2} = \frac{\beta_a x}{a} + \frac{\beta_0}{a} (a-x) \quad (12)$$

对式 (12) 进行二次积分并结合式 (9)~式 (10), 可得:

$$p_2(x) = \frac{\beta_a}{6a} (x^3 - a^2 x) - \frac{\beta_0}{6a} (2a^2 x - 3ax^2 + x^3) \quad (13)$$

式 (11) 和式 (13) 组成的多项式可以用来解决由于传统方法在边界处可能存在的不连续的情况, 采用余弦级数展开的方法求解振动问题已用在单梁和双梁问题中, 其正确性已得到验证, 此处主要研究采用改进 Fourier-Ritz 方法研究其在矩形板上的应用。

将式 (11)、式 (13) 及式 (6) 代入式 (4)~式 (7), 可得:

$$k_0 \left( \alpha_0 + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \right) = -D \left( -\frac{\beta_0}{a} + \frac{\beta_a}{a} - (2-\nu) \times \lambda_{bn}^2 \left( -\frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_a}{a} - \frac{a\beta_0}{3} - \frac{a\beta_a}{6} \right) \right) \quad (14)$$

$$K_0 \left( -\frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_a}{a} - \frac{a\beta_0}{3} - \frac{a\beta_a}{6} \right) = D \left( \beta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} -A_m \lambda_{am}^2 + \nu \left( -\alpha_0 \lambda_{bn}^2 + \sum_{m=0}^{\infty} -A_m \lambda_{bn}^2 \right) \right) \quad (15)$$

$$k_a \left( \alpha_a + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m \right) = D \left( -\frac{\beta_0}{a} + \frac{\beta_a}{a} + (2-\nu) (-\lambda_{bn}^2) \times \left( -\frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_a}{a} + \frac{a\beta_0}{6} + \frac{a\beta_a}{3} \right) \right) \quad (16)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} A_m \lambda_{am}^2 + \nu \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} A_m \lambda_{bn}^2 - \beta_a = \nu \alpha_a \lambda_{bn}^2 - \frac{K_a}{D} \left( -\frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_a}{a} + \frac{a\beta_0}{6} + \frac{a\beta_a}{3} \right) \quad (17)$$

又根据式 (11) 和式 (13), 可得:

$$p_1(x) + p_2(x) = \zeta(x) \bar{\gamma} \quad (18)$$

式中,

$$\zeta(x) = \{(a-x)/ax/a - (2a^2 x - 3ax^2 + x^3)/6a(x^3 - a^2 x)/6a\} \quad (19)$$

$$\bar{\gamma} = \{\alpha_0, \alpha_a, \beta_0, \beta_a\}^T \quad (20)$$

根据式 (14)~式 (17) 可得:

$$\mathbf{H}_n \bar{\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{Q}_m^n A_m \quad (21)$$

式中,

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_0 - \frac{(2-\nu)\lambda_{bn}^2}{a} & \lambda_{bn}^2(2-\nu)\frac{1}{a} & \frac{1}{a} - \lambda_{bn}^2(2-\nu)\frac{a}{3} & -\frac{1}{a} - \lambda_{bn}^2(2-\nu)\frac{a}{6} \\ \frac{1}{a}\tilde{K}_0 - \nu\lambda_{bn}^2 & -\frac{1}{a}\tilde{K}_0 & \frac{a}{3}\tilde{K}_0 + 1 & \frac{a}{6}\tilde{K}_0 \\ \lambda_{bn}^2(2-\nu)\frac{1}{a} & -\tilde{k}_a - \frac{(2-\nu)\lambda_{bn}^2}{a} & -\frac{1}{a} - \lambda_{bn}^2(2-\nu)\frac{a}{6} & \frac{1}{a} - \lambda_{bn}^2(2-\nu)\frac{a}{3} \\ -\frac{1}{a}\tilde{K}_a & \frac{1}{a}\tilde{K}_a - \nu\lambda_{bn}^2 & \frac{a}{6}\tilde{K}_a & \frac{a}{3}\tilde{K}_a + 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{Q}_m^n = \left\{ \tilde{k}_0 \quad \lambda_{am}^2 + \nu\lambda_{bn}^2 \quad (-1)^m \tilde{K}_a \quad (-1)^m \lambda_{am}^2 + \nu(-1)^m \lambda_{bn}^2 \right\}^T \quad (23)$$

式中,  $\tilde{k}_0 = k_0/D$ ;  $\tilde{k}_a = k_a/D$ ;  $\tilde{K}_0 = K_0/D$ ;  $\tilde{K}_a = K_a/D$ 。

将式 (18) 和式 (21) 代入式 (6), 可得:

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m (\cos \lambda_{am} x + \zeta(x) \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{Q}_m^n) \times \cos \lambda_{bn} y \quad (24)$$

$n = 1, 2, \dots, N$

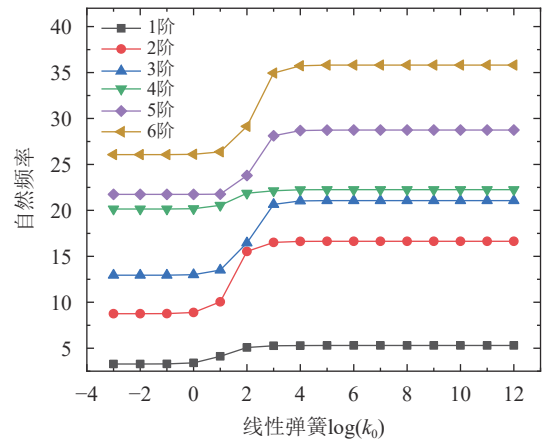
首先将式 (24) 代入式 (1) 中, 然后采用 Galerkin 离散化的方法进行离散化处理, 即乘以  $(\cos \lambda_{am} x + \zeta(x) \mathbf{H}_n^{-1} \mathbf{Q}_m^n) \cos \lambda_{bn} y$ , 最后对所得到的方程在整个定义域中进行积分, 可得:

$$\left( \mathbf{K} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (25)$$

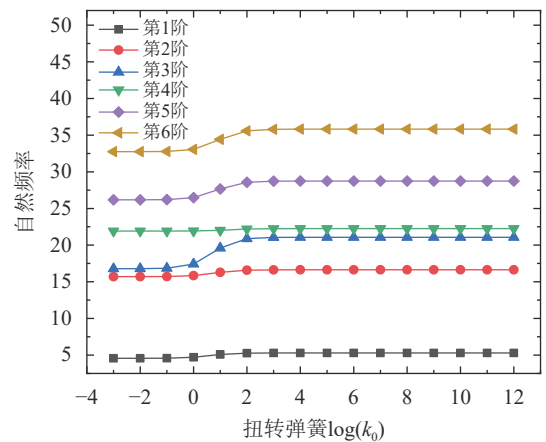
通过求解式 (25) 的矩阵特征值问题, 可以得到矩形板的固有频率和对应的模态形状, 并且通过改变线性弹簧和扭转弹簧的刚度值, 可以实现不同边界条件的求解, 在求解过程中,  $m$ 、 $n$  值分别截断到  $M$ 、 $N$ 。

## 2 矩形板边界条件的讨论

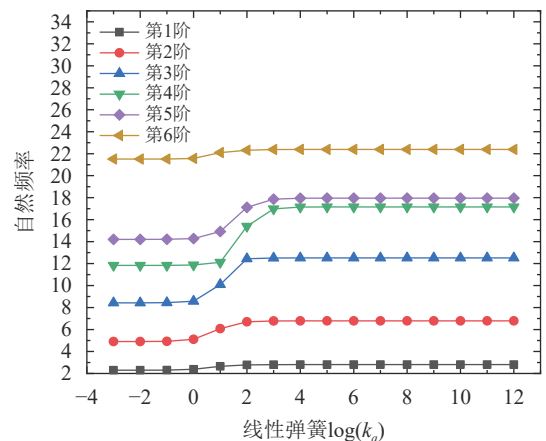
采用该文方法求解一个沿一对边简支约束, 另一对边任意弹性约束并附有集中质量的矩形薄板的振动模态, 需要根据不同边界条件设定边界约束参数, 比如可以通过设置两个线性弹簧的刚度值为无限大以及两个旋转弹簧刚度值无限小来实现四边简支约束, 但是没办法确定在计算过程中代入的数据是否足够无限大或者无限小, 因此需要详细讨论不同大小的弹簧刚度值对实际自然频率的影响。在计算过程中, 取截断系数  $M = N = 10$ , 矩形薄板的密度  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 薄板长宽分别为  $a = 2 \text{ m}$ 、 $b = 2 \text{ m}$ , 板厚  $h = 0.005 \text{ m}$ , 并且在板的对称中心附有一个质量  $m = 50 \text{ kg}$  的集中质量。在分析过程中, 分别改变其中一种弹簧的刚度值, 求解其前 6 阶频率参数随不同种类弹簧不同刚度值改变而改变的值, 其结果如图 2 所示。



a. 不同  $k_0$  值所对应的自然频率



b. 不同  $k_0$  值所对应的自然频率



c. 不同  $k_a$  值所对应的自然频率

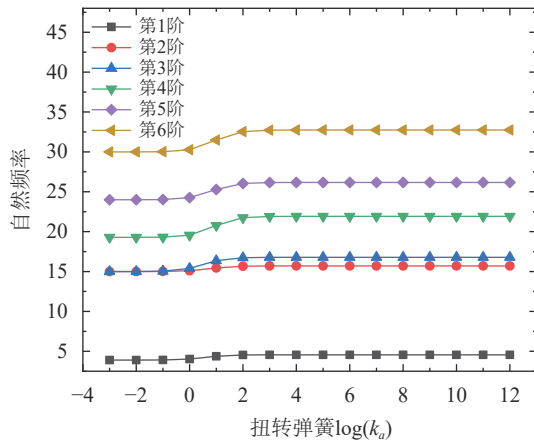
d. 不同 $k_a$ 值所对应的自然频率

图2 不同弹簧刚度对应的自然频率

图2中,不同边界条件,其频率变化参数基本相同,随着弹簧刚度值的增加,边界条件慢慢演化成简支约束,当刚度值超过 $10^7$ 时,频率参数基本趋于稳定,即达到了所设定的约束条件。因此,在实际应用过程中,为了计算的准确性,可以将无限大设置为 $10^{10}$ ,无限小设置为 $10^{-2}$ 来实现边界约束的建模。

### 3 数值算例及其仿真分析

为了验证改进 Fourier-Ritz 方法在不同边界条件下的准确性以及不同附加质量的情况下对矩形薄板自然频率的影响,下文将对此列举算例进行验证分析,其中所涉及矩形薄板的密度 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,泊松比 $\nu = 0.3$ ,有限元方法采用 Workbench 中 shell181 单元建模,划分单元尺寸为 $0.03 \text{ m}$ ,网格类型采用四边形网格划分方式。

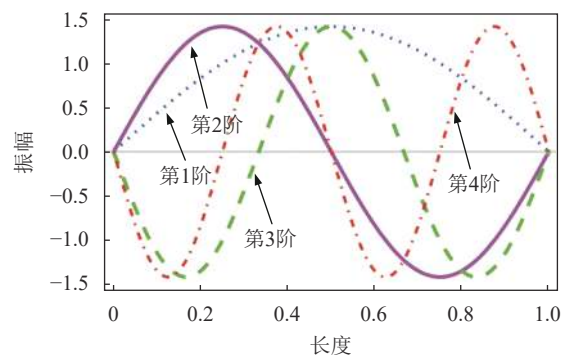
#### 3.1 无集中质量时矩形板的振动自然频率

表1为考虑无附加质量下矩形薄板在不同边界条件条件下的自然频率,其中S代表简支,C代表固支,F代表自由边界并分别给出了采用改进 Fourier-Ritz 方法与有限元方法所计算的结果,其中 $a = b = 2 \text{ m}$ ,板厚 $h = 0.005 \text{ m}$ 。

从表1中不同边界条件下采用改进 Fourier-Ritz 方法计算所得的结果与采用有限元方法计算的结果进行对比可知,本文方法与有限元方法最大误差百分比为 $0.142\%$ ,两者计算结果具有较好的一致性,验证了该方法的准确性。图3所示为四边简支的矩形薄板前4阶自然频率在 $y=b/2$ 处对应的振型,由图可知,其振动幅值在边界处逐渐变小,符合振动规律。

表1 无附加质量条件下矩形薄板不同边界条件下的自然频率

边界条件	方法	自然频率/Hz			
		第1阶	第2阶	第3阶	第4阶
S-S-S-S	本文	5.999	14.996	14.996	23.993
	有限元	5.998	15.006	15.006	24.010
C-S-C-S	本文	8.803	16.645	21.067	28.742
	有限元	8.801	16.647	21.097	28.775
S-F-S-F	本文	2.927	4.903	11.163	11.835
	有限元	2.928	4.903	11.160	11.847
S-S-S-F	本文	3.551	8.435	12.523	17.955
	有限元	3.551	8.435	12.531	17.959
S-C-S-S	本文	7.188	15.707	17.823	26.181
	有限元	7.187	15.714	17.840	26.197

图3 S-S-S-S型矩形板前4阶频率在 $y=b/2$ 处对应的振型

#### 3.2 集中质量的位置及大小的影响

表2为在一个四边简支,长宽分别为 $a=4 \text{ m}$ , $b=2 \text{ m}$ 矩形薄板的不同位置附加一个 $m=60 \text{ kg}$ 的集中质量所计算自然频率的结果。由表2可知,集中质点在矩形板的不同位置对矩形板的自然频率也有不同的影响,可以据此放置作动器实现其振动控制。另外由表2可得,本文方法与有限元方法最大误差百分比为 $1.95\%$ ,进一步验证了该文所述方法的准确性。

表2 S-S-S-S薄板在附有单一质量不同位置下的自然频率

位置/m	方法	自然频率/Hz			
		第1阶	第2阶	第3阶	第4阶
(0.5,0.5)	本文	3.606	5.271	7.962	11.333
	有限元	3.605	5.254	7.909	11.279
(1.0,0.5)	本文	3.356	5.184	8.851	11.083
	有限元	3.311	5.111	8.711	10.913
(1.5,0.5)	本文	3.196	5.622	9.016	10.294
	有限元	3.152	5.546	8.923	10.146
(2.0,0.5)	本文	3.151	6.074	7.810	11.141
	有限元	3.108	5.999	7.661	10.980
(2.5,0.5)	本文	3.196	5.622	9.016	10.294
	有限元	3.152	5.546	8.856	10.146
(3.0,0.5)	本文	3.356	5.184	8.851	11.083
	有限元	3.311	5.111	8.711	10.913
(3.5,0.5)	本文	3.652	5.338	8.063	11.476
	有限元	3.605	5.254	7.909	11.279

表3为在矩形薄板(1.0 m, 0.5 m)处附加不同大小集中质量计算所得到的前4阶自然频率,由表3可知,随着所附加集中质量的增加,其自然频率逐渐降低。

表3 S-S-S-S型薄板在固定位置下附有不同大小集中质量的自然频率

重量/kg	方法	自然频率/Hz			
		第1阶	第2阶	第3阶	第4阶
0	本文	3.796	6.074	9.871	12.908
	有限元	3.749	5.999	9.750	12.758
10	本文	3.733	5.884	9.697	12.413
	有限元	3.687	5.810	9.577	12.260
30	本文	3.591	5.544	9.306	11.568
	有限元	3.545	5.471	9.178	11.397
50	本文	3.435	5.285	8.977	11.186
	有限元	3.390	5.211	8.840	11.015
70	本文	3.277	5.099	8.747	11.009
	有限元	3.232	5.027	8.605	10.841
90	本文	3.124	4.970	8.588	10.912
	有限元	3.079	4.897	8.444	10.747
110	本文	2.981	4.877	8.475	10.852
	有限元	2.937	4.806	8.331	10.689
130	本文	2.851	4.809	8.392	10.812
	有限元	2.807	4.739	8.248	10.651

### 3.3 集中质量的位置及大小的影响

考虑一个四边简支,长宽分别为 $a=4\text{ m}$ , $b=2\text{ m}$ 矩形薄板的不同位置附加不同大小的集中质量,其中集中质量 $m_1=60\text{ kg}$ , $m_2=80\text{ kg}$ , $m_3=100\text{ kg}$ 分别附在(1.0 m, 0.5 m), (2.0 m, 1.0 m), (2.5 m, 1.0 m)处。表4给出了分别采用本文方法与有限元方法计算的结果,由表可知,其附加质量同样降低了薄板的自然频率,同时其与有限元结果最大误差为2.38%,验证该方法在计算多个附加质量时候的准确性。

表4 S-S-S-S薄板在附有多个集中质量下的自然频率

	方法	自然频率/Hz			
		第1阶	第2阶	第3阶	第4阶
附加集中质量	本文	2.021	4.153	6.587	10.472
	有限元	1.993	4.086	6.434	10.252
无集中质量	本文	3.796	6.074	9.871	12.908
	有限元	3.749	5.999	9.750	12.758

## 4 结束语

采用改进 Fourier-Ritz 方法分析计算了一组对边简支,另外一组任意弹性约束且附有任意集中质量的矩形薄板的固有频率和振型。与经典方法不同,为了避免传统方法矩形板位移函数及其导数在边界处可能存在不连续或者不可导的情况,遂将

位移函数表示为标准的余弦级数与周期多项式函数和的形式,最后通过求解矩阵的特征值与特征向量来获取矩形板的模态,其收敛性也较正弦展开更快。为了验证本文所采用的改进 Fourier-Ritz 方法的准确性和收敛性,文中列举了多个数值算例与有限元方法的结果比较,数据表明,该方法具有较高精度和准确性。

同时,该文也对边界条件进行了分析,不同弹簧刚度的设定可以演化成不同的边界条件,这有助于不同边界条件下附有集中质量矩形板振动的研究。并且对不同位置,不同大小以及不同个数的集中质量对矩形薄板的自然频率的影响进行了分析,其结果可以应用于附有集中质量矩形薄板的振动控制。

## 参 考 文 献

- [1] DU J T, LI W L, JIN G Y, et al. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(3): 908-927.
- [2] 韩清凯, 翟敬宇, 张昊. 机械动力学与振动基础及其数字仿真方法[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2016: 92-110.
- [3] HAN Q K, ZHAI J Y, ZHANG H. Foundations and numerical simulation on machinery dynamic and vibration[M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2016: 92-110.
- [4] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983: 32-67.
- [5] CAO Z Y. Vibration theory of plates and shells[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1983: 32-67.
- [6] WARBURTON G B, EDNEY S L. Vibrations of rectangular plates with elastically restrained edges[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, 95(4): 522-537.
- [7] ILANKO S, MONTEERRUBIO L, MOCHIDA Y. The rayleigh-ritz method for structural analysis[M]. Great Britain: ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2014: 11-60.
- [8] ZHANG J H, ULLAH S, ZHONG Y. Accurate free vibration solutions of orthotropic rectangular thin plates by straightforward finite integral transform method[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2020, 90(2): 353-368.
- [9] ZHANG J H, LU J, ULLAH S, et al. Buckling analysis of rectangular thin plates with two opposite edges free and others rotationally restrained by finite Fourier integral transform method[J]. *Z Angew Math Mech*, 2021, 101(1): 153-169.
- [10] BANERJEE J R, PAPKOV S O, LIU X, et al. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 342(1): 177-199.
- [11] LIU X, BANERJEE J R. Free vibration analysis for plates with arbitrary boundary conditions using a novel spectral-dynamic stiffness method[J]. *Computers & Structures*,

- 2016, 164(1): 108-126.
- [10] ABDULKERIM S, DAFNIS A, RIEMERDES H. Experimental investigation of nonlinear vibration of a thin rectangular plate[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2019, 11(6): 1950059.
- [11] WANG X W, GAN L F, WANG Y L. A differential quadrature analysis of vibration and buckling of an SS-C-SS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 298(1): 420-431.
- [12] ALKHAYAL J, CHEHAB J P, JAZAR M. Existence, uniqueness, and numerical simulations of Föppl-von Kármán equations for simply supported plate[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, 42(18): 7482-7493.
- [13] 韩广才, 吴艳红, 周凌. 带有集中质量矩形板的振动分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2008, 29(12): 1298-1303.  
HAN G C, WU Y H, ZHOU L. Vibration analysis of rectangular plates coupled with concentrated masses[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2008, 29(12): 1298-1303.
- [14] 陈晓明, 冯志华, 张凤君, 等. 含集中质量矩形薄板的动力学建模与质量调幅分析[J]. *应用力学学报*, 2018, 35(4): 743-749.  
CHEN X M, FENG Z H, ZHANG F J, et al. Dynamic modeling of rectangular plates with a lumped mass and the amplitude modification effect of mass[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, 35(4): 743-749.
- [15] LI W. Free vibration of beams with general boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 237(4): 709-725.
- [16] WARBURTON G B. The vibrations of rectangular plates[J]. *Archive Proceeding of the Institute of Mechanical Engineers*, 1954, 168(1): 371-384.

编辑 刘飞阳