



多层复杂网络上的渗流与级联失效动力学

贾春晓¹, 李明², 刘润然^{1*}

(1. 杭州师范大学复杂科学研究中心 杭州 311121; 2. 合肥工业大学物理学院 合肥 230009)

【摘要】多层网络描述了复杂系统之间或强或弱的耦合或联系。为了较为系统和全面地介绍基于渗流理论的多层网络鲁棒性研究, 该文综述了多层网络跨层节点的依赖特征、层内节点的连接结构特征、层内节点的耦合特性和攻击方式对级联失效动力学和鲁棒性的影响。与单层网络完全不同, 多层网络会在遭受攻击时发生突然性的崩溃; 同时度分布异质性较强的多层网络会更为脆弱, 在崩溃中会出现多重相变或混合相变现象。此外, 弱依赖机制使得多层网络模型能够描述复杂系统更多丰富的细节, 如依赖强度的异质性、依赖强度的非对称性及依赖关系的拓扑结构等。这些结果表明, 多层网络的级联失效过程比单层网络更加复杂, 忽视复杂系统之间的依赖性可能会高估复杂网络的鲁棒性甚至会带来完全错误的认识。

关键词 级联失效; 相互依赖性; 多层网络; 渗流

中图分类号 TP301 **文献标志码** A **doi**:10.12178/1001-0548.2021184

Percolation and Cascading Dynamics on Multilayer Complex Networks

JIA Chunxiao¹, LI Ming², and LIU Runran^{1*}

(1. Research Center for Complexity Sciences, Hangzhou Normal University Hangzhou 311121;

2. School of Physics, Hefei University of Technology Hefei 230009)

Abstract The multilayer network describes either strong or weak coupling or connections among complex systems. In order to provide a more systematic and comprehensive understanding of the study for the robustness of multilayer networks that based on percolation theory, this paper reviews the effects of interdependency characteristics of cross-layer nodes, connectivity characteristics of intra-layer nodes, interdependency characteristics of intra-layer nodes, attack strategies on the cascading dynamics, and robustness of multilayer networks. Different from single-layer network, the multilayer network will collapse suddenly as a first-order percolation transition when suffered attacks. At the same time, the multilayer networks with strong heterogeneity of degree distribution are more vulnerable and exhibit multiple phase transitions or hybrid phase transitions. In addition, the mechanism of weak interdependence enables multilayer network to describe more details of complex systems, such as the heterogeneity of interdependency strength, the asymmetry of interdependency strength, and the topology of interdependency relations. These results show that the cascading dynamics of multilayer networks are more complicated than that of single-layer networks. Ignoring the interdependencies among complex systems may lead to overestimation of the robustness of complex networks or even a completely wrong understanding.

Key words cascading dynamics; interdependence; multilayer network; percolation

复杂网络理论描述了真实世界事物之间的普遍联系, 而多层网络则描述了复杂网络或复杂系统之间的联系。多层网络在现实世界中有着广泛的应用^[1-2], 如因特网和电力网络之间因互相依赖而组成的多层网络^[3-4]; 一个生物细胞可以看成是代谢网络, 蛋白质相互作用网络和基因转录网络的相互依

赖而形成的多层网络^[5]。这些联系在保证每个复杂系统正常运行的同时, 也给她带来了系统性风险, 如重大停电事故与大范围的通信中断^[3,6]、严重的交通瘫痪^[7-8]等。负责电力传输与分配的电力网络依赖于信息传输网络提供监控和调度等方面的支持, 同时, 信息传输网络也依赖于电力网络提供电力保

收稿日期: 2021-07-14; 修回日期: 2021-10-08

基金项目: 国家自然科学基金(61773148)

作者简介: 贾春晓(1982-), 女, 博士, 副教授, 主要从事复杂网络和复杂系统方面的研究。

*通信作者: 刘润然, E-mail: runranliu@gmail.com

障^[3,9]。类似地, 电力网络和铁路网络也存在着双向的依赖关系, 电力网络的故障会影响铁路交通的正常运转, 而铁路的非正常运转又会影响发电站燃料和物资的供应。因此, 研究复杂系统的鲁棒性, 需要考虑它们之间的相互依赖性, 并基于这种依赖性对复杂系统进行分析 and 建模, 以了解这种相互依赖性导致系统大规模瘫痪的发生机理, 从而为减少和干预级联失效提供预防、应急和控制措施^[2]。

除了相互依赖的关系之外, 多层网络还可以描述复杂系统之间其他性质的耦合或联系, 如协作^[10]、竞争^[11-12]和对抗^[13]等。人们将网络层间存在依赖关系的多层网络称为相依网络, 或网络的网络^[14-16]。另外, 多层网络还可以表示同一组节点具有不同性质连接的网络。在这样的多层网络中, 每种类型的连接都可独自形成一个网络, 但是它们共享同一个节点集合。如航空网络可被视作一个多层网络, 每个机场为一个节点, 不同航空公司的航线为不同类型的连接^[17]。当然在多层网络中并不一定每个节点都能够出现在所有的网络层中, 但每层网络中出现的节点都是系统节点的子集。如某些航空公司在某些机场并不一定有运营的航班, 但是其包含的节点一定是航空网络中所有节点(机场)的子集。类似地, 多层网络中的同一节点可在不同网络层中扮演不同角色, 如在交通网络中, 一个城市可能同时是航空网络、铁路网络和公路网络的交通枢纽^[18]。在这种情况下, 同一个节点的不同角色互为副本节点, 类似的情况还存在于社交网络中^[19-21]。

文献 [3] 于 2010 年提出了双层相依网络上的渗流模型, 用于研究网络之间的相互依赖性对于级联故障和网络鲁棒性的影响。在相依网络中, 一旦某个节点被删除或者失效, 与其互相依赖的其他网络中的节点就会完全失效。这是一种非常强的依赖关系, 在这种情况下, 相依网络和共享同一节点集的多层网络等价。研究发现, 双层相依网络上的渗流模型为一阶不连续相变, 这与单层网络上的二阶连续相变有着本质的不同。该结论证明了网络的相互依赖性不但极大地降低了网络鲁棒性, 而且影响了网络的破碎方式。更令人惊讶的是, 当相依网络的度分布的异质性增强时, 相依网络对随机故障的脆弱性也会增强, 如两个具有幂律度分布的相依无标度网络会比两个相依随机网络在随机攻击下更加脆弱, 这与单个网络的情况完全相反(单个无标度网络对于随机攻击的鲁棒性是非常高的)。从统计物理学的角度来看, 多层相依网络上的一阶不连续

相变本质上为混合相变 (hybrid percolation), 即在网络发生渗流相变的临界点, 网络巨分支规模既存在二阶连续相变所具备的临界现象, 也存在一阶相变的不连续跳跃现象。系统的序参量 (互联巨分支规模 S) 与节点的保留概率 p 存在渐近关系 $S - S_c \propto (p - p_c)^{1/2}$, 其中 p_c 为网络发生渗流相变的临界点。这与单层网络中 k 核渗流^[22]、靴攀渗流^[23]、关节节点渗流^[24] 及核渗流^[25] 中的混合相变完全相同^[26]。

以上研究是基于网络节点的强依赖假设, 即多层网络中相互依赖的一组节点, 其中一个失效时, 其余也立即失效。这种点对点的强相互依赖还被推广到单层网络中, 用于描述节点之间的隐含依赖性^[27-33]。强依赖虽然能够刻画一些现实系统之间的节点耦合机制, 但在某些情况下网络中某个节点的失效可能不会导致其他网络中与之依赖的节点完全失效, 而是造成一定程度的损害, 从这个角度来说弱耦合机制更能够描述复杂系统之间更为一般的耦合和联系。在弱依赖的情形下, 多层网络的性质与强依赖的情况有明显的不同。首先, 网络与网络之间耦合拓扑结构会对网络的级联失效动力学有着强烈的影响。而对于强耦合的多层网络中的一组相依节点, 一旦其中一个节点失效, 其余节点也就完全失效, 它们之间的依赖结构不会对系统有显著影响。此外, 弱依赖多层网络模型能够描述复杂系统更为丰富的耦合机制, 如依赖强度的异质性^[34]、依赖强度的非对称性^[35] 及依赖关系的拓扑结构^[36] 等。在弱依赖的情况下, 多层网络在级联失效过程中会表现出更为丰富的相变现象。

多层网络的研究已经吸引了物理学、数学、信息科学、管理学和计算机等多学科交叉领域学者的广泛关注。经过十多年的发展, 多层网络级联失效已在理论建模、实证分析和应用研究方面取得非常丰富的成果, 国内相关学者已经在概念模型^[37]、功能与动力学^[38-39]、鲁棒性优化^[40] 和级联失效的预防^[41] 等方面进行了较为系统的综述。在多层网络的研究中, 渗流理论扮演了非常重要的角色。为了介绍渗流理论对多层网络模型的作用和相关进展, 本文聚焦基于渗流理论的相依多层网络上的级联失效。首先介绍描述相依多层网络级联失效的理论模型, 再分别介绍多层网络跨层节点耦合特性、网络层内连接结构特征、层内节点耦合特性、攻击方式等几个方面的特征对鲁棒性和级联失效动力学的作用, 然后介绍具有弱耦合机制的多层网络上的级联失效动力学的特性, 最后进行总结并展望未来可能的研究

问题和相关方向。

1 理论模型

多层网络模型始于相依双层网络级联失效模型的研究^[3]。随后人们将双层相依网络推广到了 M 个网络，因此双层相依网络是多层网络的一个特例^[42-43]。这 M 个网络都具有 N 个节点，将这 M 个网络标记为 A, B, \dots ，每个网络中的 N 个节点按照自然数编号为 $1, 2, \dots, N$ 。不同网络中具有相同自然数编号的节点具有相互依赖性。第一个网络中的某个节点 A_i ，第二个网络中节点 B_i 等 M 个网络中的 M 个节点之间存在相互依赖性。对于互相依赖的一组节点，如果其中一个节点失效，其余所有节点就会立即失效。这 M 个网络中任意一个网络 X 都可以拥有独立或相关联的拓扑结构。

多层网络的级联失效由随机删除网络 A 中比例为 $1-p$ 的节点触发，其中 p 表示保留节点的比例。由于不同网络中节点之间的互相依赖性，网络 A 中的一个节点删除会导致其余 $M-1$ 个网络中依赖于该节点的节点也立即失效。当一个节点失效时，其所有边也将会被删除。各层网络中一部分节点失效后，会破碎成一些规模不等的分支，这些分支被称为分支集群。如果一些节点和它们所依赖的节点在各自所在的网络层中都能形成同一个分支，则这样的分支被称为互连分支。但是，由于网络连接方式的差异性，某个网络中的一个分支中的节点在另一个网络中所依赖的节点并不一定能够形成同一个分支。因此，不能形成互连分支的节点将会被删除，从而诱发网络的进一步破碎，进而形成一个级联失效的过程。经过一定步数的迭代，网络最终会达到一个稳态。

图 1 展示了相依网络级联失效示意图。在图 1a 中，级联失效由初始失效的 A_3 节点触发；在图 1b 中， A 网络破碎成两个分支 $\{A_1, A_2\}$ 和 $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ ， B 网络破碎成 3 个分支 $\{B_1, B_2\}$ ， $\{B_4\}$ 和 $\{B_5, B_6, B_7\}$ ，由于 $\{A_1, A_2\}$ 和 $\{B_1, B_2\}$ 分支在网络 A 和 B 中同时存在，构成一个互连分支集群。同时由于 $\{B_4\}$ 分支独立，将会导致节点 A_4 的连接被删除，导致网络 A 分支 $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ 进一步破碎为 $\{A_4\}$ ， $\{A_5\}$ 和 $\{A_6, A_7\}$ 。在图 1c 中， $\{A_5\}$ 为独立分支，将会导致 B_5 节点的连接被删除。在图 1d 中，网络 B 进一步发生破碎，最终又会导致 A_6 和 A_7 之间的连接被删除，并达到 AB 两个网络中的互连分支都一致的稳态。

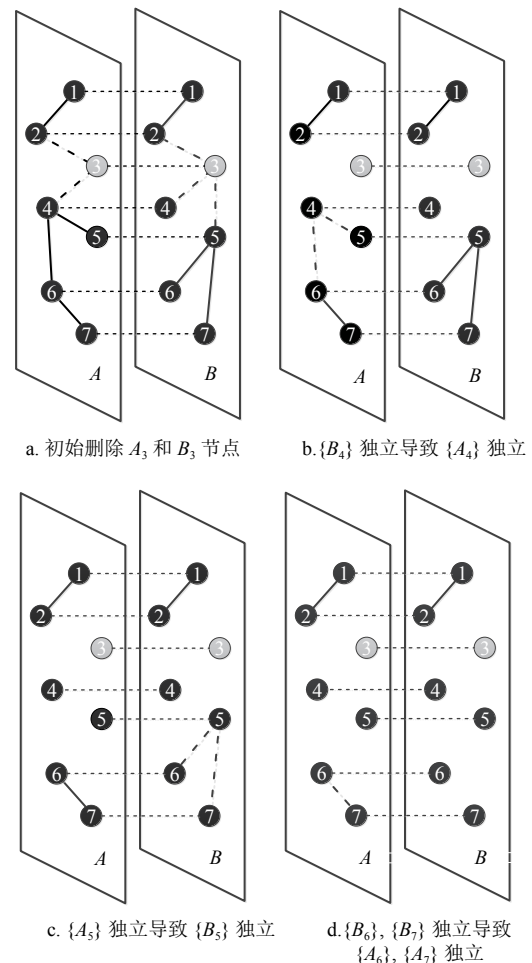


图 1 双层相依网络级联失效示意图

在达到稳态的时候，只有网络互连巨分支中的节点才能保存下来，用互连巨分支的规模 S 来度量网络的鲁棒性。理论和数值模拟研究的结果发现，如果保留节点的比例大于一个临界值 p_c ，在级联故障过程结束时，网络的互连巨分支就能够存在，即 $S > 0$ ，相依网络的功能就能保留下来；反之如果 $p < p_c$ ，互连巨分支就不存在，网络会破碎成非常小的碎片。

多层网络上的级联失效的临界点可用概率生成函数的方法来求解。定义 R^X 为网络 X 中的一条随机边能够连接到稳态时互连巨分支的概率，其中 $X \in \{A, B, \dots\}$ 。同时定义 $G_0^X(x) = \sum p_k^X x^k$ 为网络 X 的度分布的生成函数， $G_1^X(x) = \sum p_k^X k / \langle k \rangle x^{k-1}$ 为网络 X 的余度分布的生成函数，其中 p_k^X 为网络 X 的度分布。当网络 X 中的一条随机边能够连接到巨分支时，在沿着这条随机边所到达的一个节点的其余边中，需要至少有一条能够连接到网络的巨分支。这条随机边所到达节点的度值 k 服从概率分布

$p_k^X k / \langle k \rangle$, 因此网络 X 中的一条随机边能够连接到巨分支的概率为 $1 - \sum_k p_k^X k / \langle k \rangle (1 - R^X)^{k-1}$, 写成生成函数的形式为 $1 - G_1^X(1 - R^X)$ 。类似地, 对于度为 k 的节点, 属于互连巨分支则需要所有 k 条边中至少有一条能够通向互连巨分支, 其概率可以表示为 $1 - (1 - R^X)^k$ 。考虑网络度分布 p_k^X , 一个随机节点属于网络 X 巨分支的概率为 $1 - \sum_k p_k^X (1 - R^X)^k$, 写成生成函数的形式为 $1 - G_0^X(1 - R^X)$ 。因此, 对于任意一个 R^X 满足方程:

$$R^X = p \left[1 - G_1^X(1 - R^X) \right] \prod_{Y \neq X} \left[1 - G_0^Y(1 - R^Y) \right] \equiv \psi^X \quad (1)$$

网络互联巨分支的规模 S 可以写成:

$$S^X = p \prod_{X \in A, B, \dots} \left[1 - G_0^X(1 - R^X) \right] \quad (2)$$

随着节点保留比例 p 的变化, 当 ψ^X 首次与 R^X 相等的时候, 系统将发生渗流相变。考虑系统中所有的网络, 系统发生渗流相变的临界点可由如下方程组给出:

$$\det[\mathbf{J} - \mathbf{I}] = 0 \quad (3)$$

式中, \mathbf{I} 为单位矩阵; \mathbf{J} 表示雅克比矩阵, 其元素 $J_{AB} = \partial \psi^A / \partial R^B$ 。在临界点将 ψ^X 展开, 在式 (1) 和式 (2) 被同时满足的情况下可得:

$$S - S_c \propto R^X - R_c^X \propto (p - p_c)^{1/2} \quad (4)$$

这一结果表明多层网络上的不连续相变为混合相变, 同时具备二阶相变的临界特性也具有一阶不连续相变的跳跃^[44]。这与 k 核渗流、靴攀渗流、核渗流和关节节点渗流中的混合相变的类型完全相同。文献 [24,45] 的研究也说明, 这种混合相变只存在于级联失效的稳态中, 如果强行使级联过程在任何有限次停止, 都只能观察到与经典渗流一样的临界现象。文献 [46] 研究了具备动力学过程的多层网络上的鲁棒性, 发现不连续相变在耦合动力学系统上仍然存在。

代入网络的度分布, 可通过式 (1) 和式 (2) 求出网络的渗流相变点 p_c 和网络巨分支的大小 S 。有关多层网络模型的概率生成函数求解的方法, 文献 [26,42] 已经进行了综述。对于单个网络的情况下, 网络度分布的异质性越强, 其渗流临界值 p_c 就越小。与此相反的是, 相互依赖的网络度分布的异质性越强, 网络的临界值 p_c 就会越大。这说明在平均度相同的情况下, 度分布异质性较强的多层

网络更脆弱, 这一结果与单层网络的情况截然相反。

多层网络中这种不连续相变的产生机理可由多层网络中的“临界节点”来解释。临界节点被定义为满足如下两个条件的节点: 1) 其自身或其任意依赖节点有且只有一条边能够连接到所在网络的巨分支, 这条边被称为临界边; 2) 其自身和其所有依赖节点都能够连接到它们所在网络的巨分支。这条临界边至关重要, 一旦它所连接的邻居被删除, 临界节点和它的依赖节点都会被删除。在此失效传播过程中, 这条边具有指向性, 从临界节点的一个邻居指向该临界节点。当临界节点通过这些临界边能够连接在一起的时候, 就形成了一个“临界分支”。一旦其中一个临界节点被删除, 雪崩就会沿着一定方向在临界分支中传播, 处在临界分支最顶端的节点被称为“基石节点”, 它的删除会导致整个临界分支的崩溃。当 p 从大至小接近临界点时, 临界分支的发散会导致网络巨分支的不连续跳跃^[44]。

2 跨层节点耦合特性

一些真实复杂系统中可能存在一些不依赖其他任何节点的“自治节点”, 一个网络中的某个节点也可能依赖于另一个网络中的多个节点。此外, 网络间的依赖性不但有双向的, 还有单向的。围绕双向依赖或单向依赖、一对一依赖或一对多依赖的问题, 已涌现出许多研究成果。文献 [48] 研究了一个由两个相互依赖的网络 A 和 B 组成的系统, 其中网络 A 中的一部分节点 q^A 依赖于网络 B 中的节点, 同时网络 B 中的一部分节点 q^B 依赖于网络 A 中的节点。与多层网络的原始模型相同, 一个网络中的一个节点最多只有一条有向的依赖边。因此参数 q^A 、 q^B 或 $q^A = q^B = q$ 控制着网络间的依赖强度, 这一方法在后续的研究中被广泛借鉴^[49-52]。当一个网络中的节点发生故障时, 它们会导致另一个网络中依赖于它们的节点也发生故障。当临界占据概率 p 达到临界点 p_c 时, 稳态渗流巨分支就能够出现。理论分析和数值模拟显示, 降低网络之间耦合节点的比例 q^A 和 q^B 会导致网络的相变形式在一个临界点处从一阶渗流相变转变到二阶渗流相变^[48]。另外出于保护中心节点的目的, 将其设置为“自治节点”可以有效提升网络的鲁棒性^[50-51]。

文献 [53] 研究了一对多的有向依赖的多层网络模型, 发现当网络之间的依赖边平均度趋向于无限或存在自治节点时, 网络稳态的巨分支以连续相变的形式涌现, 而在其他情况下, 网络巨分支以不

连续相变的形式涌现。文献 [54] 研究了非对称依赖的相依网络模型, 即 A 网络中的节点对 B 网络中的节点是一对多的双向依赖, 而 B 网络中的节点对 A 网络是一对一的双向依赖。在这种情况下, 网络 A 在随着保留节点 p 的变化会出现多重相变现象, 即网络巨分支首先以二阶连续相变的形式涌现, 随后会再发生一次一阶不连续相变, 而网络 B 的巨分支以一阶不连续相变的形式涌现。在部分节点存在耦合的情况下, 多层网络的每个网络层都在其他网络中随机选择一定数量的节点作为相互依赖的节点时, 系统随着攻击强度的增大会出现多重相变的现象, 即会发生多次崩溃^[49]。此外, 文献 [55] 基于依赖边在描述节点跨网络耦合时连接和依赖的双重作用, 研究了双层相依网络多对多依赖时的鲁棒性, 发现增加网络之间的耦合边密度时会增加网络的部分连通性, 导致部分网络的鲁棒性增强。

真实网络之间的互相依赖关系不是随机的, 而是根据节点的某些特性进行耦合的。跨层相依节点的度相关性也受到广泛关注, 即在正相关的时候, 一个网络中度值大(小)的节点更容易依赖于另一个网络中度值大(小)的节点, 反之则是负相关。如度值较大的港口往往与具有较多航班的机场之间存在较为紧密的耦合。文献 [56] 研究了网间度相关性对相依网络鲁棒性的影响, 发现当两个网络之间依赖节点相似性较强时, 系统在面对随机故障时就会变得更加稳健。类似地, 文献 [57] 的研究结果表明相同度值节点的耦合使得网络的鲁棒性会变得更强。同样, 当从两个网络挑选度值最大的部分节点进行耦合匹配时^[58-59], 或降低互相依赖节点的不平衡性时^[60], 网络的鲁棒性也可以显著提高。另外, 在网络存在模块度^[61]、依赖簇^[62]时, 跨网络节点的正相关耦合对网络鲁棒性仍有较强的促进作用。文献 [63] 借助于 Bak-Tang-Wiesenfeld 沙堆模型, 发现节点连接度的无标度分布, 层内同配性和跨网络中心节点之间的耦合可以显著提升网络的鲁棒性。文献 [64] 研究了多层网络上的键渗流模型, 发现当多层网络中某一层网络与其他网络层节点耦合方式为反相关时, 多层网络上的键渗流存在多重相变的现象, 即会发生多次相变, 相变的次数与网络的层数有关。随后文献 [65] 发现在多层网络鲁棒性优化的过程中, 增强度相关性虽然可以提高网络破碎时的攻击阈值, 但是也在网络破碎的过程中引入了多重不连续相变的现象。

重叠边在多层网络中也是常见的。如在社交网络中, 两个朋友通过电子邮件和电话两种途径进行通信的现象很常见; 在交通网络中, 通过公路连接的两个城市也可能通过铁路或航班连接。文献 [66-67] 几乎同时研究了连接的重叠性对于相依网络鲁棒性的影响, 重叠边的存在也能有效促进多层网络鲁棒性的提升。对这种现象的一个直观解释是, 重叠边的存在减弱了两个相依网络巨分支节点分布的随机性, 导致网络的互联巨分支更容易涌现。

真实多层网络并不是单层网络的随机组合, 网络层间的耦合会存在一些空间相关性^[68-70]。这种空间相关性可以有效提升网络鲁棒性, 使网络在遭受蓄意攻击时可能会以连续相变的形式崩溃^[71]。文献 [72] 研究了双层相依规则网格上的渗流, 在模型中, 互相依赖的两个节点的最大距离被限制在 r 之内, 当 $r < r_{\max} \approx 8$ 时, 相依网络的破碎形式为二阶连续相变, 而其他情况, 网络的破碎形式为一阶不连续相变。当 $r < r_{\max}$ 时, 网络的渗流相变点 p_c 从 0.593~0.738 之间随着 r 的增大而线性增大, 之后随着 r 趋向于无穷大逐渐降低至 0.683。类似地, 文献 [73] 把双层相依规则网格上的渗流推广到了 n 层, 他们发现系统从二阶相变到一阶相变的临界点 r_{\max} 会随着网络数量 n 的增大而迅速降低, 当 $n \geq 11$ 时, r_{\max} 会减少至其最低值 1。此外, 当网络之间的依赖形成闭合的环时, 相依规则随机网络的鲁棒性在依赖强度 $q > q_{\max}$ 时是非常差的, 删除一个节点就会导致整个系统的崩溃, q_{\max} 会随着随机规则网络平均度的降低而降低。这些结果说明相依节点之间的距离对于网络的鲁棒性和破碎形式起着非常重要的作用。当取消节点跨层依赖距离的限制时(相依节点随机连接), 相依规则网络就非常脆弱, 只要跨层耦合节点的比例 $q \neq 0$ 时, 系统就会发生一阶不连续相变的现象。

文献 [74] 提出了一种冗余渗流模型, 该模型假设一个节点能够保持功能的条件是至少还有另外一个相依节点能够在其他网络层中保持功能^[74-75]。当层数等于 2 时, 该模型简化为文献 [3] 中最初的相依网络模型。该模型描述了向多层网络中添加新层可以增强系统的稳健性, 这一情况与网络的网络中随着网络数的增加系统的鲁棒性降低的情况相反^[42-43]。

3 网络层内连接结构特征

自从多层网络的模型被提出以后, 一些网络性

质, 如簇系数、同配性、模块度、有向性和空间嵌入特性等, 对于网络鲁棒性和级联失效动力学的影响也得到了广泛关注。这些研究对于理解真实复杂系统的一些结构特性对于鲁棒性的影响有重要的意义。

文献 [76] 研究了网络的簇结构对于相依多层网络鲁棒性的影响, 发现簇结构能够导致网络的鲁棒性的降低, 表现为网络渗流相变临界点 p_c 的显著增大。文献 [52] 通过两种方式来调节网络的簇系数, 第一种是保证网络平均度的不变的情况下改变网络的簇系数; 第二种方法是保证网络度分布不变来调整网络的簇系数, 并研究了两种簇系数的调整方式对部分节点存在依赖的多层网络鲁棒性的影响, 同样发现簇系数的增加能够降低网络的鲁棒性并增加网络的渗流阈值。随着依赖节点比例的降低, 簇系数对网络鲁棒性的影响会逐渐下降。同时, 网络从一阶相变到二阶相变的临界点 q_c 也会随着簇系数的增加而增大。类似的发现可以在支持-依赖的双层网络中发现, 即降低网络间的耦合或网络的簇系数都可以增加网络的鲁棒性^[77]。

文献 [78] 研究了多层有向网络上的级联失效。双层相依有向随机网络的崩溃过程分为两个阶段, 即网络巨分支以连续相变的形式涌现, 随后再发生一次不连续相变。同时也发现, 当网络度分布异质性较强时, 网络层内的出度和入度的相关性可以增强相依网络的鲁棒性, 而网络度分布异质性较弱而网络间耦合强度较强时, 网络层内的出度和入度的相关性可以减弱相依网络的鲁棒性。对于多个有向网络的耦合, 随着网络保留节点比例 p 变化, 网络在破碎时可能会表现为二阶相变、多重相变(先发生二级相变, 然后再次发生一阶相变)、一阶相变以及不稳定崩溃(在 $p=1$ 时, 系统仍处于崩溃状态)等几种不同的形式。崩溃的形式取决于网络之间耦合节点比例 q 的大小^[79]。

网络社团结构对于多层网络的鲁棒性的作用也受到关注, 文献 [80] 发现一个多层网络的鲁棒性可以通过调整不同网络层社团结构之间的相关性来控制。文献 [81] 发现当网络的社团结构特征增强时, 相互依赖的网络会更脆弱, 这一结果与单一网络的情况相反。当一个网络层的社团结构非常强且社团间的连接非常稀疏时, 另一层网络社团强度的微小变化会引起整个系统鲁棒性的突变。文献 [82] 研究了具有社团结构的网络的鲁棒性, 他们发现跨社团的连接边在影响网络鲁棒性的同时, 还扮演着

类似于铁磁-顺磁自旋系统中外场的作用。

文献 [83] 发现存在阶层结构的相依网络在受到攻击时会出现多重相变的现象, 网络的鲁棒性与每个阶层中的社团数, 阶层的连接度和网络间的依赖强度有关。具有模块度的多层网络在遭受攻击时也会发生双重相变的现象, 其中一个相变发生在模块分离的地方, 另一个相变发生在各个模块崩溃的时候。两个相变的类型取决于多层网络之间的依赖强度和依赖的结构^[84]。

4 层内节点耦合特性

理解多层网络上的 k 核渗流对于研究网络上的传播动力学十分重要, 如识别有影响力的传播者和理解网络局部化现象。文献 [85] 研究了多层网络上的 $k \equiv (k^A, k^B, \dots, k^M)$ 核渗流, 多层网络上的 k 核巨分支比单个网络 A 上 k^A 核巨分支更难出现。对于双层网络 A 和 B , 单个网络 k^A+k^B 核的渗流阈值比相应的多层网络中的 (k^A, k^B) 核的渗流阈值更高。文献 [86] 通过调整节点对邻居局域依赖阈值 k 和网络间的耦合节点比例 q , 发现节点保留概率 p 增大时, 网络可能会出现二阶相变、多重相变和一阶相变。文献 [87] 研究了真实多层网络层间的关联性(如度关联、节点相似性等)与多层网络 k 核大小的关系。在网络度分布的异质性较强时, 正的度度相关性与网络中强 k 核结构有很强的关联性。如果网络度分布均匀时, 节点相似性水平上的正相关与网络中强 k 核结构有较强的相关性。类似地, 对于跨层节点存在度相关的多层网络的度度相关性会导致多层网络的 k 核巨分支更容易涌现^[88]。这些研究为真实多层网络 k 核结构的识别和预测提供了理论基础^[89]。

文献 [90] 研究了多层网络上的核渗流, 反复删除每层网络上度值为 1 的叶节点及其最近邻节点, 发现多层网络上的核渗流具有一阶不连续相变的特性, 这与单层网络上核渗流的连续相变有着本质的不同。文献 [91] 将叶节点的定义推广到度值小于 k 的节点, 并通过反复删除度值小于 k 的叶节点及其最近邻节点的剪枝过程来研究多层网络上的核渗流, 这一模型被用于真实多层网络的分解。

5 攻击方式

文献 [92-93] 研究了多层网络在蓄意攻击下的鲁棒性, 当度值较大的节点有较大的概率被攻击时, 网络的鲁棒性会显著下降。同时当度大的节点

受到保护, 被攻击概率降低时, 多层网络的渗流阈值并不能降低至 0, 这说明保护度值较大的节点不能阻止网络的崩溃, 这一结果与单层网络有着本质的不同。文献 [94-95] 研究了网络的鲁棒性, 同样发现蓄意攻击能够使相依网络和多层网络的鲁棒性降低。蓄意攻击可以让多层网络崩溃的更加迅速, 探讨多层网络在蓄意攻击下的鲁棒性的极限是一个重要问题。因此, 如何找到能够迅速破坏多层网络的最小节点集是一个计算代价高昂同时难以优化的问题。文献 [96] 提出了多层网络有效度的指标作为蓄意攻击目标节点的选择依据, 该策略考虑了多层网络中节点的删除所带来的间接损伤, 从而获得了一个比现有的非计算密集型算法所得到的更小的初始攻击目标节点集。

局域攻击策略^[97-99]是一种在现实中广泛存在的攻击策略, 在多层网络鲁棒性的研究中也受到了广泛关注^[100-101]。文献 [102] 研究了局域攻击下空间耦合网络上的级联失效动力学, 他们发现当局域攻击大于临界尺寸时, 级联故障会扩散到整个系统, 导致系统崩溃。此外, 局域攻击和随机攻击对不同度分布的相依网络的破坏性也在文献 [103] 中有对比研究, 不同组合攻击策略在相依网络的研究中也受到关注^[104]。

6 弱依赖多层网络上的级联失效

在前文所述的多层网络模型中, 一个节点的失效会导致其依赖节点完全失效, 这是一种点对点的强依赖。这一假设虽然能够刻画一些现实系统之间的节点耦合机制, 如因特网中的节点对电力网络中节点的依赖。但是在存在缓冲或应急机制的情况下, 这一假设就会显得过于简单而直接, 如一些基础设施的节点可能存在备用电源, 当电网故障时, 它可能会因电力供应的减少而维持部分主要功能; 类似地, 在经济社会中, 金融网络和企业间的贸易网络存在依赖性, 金融机构通过向企业借贷而获得利息和收益, 而企业依靠金融网络提供资金流来维持运作, 当企业倒闭时, 可能会对金融机构造成影响, 而金融机构的倒闭也可能对企业造成冲击。由于风险的分散, 这种冲击可能不会非常强, 一个企业倒闭可能不会造成与之相互依赖的金融机构的完全破产, 反之亦然。因此, 存在弱依赖节点的多层网络更具有一般性^[105]。

为了描述这种弱耦合机制, 文献 [105] 提出了一种点对边的相互作用机制。当一个节点失效的

时候, 其依赖节点的部分功能会受到损害而失去一些连接。具体而言, 假如 A 网络中的一个节点 A_i 依赖于 B 网络的节点 B_j , 如果节点 A_i 失效, 节点 B_j 的每一条边都有 $1-\alpha$ 的概率被删除 (α 的概率保留), 反之亦然。当 $\alpha=1$ 时, 网络之间的依赖性最弱, 而当 $\alpha=0$ 时, 网络的依赖性最强, 此时等价于强依赖的多层网络。当某个网络层 X 中的一部分节点失效时, 与这些失效节点有依赖性的节点就会受到影响而损失一些边, 从而导致它们所在的网络破碎, 使某些节点脱离网络而失效。这些失效的节点又会导致其他网络层 (包括 X) 中相互依赖的节点受到损害。在这种依赖失效和破碎失效的交替作用下, 级联失效随之产生。当网络到达稳态时, 用每个网络层中存活节点的比例来评估网络的鲁棒性。

图 2 给出了双层相依网络的级联失效示意图。在图 2a 中, 级联失效由初始失效的 A_3 和 B_3 节点触发, 导致网络 A 和 B 的同时破碎。在图 2b 中, B 网络中的 B_4 节点因脱离巨分支而失效, 进而会对 A 网络中的 A_4 节点造成损害而损失一条边, 进一步导致 A_5 节点的失效。在图 2c 中, A 网络中的 A_5 节点的失效会对 B 网络中的 B_5 节点造成损害而损失一条边。进而导致 B_7 节点的失效。在图 2d 中, B 网络中 B_7 失效后对网络 A 中的 A_7 造成影响, 由于这种影响以一定概率发生而未造成实际损害, 此时网络达到稳态。

在弱依赖的情况下, 一些互相依赖的复杂系统可能通过它们之间的联系而具有某种结构。有一些复杂系统依赖的系统较多, 而另外一些系统所依赖的系统较少。即不同系统的“超级度”存在差异。对于超级度不同的网络层, 它们的渗流阈值和渗流相变的类型也不相同。网络层的超级度越大, 其渗流阈值就越大, 鲁棒性也就越差。同时, 一些超级度较大的网络层在渗流时可能表现为一阶不连续相变, 而一些超级度较小的网络层的渗流相变类型为二阶连续相变, 在超级度较大的网络发生渗流时, 会导致其已经发生渗流的最近邻网络再次发生相变, 从而导致系统中出现多重相变现象^[106]。

多层网络的雪崩过程本质上可以分解为两个微观动力学过程: 深度渗透 (层间级联) 和广度扩展 (层内级联)。在深度渗透的过程中, 失效在跨层传播过程中能够逐步放大。在这些跨层耦合的节点中, 一个节点的失效会引起另外一个甚至更多节点的失效, 失效的节点越多, 对剩余节点产生的破坏

力就越大。在范围扩展的过程中, 故障会随着各网络层中连接的移除而在各层网络的内部传播。在两个过程的协同作用下, 整个多层网络会逐渐走向崩溃, 同时系统渗流相变的类型会随着网络耦合强度的下降从一阶不连续相变转变为二阶连续相变, 这意味着层间的级联过程控制着层内的级联过程, 并且对整个系统的鲁棒性有着较强的控制力^[107]。

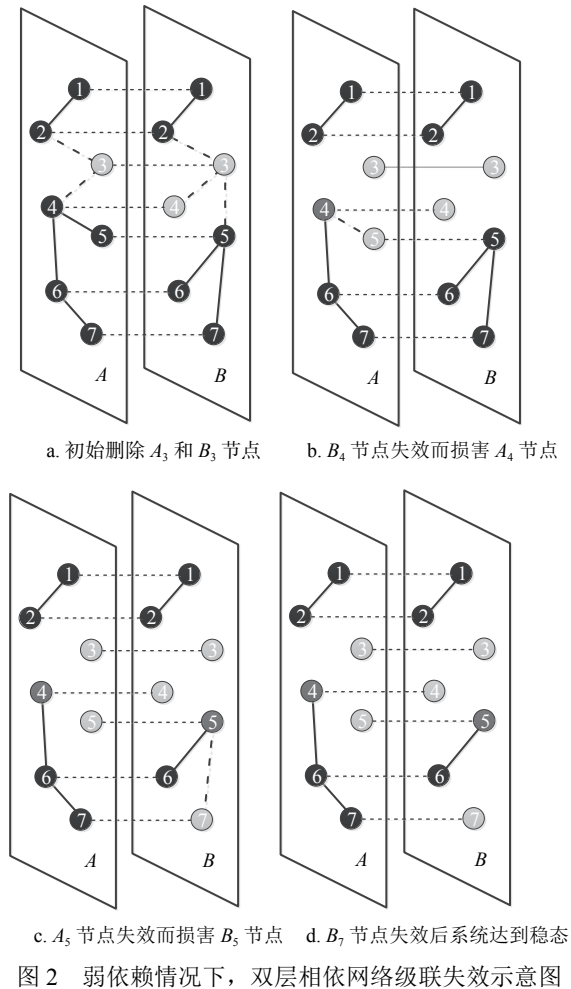


图2 弱依赖情况下, 双层相依网络级联失效示意图

弱依赖机制的引入使得多层网络模型能够较为自然地使用非对称依赖的概念, 这一特点在现实中也广泛存在。对于互相依赖网络中的两个节点, 一个重要的节点对次要的节点的依赖强度可能会不等于次要的节点对重要的节点的依赖强度。文献 [35] 研究了节点与节点的非对称依赖对于网络鲁棒性的影响, 当调整跨网络节点依赖强度的时候, 网络发生渗流相变的类型也能够从一阶相变转变为二阶相变。文献 [108] 研究了具有派系的弱依赖相依网络上的级联失效, 网络在从不连续相变到连续相变的过程中呈现出混合相变现象: 具有派系大的层发生连续渗流相变, 具有派系小的层发生不连续渗流相变。

7 结束语

多层网络上的级联失效是复杂网络动力学研究的重要问题。这一问题的研究与网络科学诸多细分领域共同推动了多层网络动力学研究的发展, 如多层网络的同步^[38, 109-116]、多层网络上的信息传播^[117-120]、疾病传播^[121-129]和免疫^[130-133]、多层网络上演化博弈^[134-139]和交通流^[7-8, 17]等。本文综述了多层网络渗流的基础理论和级联失效动力学研究, 包含跨层节点的耦合特性、网络层内连接结构特征、层内节点耦合特性和攻击方式等几个方面的研究。这些研究成果的推广不但丰富了人们对多层网络鲁棒性和级联失效动力学的认识, 为多层网络级联失效的预防^[41, 140-141]和鲁棒性的提升^[40, 142]等方面的应用研究提供了理论支撑, 同时为多层网络其他动力学的研究提供了借鉴。

在当前信息和人工智能飞速发展的今天, 基础设施系统的资源能够得到及时有效的调度, 从而实现系统容量的最优化和负荷的最大化, 如在交通网络中, 交通流可以通过实时大数据和智能算法实现最高效率的流转, 任意一个系统和环节发生故障就会引起整个系统的功能受到较大的损失。在这样的背景下, 多层网络之间的相互作用机理也变得越来越复杂, 因此对多层网络耦合机理进行实证调研并进一步建模将是未来一个重要且具有挑战性的问题。其次, 真实的多层网络系统十分复杂, 一些大系统中还存在一些子系统, 在各个系统之间存在不同层次的相互作用, 如节点与节点存在耦合、子系统与子系统也存在耦合、相互作用的层次性对于多层网络级联失效动力学的影响也需要进一步考虑。此外, 由于真实多层网络各个子系统的功能是互相配合的, 节点之间的相互依赖性也是动态的, 调研各个系统节点功能的时间相关性以及耦合结构的时间特性也是一个非常值得关注的问题。最后, 多层网络研究的发展需要在理论方法上有更进一步的突破, 深挖和拓展现有理论及研究方法以解决以上问题也具有非常大的挑战。

本文研究工作还得到高层次留学回国人员在杭创业创新项目的资助, 在此表示感谢。

参考文献

- [1] RINALDI S M, PEERENBOOM J P, KELLY T K. Identifying, understanding, and analyzing critical infrastructure interdependencies[J]. *IEEE Control Systems*,

- 2001, 21(6): 11-25.
- [2] OUYANG M. Review on modeling and simulation of interdependent critical infrastructure systems[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2014, 121: 43-60.
- [3] BULDYREV S V, PARSHANI R, PAUL G, STANLEY H E, et al. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks[J]. *Nature (London)*, 2010, 464: 1025-1028.
- [4] CHEN Z, WU J, XIA Y, et al. Robustness of interdependent power grids and communication networks: A complex network perspective[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2018, 65(1): 115-119.
- [5] LIU X, MAIORINO E, HALU A, et al. Robustness and lethality in multilayer biological molecular networks[J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 6043.
- [6] WU J, ZHONG J, CHEN Z, et al. Optimal coupling patterns in interconnected communication networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2018, 65(8): 1109-1113.
- [7] TAN F, WU J, XIA Y, et al. Traffic congestion in interconnected complex networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89: 062813.
- [8] SHEN Y, REN G, ZHANG N, et al. Effects of mutual traffic redistribution on robustness of interdependent networks to cascading failures under fluctuant load[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2020, 560: 125138.
- [9] ZHOU S, YANG Y, THOMAS N S, et al. Integrating data-driven and physics-based approaches to characterize failures of interdependent infrastructures[J]. *International Journal of Critical Infrastructure Protection*, 2020, 31: 100391.
- [10] AZIMI-TAFRESHI N. Cooperative epidemics on multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2016, 93: 042303.
- [11] PODOBNIK B, HORVATIC D, LIPIC T, et al. The cost of attack in competing networks[J]. *Journal of The Royal Society Interface*, 2015, 12(112): 20150770.
- [12] DANZIGER M M, BONAMASSA I, BOCCALETTI S, et al. Dynamic interdependence and competition in multilayer networks[J]. *Nature Physics*, 2019, 15(2): 178.
- [13] KOTNIS B, KURI J. Percolation on networks with antagonistic and dependent interactions[J]. *Phys Rev E*, 2015, 91: 032805.
- [14] HAVLIN S, STANLEY H E, BASHAN A, et al. Percolation of interdependent network of networks[J]. *Chaos Solit Fract*, 2015, 72: 4-19.
- [15] BOCCALETTI S, BIANCONI G, CRIADO R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks[J]. *Physics Reports*, 2014, 544(1): 1-122.
- [16] GAO J, BULDYREV S V, STANLEY H E, et al. Percolation of a general network of networks[J]. *Phys Rev E*, 2013, 88: 062816.
- [17] DU W B, ZHOU X L, LORDAN O, et al. Analysis of the Chinese airline network as multi-layer networks[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2016, 89: 108-116.
- [18] WANG S, NIE S, ZHAO L, et al. A multiple perspective method for urban subway network robustness analysis[J]. *AIP Advances*, 2018, 8(7): 075219.
- [19] SZELL M, LAMBIOTTE R, THURNER S. Multirelational organization of large-scale social networks in an online world[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2010, 107: 13636-13641.
- [20] CAI M, WANG W, CUI Y, et al. Multiplex network analysis of employee performance and employee social relationships[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2018, 490: 1-12.
- [21] XIE J, MENG F, SUN J, et al. Detecting and modelling real percolation and phase transitions of information on social media[J]. *Nature Human Behaviour*, 2021, 5: 1161-1168.
- [22] DOROGOVTSSEV S N, GOLTSEV A V, MENDES J F F. k-core organization of complex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2006, 96: 040601.
- [23] BAXTER G J, DOROGOVTSSEV S N, GOLTSEV A V, et al. Bootstrap percolation on complex networks[J]. *Phys Rev E*, 2010, 82: 011103.
- [24] TIAN L, BASHAN A, SHI D N, et al. Articulation points in complex networks[J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 14223.
- [25] LIU Y Y, CSÓKA E, ZHOU H, et al. Core percolation on complex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 205703.
- [26] LI M, LIU R R, LÜ L, et al. Percolation on complex networks: Theory and application[J]. *Physics Reports*, 2021, 907: 1-68.
- [27] BASHAN A, HAVLIN S. The combined effect of connectivity and dependency links on percolation of networks[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2011, 145(3): 686-695.
- [28] PARSHANI R, BULDYREV S V, HAVLIN S. Critical effect of dependency groups on the function of networks[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2011, 108: 1007-1010.
- [29] LI M, LIU R-R, JIA C-X, et al. Critical effects of overlapping of connectivity and dependence links on percolation of networks[J]. *New Journal of Physics*, 2013, 15(9): 093013.
- [30] NIU D, YUAN X, DU M, et al. Percolation of networks with directed dependency links[J]. *Phys Rev E*, 2016, 93: 042312.
- [31] BASHAN A, PARSHANI R, HAVLIN S. Percolation in networks composed of connectivity and dependency links[J]. *Phys Rev E*, 2011, 83: 051127.
- [32] WANG Z, ZHOU D, HU Y. Group percolation in interdependent networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 97: 032306.
- [33] LIM, WANG B H. Percolation on networks with dependence links[J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(7): 076402.
- [34] KONG L W, LI M, LIU R R, et al. Percolation on networks with weak and heterogeneous dependency[J]. *Phys Rev E*, 2017, 95: 032301.
- [35] LIU R R, JIA C X, LAI Y C. Asymmetry in interdependence makes a multilayer system more robust against cascading failures[J]. *Phys Rev E*, 2019, 100:

- 052306.
- [36] CAO Y Y, LIU R R, JIA C X, et al. Percolation in multilayer complex networks with connectivity and interdependency topological structures[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 92: 105492.
- [37] 张欣. 多层复杂网络理论研究进展: 概念、理论和数据[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2015, 12: 103-107.
ZHANG X. Multilayer networks science: Concepts, theories and data[J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2015, 12: 103-107.
- [38] 陆君安. 从单层网络到多层网络——结构、动力学和功能[J]. *现代物理知识*, 2015, 27: 3-8.
LU J A. From single layer to multilayer networks - structure, dynamics, and function[J]. *Knowledge of Modern Physics*, 2015, 27: 3-8.
- [39] 吴宗柠, 狄增如, 樊瑛. 多层网络的结构与功能研究进展[J]. *电子科技大学学报*, 2021, 50(1): 106-120.
WU Z N, DI Z R, FAN Y. The structure and function of multilayer networks: Progress and prospects[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2021, 50(1): 106-120.
- [40] 王哲, 李建华, 康东, 等. 复杂网络鲁棒性增强策略研究综述[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2020, 17: 1-26, 46.
WANG Z, LI J H, KANG D, et al. Review on strategies enhancing the robustness of complex network[J]. *Complex Systems and Complexity Science*, 2020, 17: 1-26, 46.
- [41] JIANG W J, LIU R R, FAN T L, et al. Overview of precaution and recovery strategies for cascading failures in multilayer networks[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, 69: 088904.
- [42] GAO J, BULDYREV S V, STANLEY H E, et al. Robustness of a network of networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 195701.
- [43] GAO J, BULDYREV S V, STANLEY H E, et al. Networks formed from interdependent networks[J]. *Nature Physics*, 2012, 8: 40-48.
- [44] BAXTER G J, DOROGOVTSEV S N, GOLTSEV A V, et al. Avalanche collapse of interdependent networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 248701.
- [45] LI M, LÜ L, DENG Y, et al. History-dependent percolation on multiplex networks[J]. *National Science Review*, 2020, 7(8): 1296-1305.
- [46] DUAN D, LV C, SI S, et al. Universal behavior of cascading failures in interdependent networks[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2019, 116(45): 22452-22457.
- [47] FENG L, MONTEROLA C P, HU Y. The simplified self-consistent probabilities method for percolation and its application to interdependent networks[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(6): 063025.
- [48] PARSHANI R, BULDYREV S V, HAVLIN S. Interdependent networks: reducing the coupling strength leads to a change from a first to second order percolation transition[J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 048701.
- [49] BIANCONI G, DOROGOVTSEV S N. Multiple percolation transitions in a configuration model of network of networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89(6): 062814.
- [50] SCHNEIDER C M, YAZDANI N, ARAÚJO N A M, et al. Towards designing robust coupled networks[J]. *Scientific Reports*, 2013, 3: 1969.
- [51] WANG J, SUN S, WANG L, et al. Structural vulnerability analysis of partially interdependent networks: The joint influence of interdependence and local worlds[J]. *Frontiers in Physics*, 2020, 8: 499.
- [52] SHAO S, HUANG X, STANLEY H E, et al. Robustness of a partially interdependent network formed of clustered networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89: 032812.
- [53] SHAO J, BULDYREV S V, HAVLIN S, et al. Cascade of failures in coupled network systems with multiple support-dependence relations[J]. *Phys Rev E*, 2011, 83: 036116.
- [54] ZHANG H, ZHOU J, ZOU Y, et al. Asymmetric interdependent networks with multiple-dependence relation[J]. *Phys Rev E*, 2020, 101: 022314.
- [55] DONG G, CHEN Y, WANG F, et al. Robustness on interdependent networks with a multiple-to-multiple dependent relationship[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2019, 29(7): 073107.
- [56] PARSHANI R, ROZENBLAT C, IETRI D, et al. Inter-similarity between coupled networks[J]. *EPL*, 2011, 92(6): 68002.
- [57] SERGEY V B, NATHANIEL W S, GABRIEL A C. Interdependent networks with identical degrees of mutually dependent nodes[J]. *Phys Rev E*, 2011, 83: 016112.
- [58] VALDEZ L D, MACRI P A, STANLEY H E, et al. Triple point in correlated interdependent networks[J]. *Phys Rev E*, 2013, 88: 050803.
- [59] MIN B, YI S D, LEE K M, et al. Network robustness of multiplex networks with interlayer degree correlations[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89: 042811.
- [60] YANG X H, FENG W H, XIA Y, et al. Improving robustness of interdependent networks by reducing key unbalanced dependency links[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67(12): 3187-3191.
- [61] TIAN M, WANG X, DONG Z, et al. Cascading failures of interdependent modular scale-free networks with different coupling preferences[J]. *EPL*, 2015, 111(1): 18007.
- [62] WANG J, FANG H, QIN X. Cascading failures on correlated interdependent networks with dependency groups[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 530: 121355.
- [63] TURALSKA M, BURGHARDT K, ROHDEN M, et al. Cascading failures in scale-free interdependent networks[J]. *Phys Rev E*, 2019, 99: 032308.
- [64] HACKETT A, CELLAI D, GÓMEZ S, et al. Bond percolation on multiplex networks[J]. *Phys Rev X*, 2016, 6: 021002.
- [65] KRYVEN I, BIANCONI G. Enhancing the robustness of a multiplex network leads to multiple discontinuous percolation transitions[J]. *Phys Rev E*, 2019, 100: 020301.
- [66] HU Y, ZHOU D, ZHANG R, et al. Percolation of interdependent networks with intersimilarity[J]. *Phys Rev*

- E, 2013, 88: 052805.
- [67] CELLAI D, LÓPEZ E, ZHOU J, et al. Percolation in multiplex networks with overlap[J]. *Phys Rev E*, 2013, 88: 052811.
- [68] KLEINEBERG K K, BOGUNÁ M, SERRANO M Á, et al. Hidden geometric correlations in real multiplex networks[J]. *Nature Physics*, 2016, 12(1076): 1076-1081.
- [69] KORNBLUTH Y, LOWINGER S, CWILICH G, et al. Cascading failures in networks with proximate dependent nodes[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89: 032808.
- [70] XU K J, HONG C, ZHANG X H, et al. Cascades in coupled map lattices with heterogeneous distribution of perturbations[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2020, 547: 123839.
- [71] KLEINEBERG K K, BUZNA L, PAPAPOPOULOS F, et al. Geometric correlations mitigate the extreme vulnerability of multiplex networks against targeted attacks[J]. *Phys Rev Lett*, 2017, 118: 218301.
- [72] SHEKHTMAN L M, BEREZIN Y, DANZIGER M M, et al. Robustness of a network formed of spatially embedded networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 90: 012809.
- [73] BASHAN A, BEREZIN Y, BULDYREV S V, et al. The extreme vulnerability of interdependent spatially embedded networks[J]. *Nature Physics*, 2013, 9: 667-672.
- [74] RADICCHI F, BIANCONI G. Redundant interdependencies boost the robustness of multiplex networks[J]. *Phys Rev X*, 2017, 7: 011013.
- [75] TAN F, TANG M, ZOU Y, et al. Interdependent networks with redundant and dependent interconnections[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 526: 120777.
- [76] HUANG X, SHAO S, WANG H, et al. The robustness of interdependent clustered networks[J]. *EPL*, 2013, 101(1): 18002.
- [77] DONG G, TIAN L, DU R, et al. Analysis of percolation behaviors of clustered networks with partial support-dependence relations[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, 394: 370-378.
- [78] LIU X, STANLEY H E, GAO J. Breakdown of interdependent directed networks[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, 113(5): 1138-1143.
- [79] LIU X, PAN L, STANLEY H E, et al. Multiple phase transitions in networks of directed networks[J]. *Phys Rev E*, 2019, 99: 012312.
- [80] FAQEEH A, OSAT S, RADICCHI F. Characterizing the analogy between hyperbolic embedding and community structure of complex networks[J]. *Phys Rev Lett*, 2018, 121: 098301.
- [81] SUN J, ZHANG R, FENG L, et al. Extreme risk induced by communities in interdependent networks[J]. *Communications Physics*, 2019, 2(1076): 45.
- [82] DONG G, FAN J, SHEKHTMAN L M, et al. Resilience of networks with community structure behaves as if under an external field[J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2018, 115(27): 6911-6915.
- [83] SHEKHTMAN L M, HAVLIN S. Percolation of hierarchical networks and networks of networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98: 052305.
- [84] SHEKHTMAN L M, SHAI S, HAVLIN S. Resilience of networks formed of interdependent modular networks[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(12): 123007.
- [85] AZIMI-TAFRESHI N, GÓMEZ-GARDENES J, DOROGOVTSEV S N. K -core percolation on multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 90: 032816.
- [86] PANDURANGA N K, GAO J, YUAN X, et al. Generalized model for k -core percolation and interdependent networks[J]. *Phys Rev E*, 2017, 96: 032317.
- [87] OSAT S, RADICCHI F, PAPAPOPOULOS F. K -core structure of real multiplex networks[J]. *Phys Rev Research*, 2020, 2: 023176.
- [88] SHANG Y. Generalized k -core percolation on correlated and uncorrelated multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2020, 101: 042306.
- [89] SHANG Y. Percolation of attack with tunable limited knowledge[J]. *Phys Rev E*, 2021, 103: 042316.
- [90] ZHANG J, FU L, LI S, et al. Core percolation in interdependent networks[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2019, 6(4): 952-967.
- [91] AZIMI-TAFRESHI N, OSAT S, DOROGOVTSEV S N. Generalization of core percolation on complex networks[J]. *Phys Rev E*, 2019, 99: 022312.
- [92] HUANG X, GAO J, BULDYREV S V, et al. Robustness of interdependent networks under targeted attack[J]. *Phys Rev E*, 2011, 83: 065101.
- [93] CAI Q, PRATAMA M, ALAM S. Interdependency and vulnerability of multipartite networks under target node attacks[J]. *Complexity*, 2019, 2019: 2680972.
- [94] DONG G, GAO J, TIAN L, et al. Percolation of partially interdependent networks under targeted attack[J]. *Phys Rev E*, 2012, 85: 016112.
- [95] DONG G, GAO J, DU R, et al. Robustness of network of networks under targeted attack[J]. *Phys Rev E*, 2013, 87: 052804.
- [96] BAXTER G J, TIMÁR G, MENDES J F F. Targeted damage to interdependent networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98: 032307.
- [97] SHAO S, HUANG X, STANLEY H E, et al. Percolation of localized attack on complex networks[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(2): 023049.
- [98] DONG G, DU R, HAO H, et al. Modified localized attack on complex network[J]. *EPL*, 2016, 113(2): 28002.
- [99] DONG G, XIAO H, WANG F, et al. Localized attack on networks with clustering[J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(1): 013014.
- [100] GONG K, WU J J, LIU Y, et al. The effective healing strategy against localized attacks on interdependent spatially embedded networks[J]. *Complexity*, 2019, DOI: 10.1155/2019/7912857.
- [101] OUYANG M. A mathematical framework to optimize resilience of interdependent critical infrastructure systems under spatially localized attacks[J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 262(3): 1072-1084.
- [102] VAKNIN D, DANZIGER M M, HAVLIN S. Spreading

- of localized attacks in spatial multiplex networks[J]. *New Journal of Physics*, 2017, 19(7): 073037.
- [103] YUAN X, SHAO S, STANLEY H E, et al. How breadth of degree distribution influences network robustness: Comparing localized and random attacks[J]. *Phys Rev E*, 2015, 92: 032122.
- [104] LIU Y, ZHAO C, YI D, et al. Robustness of partially interdependent networks under combined attack[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2019, 29(2): 021101.
- [105] LIU R R, LI M, JIA C X. Cascading failures in coupled networks: The critical role of node-coupling strength across networks[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 35352.
- [106] LIU R R, EISENBERG D A, SEAGER T P, et al. The 'weak' interdependence of infrastructure systems produces mixed percolation transitions in multilayer networks[J]. *Scientific Reports*, 2018, 8: 2111.
- [107] JIANG W J, LIU R R, JIA C X. Depth penetration and scope extension of failures in the cascading of multilayer networks[EB/OL]. (2019-11-13). <http://arxiv.org/abs/1911.05338>.
- [108] ZANG W, JI X, LIU S, et al. Percolation on interdependent networks with cliques and weak interdependence[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2021, 566: 125612.
- [109] ROSSA F D, PECORA L, BLAHA K, et al. Symmetries and cluster synchronization in multilayer networks. *Nature Communications*, 2020, 11(1): 3179.
- [110] ZHUANG J, CAO J, TANG L, et al. Synchronization analysis for stochastic delayed multilayer network with additive couplings[J]. *IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems*, 2020, 50(11): 4807-4816.
- [111] YANG H, WANG Z, SONG Q, et al. Quasi-synchronization of multilayer heterogeneous networks with a dynamic leader[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(7): 2736-2751.
- [112] ZHANG X, TANG L, LU J. Synchronization analysis on two-layer networks of fractional order systems: Intra-layer and inter-layer synchronization[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, 2020, 67(7): 2397-2408.
- [113] WU J, LI X. Collective synchronization of kuramoto-oscillator networks[J]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2020, 20(3): 46-67.
- [114] MA C, YANG Q, WU X, et al. Cluster synchronization: From single-layer to multi-layer networks[J]. *Chaos*, 2019, 29(12): 123120.
- [115] WANG Z, ALSAADI F E, PHAM V T. Synchronization in a multilayer neuronal network: Effect of time delays[J]. *European Physical Journal-Special Topics*, 2019, 228(11): 2391-2403.
- [116] XU M M, LU J A, ZHOU J. Synchronizability and eigenvalues of two-layer star networks[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(2): 028902.
- [117] PERC M. Diffusion dynamics and information spreading in multilayer networks: An overview[J]. *European Physical Journal-Special Topics*, 2019, 228(11): 2351-2355.
- [118] YI Y, ZHANG Z, GAN C. The outbreak threshold of information diffusion over social-physical networks[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 526: 121128.
- [119] ARRUDA G F, RODRIGUES F A, MORENO Y. Fundamentals of spreading processes in single and multilayer complex networks[J]. *Physics Reports*, 2018, 756: 1-59.
- [120] HUANG Y, DAI H. Multiplex conductance and gossip based information spreading in multiplex networks[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2019, 6(3): 391-401.
- [121] WU D, TANG M, LIU Z, et al. Impact of inter-layer hopping on epidemic spreading in a multilayer network[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, 90: 105403.
- [122] WANG W, TANG M, STANLEY H E, et al. Social contagions with communication channel alternation on multiplex networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98: 062320.
- [123] WANG N N, JIN Z, WANG Y J, et al. Epidemics spreading in periodic double layer networks with dwell time[J]. *Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications*, 2020, 540: 123226.
- [124] MIN Y, HU J, WANG W, et al. Diversity of multilayer networks and its impact on collaborating epidemics[J]. *Phys Rev E*, 2014, 90: 062803.
- [125] WANG W, LIU Q H, CAI S M, et al. Suppressing disease spreading by using information diffusion on multiplex networks[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 29259.
- [126] WANG B, TANAKA G, SUZUKI H, et al. Epidemic spread on interconnected metapopulation networks[J]. *Phys Rev E*, 2014, 90: 032806.
- [127] ZHOU S, XU S, WANG L, et al. Propagation of interacting diseases on multilayer networks[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98: 012303.
- [128] WANG H, CHEN C, QU B, et al. Epidemic mitigation via awareness propagation in communication networks: The role of time scales[J]. *New Journal of Physics*, 2017, 19(7): 073039.
- [129] CHEN X, WANG R, TANG M, et al. Suppressing epidemic spreading in multiplex networks with social-support[J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(1): 013007.
- [130] JIANG J, LIANG J, ZHOU T. Modeling of epidemic spreading on multilayer networks in uncertain environments[J]. *Journal of Statistical Mechanics-Theory and Experiment*, 2019, 2019(10): 103404.
- [131] BUONO C, BRAUNSTEIN L A. Immunization strategy for epidemic spreading on multilayer networks[J]. *EPL*, 2015, 109(2): 26001.
- [132] WANG X, ALETA A, LU D, et al. Directionality reduces the impact of epidemics in multilayer networks[J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(9): 093026.
- [133] ZHAO D, WANG L, LI S, et al. Immunization of epidemics in multiplex networks[J]. *PloS One*, 2014,

- 9(11): e112018.
- [134] SU Q, WANG L, STANLEY H E. Understanding spatial public goods games on three-layer networks[J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20(10): 103030.
- [135] WANG Z, WANG L, PERC M. Degree mixing in multilayer networks impedes the evolution of cooperation[J]. *Phys Rev E*, 2014, 89: 052813.
- [136] SHEN C, CHU C, SHI L, et al. Coevolutionary resolution of the public goods dilemma in interdependent structured populations[J]. *EPL*, 2018, 124: 48003.
- [137] XIA C, LI X, WANG Z, et al. Doubly effects of information sharing on interdependent network reciprocity[J]. *New Journal of Physics*, 2018, 20: 075005.
- [138] IRANZO J, BULDU J M, AGUIRRE J. Competition among networks highlights the power of the weak[J]. *Nature Communications*, 2016, 7: 13273.
- [139] WANG Z, WANG L, SZOLNOKI A, et al. Evolutionary games on multilayer networks: A colloquium[J]. *European Physical Journal B*, 2015, 88: 124.
- [140] LIU R R, JIA C X, LAI Y C. Remote control of cascading dynamics on complex multilayer networks[J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(4): 045002.
- [141] WANG T, CHENG H, WANG X. A link addition method based on uniformity of node degree in interdependent power grids and communication networks[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2020, 560: 125112.
- [142] YUAN X, HU Y, STANLEY H E, et al. Eradicating catastrophic collapse in interdependent networks via reinforced nodes[J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 2017, 114(13): 3311-3315.

编辑 蒋晓