

• 量子信息专栏 •

从黑盒子到因果律：寻找量子物理的信息原理



陈怡颖，王子竹*

(电子科技大学基础与前沿研究院 成都 611731)

【摘要】自 20 世纪初期量子物理诞生以来，对它物理意义的争论就没有停止过。这种现象出现的一部分原因是量子物理的理论框架更多的是对其背后数学空间的描述，而并未向人们揭示数学描述背后的物理原理。近些年来，随着量子信息的发展与量子技术的逐渐成熟，量子物理在信息处理等方面展现出超越经典系统的优越性。在量子信息中，基于器件无关思想的黑盒模型成为了探索量子物理背后逻辑的重要工具，黑盒模型作为一种只考虑实验室输入输出信息的抽象概念，具有不受限于特定理论表达的特点。寻找量子物理的信息原理之路大致有两条岔道：一方面，对黑盒内部物理原理与机制的研究产生了广义概率论。广义概率论中的黑盒内部可能遵守经典概率论、量子理论甚至是超越量子理论的未知物理理论，但黑盒之间总是存在全局的因果关系。另一方面，如果确定黑盒内部的运行原理可以用经典或量子理论描述，但并不假设不同的黑盒之间遵守确定的因果关系，则可以得到遵守经典或量子理论的数学描述，却并不能用全局确定因果关系来解释的现象。纵观对量子物理的信息原理的探索，可以看出用符合物理直觉的原理重构量子理论并不是一件容易的事。厘清量子物理背后的逻辑也许既需要对黑盒内部的运行机理有准确的刻画，又要对黑盒输入输出组合的因果关系有新的理解。

关键词 器件无关原理；量子基础理论；广义概率论；不确定因果结构

中图分类号 O4-1 **文献标志码** A **doi**:10.12178/1001-0548.2022104

From Black Boxes to Causal Orders: The Quest for Information-Theoretical Principles of Quantum Physics

CHEN Yiying and WANG Zizhu*

(Institute of Fundamental and Frontier Sciences, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract Arguments about the interpretation and meaning of quantum theory have persisted since its birth in the early 20th century to the present day. The difficulty of agreeing on fundamental aspects of quantum theory partly stems from its mathematical formulation, which obfuscated possible physical principles hiding therein. In recent years, quantum theory has shown its great potential in speeding up many information processing tasks such as computation and communication. Black box models, which are device-independent abstractions of input-output correlations of information-processing tasks, provide a valuable tool in our quest for information-theoretical principles of quantum physics. The quest for information theoretical principles of quantum physics diverges in two paths. On one hand, the internal mechanism of black boxes can be inferred from observing the their input-output correlations, while assuming they obey a global causal order. Such mechanisms can be classical probability theory, quantum theory or even some unknown theory with stronger-than-quantum correlations, all without violating the principles of relativity. On the other hand, it is possible that the inputs and outputs of several boxes are connected in a way such that separating the connections into causally distinct parts is impossible, while each black box obeys the laws of classical or quantum physics internally. A review of process in both paths shows that it is not easy to reconstruct quantum theory from information-theoretical principles. Understanding the physical intuition behind quantum theory may require both an accurate characterization of the internal mechanisms of black boxes and a deeper understanding of the causal orders that may arise from them.

Key words device-independent principles; foundations of quantum theory; generalized probability theories; indefinite causal order

收稿日期: 2022-04-10; 修回日期: 2022-04-18

基金项目: 科技部重点研发计划 (2021YFE0113100)

作者简介: 陈怡颖 (1997-), 女, 博士生, 主要从事量子基础理论方面的研究。

*通信作者: 王子竹, E-mail: zizhu@uestc.edu.cn

量子理论作为现代物理的两大基石之一, 为物理研究提供了全新的表达方法。然而, 量子系统作为一个基于四大基本假设提出的数学空间, 其数学符号和动力学方程并不能体现出自然的物理原理。众所周知, 狭义相对论可以从“惯性参考系的等价性”和“光速不变”两大公理中完整推导出来, 因此, 众多物理学家试图寻找隐藏在量子理论的数学描述中的物理原理。

1935年, Albert Einstein、Boris Podolsky、Nathan Rosen 三位物理学家提出了第一个物理原理^[1]: 定域实在论 (local realism), 并对量子力学的哥本哈根诠释提出质疑: 量子力学对物理实在的描述是完备的吗? 文章建立在定域实在论的假设之下, 规定在某区域发生的事件以不超过光速的传递方式影响其他区域, 且认为在系统不受任何干扰的情况下, 如果可以准确地预测某物理量的值, 那么该物理量具有实在性。文章表明, 若定域实在论成立, 则可以推导出量子力学不完备。这就是量子力学史上著名的“EPR 佯谬”。

然而, “EPR 佯谬”并没有提出一个好的办法能够检验量子力学是否提取出与定域实在论有关的物理原理, 将两者进行公平地比较。这导致物理界对“EPR 佯谬”的可靠性争论不休。一方面, Niels Bohr 作为哥本哈根学派的创始人之一对“EPR 佯谬”提出异议^[2]。他认为量子力学中的物理量与测量情景密切相关, 这使得“EPR 佯谬”物理实在性在量子物理中的定义本质上模糊不清, 其结论并不可靠。另一方面, David Bohm 认为存在一个没法观察到, 但又存在的确定性物理机制阻碍了量子力学的完备性。1952年, Bohm 提出量子力学的隐变量因果解释^[3-4], 试图从量子力学的概率特征中找到一种潜在的不可访问的机制原理, 能够验证“EPR 佯谬”。虽然 Bohm 的隐变量不满足定域性, 但其观点促进了一系列关于隐变量理论的物理原理研究。

1964年, John Bell 首次提出将定域实在论中的物理概念提取出来, 用一个不依赖于特定理论形式的数学模型表示^[5]。文章将量子力学和定域实在论放入其中进行平等地比较, 证明量子力学不能用局部隐藏变量理论 (local hidden variable theory, LHVT) 解释。Bell 的理论框架采用黑盒思想 (black-box principle), 将实验室描述成具有有限输入、输出集的黑盒子。Bell 根据定域实在论做出假设, 分离的黑盒之间不存在超光速通信。因此, 所有输入输出

之间的关联性都来源于黑盒之间共享的资源。如图 1, 以两体系统为例, Alice 和 Bob 的输入值分别为 $\{x, y\}$, 输出值分别为 $\{a, b\}$ 。因此, 局域隐藏变量模型可以理解为 Alice 和 Bob 之间共享一种不可测量的资源 λ , 或者说具有共同的策略 λ 。

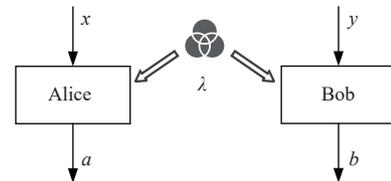


图 1 两体局域隐藏变量模型

通过简单的计算即可以证明, 有些情况下对两体量子系统进行测量得到的联合概率 $P(a, b|x, y)$ 不能写成含局域隐变量的形式。由此可得, 局域隐变量模型描述的关联性是有限的, 无法复现所有量子关联性, 这一定理被称为“Bell 定理”。为了能在物理实验上验证 Bell 非定域 (Bell nonlocality), CHSH 不等式提出一种用数学期望表示子系统关联性的方法^[6]: $|E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b')| \leq 2$, 其中 $E(m, n)$ 表示通过测量得到结果的数学期望。若给定概率模型满足 CHSH 不等式, 则表征的关联性可以由局域隐变量模型完全复现; 反之, 若违背, 说明模型中存在非定域资源。此外, 根据 CHSH 不等式可以推导出量子关联性的非定域上限, 称为 Tsirelson 界限。若 Alice 和 Bob 之间共享量子态, 则 CHSH 不等式的最大违背值达到 $2\sqrt{2}$ ^[7]。尽管以上诸多研究给出了实验上证明 Bell 定理的依据, 但早期的 Bell 不等式破坏实验^[8] 受各种技术约束, 被迫做出一些额外的假设。这些附加的假设使得 Bell 实验的结论存在漏洞, 并不具有完全的说服力。直到 2015 年, 物理学家们在实验上无漏洞地完美证明了 Bell 定理^[9-11], 通过实践验证了量子力学与定域实在论之间不兼容。

种种研究和实验结果表明量子态可以是一种非定域资源, 以某些量子态为资源的信息传输似乎能够以超光速行进。随着量子力学中量子纠缠这一概念慢慢被人们熟知, 物理学家们开始分析非定域和纠缠的关系。事实上, 两个概念并不是等价的, 不是所有的纠缠态都可以破坏 Bell 不等式, 非定域性比纠缠更强的量子特性^[12]。Bell 非定域性与同时期进行的量子互文性的研究构成了对物理实在性理解的两大冲击^[13]。量子互文性来自于 Andrew Gleason 对希尔伯特空间的封闭子空间上的测度研

究^[14]。Gleason 证明了所有这样的测度都可以用量子物理的测量基本假设构造出来：测量结果的概率为测量算符与被测量的密度矩阵乘积的迹。Kochen-Specker(KS) 定理表明 Gleason 的上述定理直接决定了某些满足物理实在性要求的测量结果并不是确定性的，而是和这些测量算符与另外哪些测量算符放在一起测量有关^[15]。通过对 Bell 定理和 KS 定理的研究，可以得出结论：物理实在性并不像“EPR 佯谬”所描述的那么经典^[16-18]。

可以看出，Bell 定理启发了物理界对定域性、物理实在性等一系列物理概念的深入理解，对量子基础研究的贡献功不可没。Bell 的模型框架作为定域实在论的抽象表示，为后续物理学家们从量子力学中总结出物理原理提供良好工具。概率和概率关联性是任何物理理论都可以实现的物理量，是一种基本的数学语言。因此，局域隐变量模型可以看作是一种与某个具体的理论无关的物理原理表示。这一思想又被称为器件无关原理 (device-independent principle)，这样一种脱离物理实验器件限制的统一模型可以用于公平地比较量子理论与其他可能的理论，更好地了解量子理论的显著特征。这是一个剥离物理概念的过程，让其尽可能地摆脱其物理载体的限制，凝练出具有普适意义的物理原理。这样的一个过程在其他领域也有类似的例子。在计算领域，人们将算术从算盘或计算器等物理载体中抽离出来，把算术规律抽象成不拘泥于器件形式的算法用以开展研究。器件无关原理贯彻整个“重构量子理论”基础研究，是一种重要的思考方式。

1992 年，在 Bell 模型的基础上，“无信令”原理作为相对论因果律在量子力学中的对应原理，从量子理论中抽象出来^[19]。相对论因果律在物理系统中被描述为“子系统之间的信息传输速度不得超过光速”，文献 [19] 将该物理概念凝练为量子理论的“无信令”原理 (no-signaling principle)。如图 2 所示，其本质上描述的是任何子系统的测量和其他子系统测量结果之间的独立性。该模型和 Bell 局域隐变量模型类似，可以将“无信令”原理投射到与某个特定物理理论无关的广义模型中使用。准确地说，“无信令”模型又称为 PR box，可以看作是 Bell 局域隐变量模型进一步放宽对子系统间关联的限制，黑盒之间不再共享资源。

然而，“无信令”原理作为唯一一个描述量子理论的物理原理是远远不够的。文章从 CHSH 不等式出发，试图在非定域的基础上，利用“无信

令”原理将 CHSH 不等式限制在量子理论最大值 $2\sqrt{2}$ 。但却无奈地发现相对论因果关系本身并不能做到如此，而是将最大边界拓展到 4。

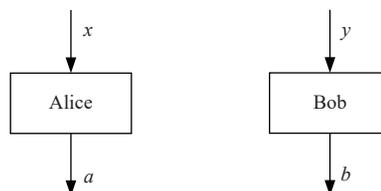


图 2 两体“无信令”模型图

一时之间，如何找到准确刻画量子理论的物理原理成为了诸多物理学家关注的热点。为达到重构量子力学的最终目的，不仅要实际应用的物理理论中剥离可靠的物理原理，还需要通过一些操作性语言推导已知的物理原理，复原理论结构，以确保物理原理是量子理论的充分必要条件^[20-22]。这样一种推导物理原理以重构物理理论的过程类似于计算领域中通过用编程语言操纵数据，实现抽象的算法的过程。诸多物理学家纷纷尝试在此领域深耕，以期探寻其中的奥秘^[23-25]。

广义概率论 (generalized probability theories, GPT) 便是物理学家们提出的第一种“编程语言”^[26-27]。广义概率论作为一个用于实现物理原理的操作性框架，不受特定理论的限制，延续和推广了 Bell 模型的基本思路。该理论以黑盒为研究单位，带有限输入、输出集的黑盒之间可以通过并行或串行的方式组合成复合系统，并在此基础上考虑物理系统的状态、演化和测量^[28]。该框架中的所有理论，包括经典理论和量子理论，都具有两个基本的共性：1) 子系统之间遵循“无信令”原则；2) 复合系统的状态可以由定域测量结果之间的关联性决定。

这样一个脱离量子物理形式的统一操作语言试图利用提取的简单物理原理作为条件，推理出一系列思想理论。通过附加或者放宽某些物理原理的限制实现对理论进行调整，使其最终等价于量子理论。其中最具代表性的理论为广义无信号理论^[29] (generalized nonsignaling theory, GNST)，又称为盒世界理论^[30] (box world)。这一理论仅由“无信令”公理刻画，是非定域性最强的理论，量子理论中被认为特殊的性质在该理论中变得非常普遍。研究盒世界理论对于了解量子理论的特性，探究量子理论的理论构造有着十分重要的意义。

随着量子信息理论的新兴和发展，越来越多的人开始注意到量子计算具有明显的优势，理论的非

定域性在信息处理上能够提升通信协议^[31-34]。2007年, 文献 [29] 试图从信息处理的角度建立 GPT 的操作语言, 研究物理理论的信息计算特点, 为量子理论的研究提供了新的思路。包括在 GPT 操作框架下深入研究盒世界的物理性质^[30], 以及从量子计算等方面研究量子电路和盒世界电路的计算能力^[35-37]。研究发现, 尽管盒世界拥有更强的量子非定域关联, 其几何对偶的测量空间却有相对定域的性质, 不存在类似量子隐形传输 (quantum teleportation)、量子稠密编码 (quantum dense coding) 等非定域的测量性质。

此外, 与 GPT 操作框架中根据物理原理重建理论不同, 不少物理学家延续了“无信令”原理的思想, 仅用某些物理原理约束即可推导量子理论的概率相关性, 无需进一步将理论细化。如: 信息因果原理^[38-39](information causality), 宏观定域原理^[39-40](macroscopic locality) 和定域正交原理^[41-42](local orthogonality), 但这些原理都不能将量子关联性和其他非定域关联性完全区分开来。目前为止, 最为贴近量子物理特征的理论描述是“Almost quantum”的理论^[43]。

另一方面, 既然相对论因果律作为唯一刻画量子理论的物理原理是远远不够的, 一些物理学家试图从反向推理。相对论因果律确定了概率模型中各个黑盒子之间的因果顺序, 且物理原理的普适性要求黑盒内部的运行机制不拘泥于某一理论形式; 相反, 若指定概率模型中每个黑盒子内部遵循某一特定理论, 允许黑盒子之间的因果顺序存在不同方式的组合, 只要求其满足该理论的基本数学描述, 所有黑盒子之间的概率关联性满足现有的因果律吗? 答案是否定的。

2012年, 全局因果结构在量子物理中受到新框架模型的挑战^[44]: 当不再对全局因果顺序做出假设, 规定个体实验室内部产生输出的过程服从量子力学时, 该物理系统的粒子关联性将如何描述? 该框架模型建立在器件无关思想下, 通过研究黑盒的输入输出信息剖析其中的全局因果结构。为更好地描述各个黑盒与系统整体的信息, 文章利用 Choi-Jamiołkowski 同构 (Choi-Jamiołkowski isomorphism) 构造高维的量子超映射 M (quantum supermap)^[45] 和过程矩阵 W (process matrix)。量子超映射作为将量子操作映射到量子操作的高阶变换, 体现了物理系统内部的全部操作信息, 而过程矩阵作为系统外部信息的高阶映射, 表示物理系统的整体因果结

构。文章通过物理系统的量子超映射 M 及过程矩阵 W , 将判断物理系统是否具有全局因果结构的标准从“物理系统是否打破因果不等式”简化为“过程矩阵是否可写成单信道系统过程矩阵的凸组合形式”, 最终得出结论: 在子系统遵循量子力学但不考虑各个子系统之间因果顺序的前提下, 物理系统可能出现违背因果不等式的关联性。这种奇特的因果顺序是否真的违背了量子理论? 物理学家们并不能找到确凿的证据肯定地回答这个问题: 量子理论或许比我们先前的理解更加匪夷所思。

文献 [44] 的思想启发了人们对因果结构的研究, 开始展开一系列在此基础上的针对经典理论的分析。当物理系统局限于经典概率理论中时, 三体及以上的多体系统也会出现未预定义的因果关联 (correlations without predefined causal order)^[46]。不仅如此, 过程矩阵 W 在经典系统中存在等价表征, 在几何上可以表示为不确定因果结构组成的凸多胞体, 用于优化因果博弈问题^[47]。针对经典系统的系统研究进一步发展和丰富了物理理论中因果结构的研究。

随着量子计算的发展, 量子电路开始走进人们的视野, 其中量子电路中对操作顺序的控制是真正实现广义量子电路的关键^[48]。电路控制作为量子电路中因果结构最直接的体现, 引发物理学家们展开一系列研究。2021年, 针对操作控制的量子电路系统理论在具有不同控制的电路中分类讨论了量子超映射^[49]。其中包括利用经典态控制因果顺序的经典开关^[50](classical switch), 以及利用量子态控制因果顺序的量子开关 (quantum switch)^[50]等。此外, 一系列相关研究进一步阐明了不确定的因果顺序在量子信息处理中具有一定优势^[51-72]。

多年来, 物理学家们不断地尝试从实际应用的量子力学中抽象出所有物理原理, 并利用这些物理原理重新推导量子理论的逻辑结构。各方围绕“重构量子理论”这一深刻的基础问题展开了诸多讨论, 试图找到理解量子理论的关键线索。为梳理研究脉络及未来研究方向, 本文首先引入研究通过物理原理刻画真实与假想物理理论关联性强度的重要工具——广义概率论, 以及其中的典型非定域理论——盒世界理论。随后, 介绍一系列尝试用于唯一定义量子关联性的器件无关原理。最后, 文章介绍量子物理研究中的另一奇特现象——不确定的因果结构, 及其在量子电路中的应用。

1 广义概率论 (generalized probability theories, GPT)

1.1 基本性质

广义概率论是不拘泥于特定物理理论的一般操作框架, 通过推导从物理概念中抽离出来的物理原理构造某一假想理论, 从而验证物理原理和物理理论是否一一对应。经典概率论和量子理论只是作为其中的特例出现。广义概率论旨在通过通用的概率关联性语言和操作要素研究不同的物理理论, 体现了器件无关原理的中心思想。该理论作为一种操作工具, 有助于人们利用其对不同理论的物理原理展开调整或修改, 从而复现量子物理的基本结构。

2001 年文献 [28] 提出通过 5 个公理推导量子物理。为得到与设备无关的广义操作模型, 文章研究最普适的量子演化类型, 将典型的实验场景概括为 3 个部分: 制备装置、变换装置和测量装置。这一普适化的实验框架为 GPT 理论的发展和丰富奠定了基础。

GPT 理论的研究对象是物理系统的态, 通过一系列基准测量 (fiducial measurements) 对应的概率列表 \mathbf{p} 来确定地表示制备装置上的一个初始态。所有基准测量组成一个正交完备的概率测量集合。从正交完备性可知, 任何测量概率都可以通过这个概率列表中的元素表示出来。设给定基准测量集 $\{x_m\}$, 每个对应测量的结果集合为 $\{a_n\}$, 则物理系统的态 \mathbf{p} 表示为^[29]:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} P(a_1|x_1) \\ \vdots \\ P(a_n|x_1) \\ \vdots \\ P(a_1|x_m) \\ \vdots \\ P(a_n|x_m) \end{pmatrix} \quad (1)$$

所有合法态 \mathbf{p} 组成的态空间 \mathcal{P} 具有一个重要的特性: 凸结构, 即任意初始态 \mathbf{p}_i 的凸组合仍然是合法的态。若制备系统随机以概率 q_i 制备 \mathbf{p}_i 态 ($i = 1, 2, \dots, n$), 则最终得到初始是混态 \mathbf{p} 态。因此 \mathbf{p} 态的测量概率可以写成各个 \mathbf{p}_i 态的凸组合。其公式表达如下:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{p}_i$$

$$0 \leq q_i \leq 1, \sum_{i=1}^n q_i = 1 \quad (2)$$

制备装置产生的初始态 \mathbf{p} 经过变换装置实现态

的演化 $\mathbf{p}' = \mathbf{T}\mathbf{p}$ 。由态空间的凸结构可知, 初始纯态经过变换后的概率组合等价于对应初始混态经过相同演化后得到的最终混态, 即 $\mathbf{p}' = \mathbf{T} \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{T} p_i$ 。因此, GPT 理论规定合法变换 \mathbf{T} 为线性变换。该变换可视为将态空间中规范化向量线性映射到另一规范化向量的函数, 该变换保持了合法态的归一性。此外, 态演化的过程是可逆的。初始态 \mathbf{p} 通过变换 \mathbf{T} 得到态 \mathbf{p}' , 态 \mathbf{p}' 能够通过逆变换 \mathbf{T}^{-1} 重新求得态 \mathbf{p} 。因此单位变换也是变换装置中的一个重要部分, $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}$ 。线性、可逆性是 GPT 理论中态变换的基本性质, 其框架内的理论在此基础上对变换进行进一步的限制和约束, 如量子理论要求态演化遵循么正变换原则。

GPT 理论中物理系统的测量具有和态类似的性质^[30]。制备完成的系统初态经过演化后, 进行概率测量, 最终得到一个特定的经典结果 r 。为了获得结果为 r 的测量概率, 需要制备多个和初态等价的系统态, 经过等价变换后进行概率测量。由系统态的线性结构可知, 在任何测量中得到特定结果为 r 的概率可以看作是基准测量概率的线性映射。已知一次测量可能的测量结果有 n 个, 设第 i 个测量结果对应的效应 (effect) 为 m_i , 则结果为 r 的概率 $P(r)$ 可以表示为:

$$P(r) = \mathbf{m}_r \mathbf{p} = \sum_{a,x} \mathbf{m}_r(a|x) p(a|x) \quad (3)$$

已知测量概率满足非负性和归一性, 因此合法的测量效应必须满足以下限制条件:

$$\mathbf{m}_r \mathbf{p} \geq 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}$$

$$\sum_r \mathbf{m}_r \mathbf{p} = 1 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad (4)$$

系统的有效测量 \mathbf{m} 可以看作是测量效应的集合 $\{\mathbf{m}_i\}$ 。定义所有测量效应之和为总测量, 根据测量概率的归一性可得, 总测量可以看作单位测量, 即 $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \dots + \mathbf{m}_n = \mathbf{m}^l$, 且满足 $\mathbf{m}^l \mathbf{p} = 1$ 。

1.2 盒世界理论 (box world)

GPT 理论通过一些简明扼要的公理刻画物理理论, 试图从通过对这些公理进行微调找出量子理论的物理特性。盒世界理论作为其中非定域性最强的理论, 在对比研究量子理论方面具有十分重要的研究价值。盒世界理论是一个仅由“无信令”原理刻画理论, 其概念起源于根据相对论因果关系提出的一种称为 PR box 的无信令物理模型^[19]。该模

型违反了 Tsirelson^[7] 证明的 CHSH 不等式在量子物理中最大破坏^[6] 的限制, 可以使其最大破坏值达到 4。模型中, 物理实验室被视为多个具有一组有限输入和输出集的黑盒。在满足 GPT 理论的基本性质, 即式 (4) 的基础上, 假设黑盒之间遵循“无信令”原理。“无信令”原理是因果律在测量概率上的直接体现, 意味着任意子系统的输出不受其他子系统的测量选择的影响。以两体系统为例, 设复合系统的测量分别为 $\{x\}, \{y\}$, 对应输出结果分别为 $\{a\}, \{b\}$, 则:

$$\sum_a p(ab|xy) = \sum_a p(ab|x'y) \quad \forall x, x', y, b$$

$$\sum_b p(ab|xy) = \sum_b p(ab|xy') \quad \forall x, y, y', a \quad (5)$$

有研究表明, 测量概率所阐述的态和测量之间的联系从数学角度可以看作是一种空间对偶关系。态 p 本质上是属于实数域 \mathbb{R}^d 上某个 d 维向量空间 \mathcal{P} 的规范化元素, 那么测量对应对偶空间 \mathcal{P}^* 中满足 $\{m \in \mathbb{R}^d : 0 \leq mp \leq 1, \forall p \in \mathcal{P}\}$ 的规范化元素^[27]。直觉上, 这种数学上相互平衡的对偶关系也应体现在 GPT 理论中。态空间对 Bell 不等式的破坏越大, 测量空间的性质相应地越局限于定域。因此, 盒世界理论作为非定域性最强的理论, 其测量空间并不具备量子理论测量中诸如远距传输、纠缠交换等性质。

2009 年, 文献 [30] 对盒世界理论的测量空间进行了全面详尽的研究。文章指出, 盒世界理论中有一类称为“基本测量”(basic measurements) 的系统测量, 可以分解为一系列顺序作用于子系统的基准测量, 且基准测量之间存在明确的关联。后面执行的基准测量 $x_i \in \{0, 1\}$ 选择取决于前一个测量 $a_{i-1} \in \{0, 1\}$ 的结果, 且最终的系统测量结果 r 可以看作基准测量结果 a 的函数 $r = f(a)$ 。总的来说, 基本测量可以看作是一套具有确定顺序的系统测量方案。如图 3, 以一个作用于两体系统的基本测量 m_1 为例, m_1 可以分解为如下过程: 首先选取基准测量 $x_2 = 0$ 作用于子系统 Bob, 并产生第一个基准测量结果 a_2 。接着进行第二个子系统 Alice 基准测量, 其测量选择等于第一个基准测量结果, 即 $x_1 = a_2$, 最后, 系统结果 r 由函数 $r = a_1$ 给出。其数学描述如式 (6), 元素 $m(a_1, a_2|x_1, x_2) = 1$ 表示执行结果为 a_1, a_2 的系统测量 x_1, x_2 。根据基本测量中的关联性 $x_1 = a_2 = 0/1$, 可以得出, 所有实现的分量中若 $m(a_1, a_2|x_1, x_2) = 1$, 则一定存在非零元素

$m(a_1, \bar{a}_2|\bar{x}_1, x_2)$ 。

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

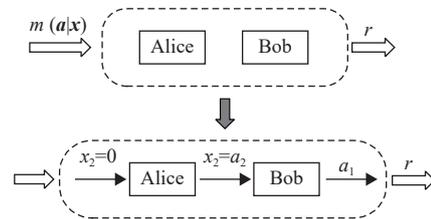


图 3 两体系统基本测量示意图

该文章证明当物理系统为单体或两体系统时, 盒世界理论中的所有有效测量都可以看作是基本测量的凸组合。其中, 单体系统的所有合法测量都对应一个等价的基准测量, 符合基本测量的定义。换句话说, 单体或两体系统中的合法测量都可以分解为一系列输入与其他输出相关联的基准测量的凸集合。然而, 这种直觉上顺理成章的定理在三体及以上的多体盒世界理论中却不成立。文章指出, 三体系统中存在无法分解成基本测量的合法测量。文献给出如下示例, 测量 m_2 是一个合法的三体系统测量。通过矩阵表示可知, 实现的测量分量有 $m(001|000), m(110|000), m(000|100), m(100|100), m(101|010), m(111|010), m(010|001), m(011|001)$ 。可以看到所有执行的测量 a_i 及结果 x_j 中, 并无关联性存在。 m_2 无法通过基本测量复原, 是一类特殊的合法测量。

文献 [30] 的发现使物理界开始关注合法态空间和合法测量空间之间的平衡关系。此外, 盒世界理论在态空间和测量空间上极大的非定域性反差使得该理论在解决计算问题方面的能力变得扑朔迷离, 盒世界理论会拥有比量子理论更强大的计算能力, 亦或是和经典理论不相上下?

为探究这一问题, 文献 [36] 从算法的角度重新解读 GPT, 定义与之相对的计算操作电路, 试图分析这类基于基本物理原理的广义理论的计算能力, 和量子理论一决高下。文献 [73] 将 GPT 框架内任意理论 G 能有效解决问题的复杂度类定义为 BGP。当理论 G 指定为量子理论时, 该复杂度类特指 BQP^[73]; 若理论 G 指定为经典理论, 则复杂度类相应地类比为 BPP。文章证明 BGP 类包含于经典复杂度类 AWPP^[74] ($AWPP \subseteq PP \subseteq PSPACE$) 中, 即 $BGP \subseteq AWPP \subseteq PP \subseteq PSPACE$ 。事实上, AWPP 经常出现在量子计算背景下, AWPP 是 BQP 计算上限的最小

经典复杂度类。文章的结论表明，量子理论中已知的结论 $BQP \subseteq AWPP$ ^[75] 在 GPT 中普遍存在，任何遵循层析定域性 (tomographic locality)，即复合系统的状态可以由定域的测量刻画理论都包含于 AWPP 内。不仅如此，一些仅遵守层析定域性而违背“无信令”因果原则的理论也存在这样的结论。这一结论为量子计算带来全新的思路：不受因果律限制的量子理论或许可以有效解决某些对现有量子计算机来说很难的问题^[76]。

除此之外，研究证明具备对测量结果进行后选择 (post-selection) 能力的量子理论复杂度类 PostBQP 等价于概率图灵机 (probabilistic Turing machine) 在多项式时间内可解决的一类决策问题 PP，即 $PostBQP=PP$ 。由 $PostBQP \subseteq PP$ 可以得出，任意遵循层析定域性的后选择 GPT 理论 PostBGP 能够有效解决的问题都可以被后选择量子计算机有效解决。因此在后选择前提下，量子理论在所有 GPT 理论中是最优的理论。另一方面，文献 [37] 提出，若放宽对量子态的限制，存在一个由层析定域性和“无信令”因果性刻画的非理论 G，使得 $BGP=AWPP$ ，且 BQP 无法到达该边界。这表明 AWPP 服从因果律，任何非因果的层析定域理论都可以由遵循因果定律的计算模型有效模拟。该结论清晰地阐述了非定域关联性和计算能力之间的关系，非定域性越强的理论在计算能力上有越强的优势性。

这一系列针对计算复杂度的理论研究一方面从信息论的角度提取 GPT 理论的物理特性，总结物理原理；另一方面分析所有非定域关联性集合的计算能力，致力于探究量子计算优势的物理源头，并将该计算优势合理最大化，为寻找更多的存在量子加速的算法提供指引。

2 三大量子原理

归根结底，GPT 框架研究的最终目的是将已知的物理原理放在包括态制备、演化、测量的统一操作框架下推导出一系列与量子理论相似的物理理论，并通过对物理原理对应的数学描述进行微调使其最终成为量子理论。另一方面，PR box 利用描述量子关联性的 Bell 广义模型从量子力学中提炼和相对论因果律相关的“无信令”原理^[19]。这项工作为寻找量子物理的信息原理研究提供了另一种思路：根据物理理论在系统中产生的关联性进行分类和研究，从中抽象出物理原理。这种

方法仅从观察到的统计数据中考虑原理，而无需对系统进行任何理论建模。尽管“无信令”原理的研究表明两者无法完全刻画量子关联性，但仍激发了物理学家们继续探索一种具有深刻洞察力的物理原理，为量子关联性的非定域程度做出直观解释^[39,77]。经过一系列的探索，物理学家们总结出器件无关原则下的三大物理原理：信息因果原理、宏观定域原理和定域正交原理。这些物理原理试图从不同角度证明量子理论之外的关联性违反这些合理原则。

2.1 信息因果原理 (information causality)

信息因果原理是对“无信令”原理在信息处理领域的拓展和延伸，体现了量子关联性携带的信息具有一定限制的特点。信息因果原理主要受随机访问编码 (random access coding) 启发^[78]。以两体系统为例，如图 4，子系统 Alice、Bob 的输入分别为一串随机数组 $x = (x_0, x_1, \dots)$ ， $y = (y_0, y_1, \dots)$ ，Alice 允许通过经典信道发送 m 位比特给 Bob，且要求 Bob 接收信息之后输出数组 β_y ，猜测下标对应的 Alice 数组 $x_y = (x_{y_0}, x_{y_1}, \dots)$ 。可以看出，当 $m = 0$ 时，该情景正是经典的“无信令”原理，体现子系统之间的信息独立性。此外，Alice 和 Bob 之间可以共享任何不产生额外传输信道的“无信令”资源，即使该关联性远比量子关联性的非定域性更强，如盒世界资源。在盒世界共享资源的帮助下，Bob 可以访问 Alice 数据中的任意 m 位比特数据，不受经典信道的信息传输限制，从而保证 $\beta_y = x_y$ 。

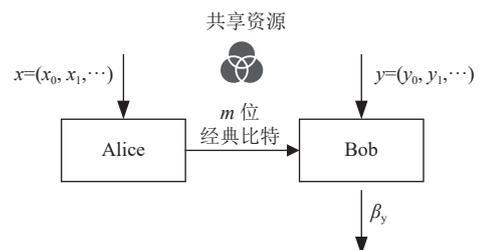


图 4 随机访问编码任务示意图

为了排除盒世界等非定域性强于量子关联性的理论，文献 [38] 对共享资源提出限制，要求共享的资源不能提供 Alice 有关 x 的任何信息，并提出信息因果原理的明确定义：利用所有的本地资源和带宽为 m 比特的经典信道，Bob 可以最多获得 m 比特关于 Alice 未知数据的信息。为进一步量化 Bob 和 Alice 之间的共享信息，定义 Bob 输出数组 β_y 携带关于 x_y 信息量的互信息 (mutual information) 为：

$$I(\beta_y : X_y) = H(\beta_y) + H(X_y) - H(\beta_y, X_y) \quad (7)$$

式中, $H(C) = -\sum_{c \in C} P_C(c) \log_2 P_C(c)$ 是香农熵 (Shannon's entropy)。已知 Alice 输入变量服从均匀分布, 且任务中 β_y 和 x 都是二进制比特数组, 式 (7) 可以改写为:

$$I(\beta_y : X_y) = 1 - h(P_{\beta_y, X_y}(\beta_y = x_y)) \quad (8)$$

式中, $h(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ 为二进制香农熵。根据定义, 若 Alice 和 Bob 之间进行 m 位比特信息通信, 则信息因果原理满足:

$$I \equiv \sum_{y=1}^N I(\beta_y : X_y) \leq m \quad (9)$$

如前文所言, 信息因果原理排除了盒世界等具有强非定域关联性的非自然理论, 是经典关联性和量子关联性的共有特点。信息因果原理中信息熵 H 的特点可以总结归纳为两点^[79]: 1) 一致性。当模型为经典系统时, 熵的值必须与经典熵一致, 即 $H(X) = H_C(X)$; 2) 对于两体系统, 如果只对 Bob 子系统执行变换, 它与 Alice 系统的信息关联性不会增加, 即 $\Delta H(XY) \geq \Delta H(Y)$ 。

信息因果原理可以在 (2,2,2,2) 实验中复现 Tsirelson 界限^[80], 从而从众多 GPT 理论中挑出量子理论, 这使得信息因果原理被许多物理学家视作量子理论基本原理的候选。在把它当作量子物理的基本原理之前还有一些问题需要进行深入研究。一方面, 违背信息因果原理的必要条件尚不清楚^[81]; 另一方面, 将其应用于多体量子系统的方案实现也困难重重^[82]。但不可否认的是, 信息因果原理是量子理论拥有的自然属性, 是区别于其他非定域关联性的重要物理依据。

2.2 宏观定域原理 (macroscopic locality)

物理学家们尝试通过建立量子理论和经典理论之间的关联获得对物理原理更深刻的理解, 宏观定域原理的概念由此而来^[40]。这一概念主张任何物理理论在宏观极限中都应该可以被经典物理描述。研究表明, 微观结构宏观化的一个重要手段是粗粒化 (coarse-graining)。通过减少描述动力系统的演化方程组, 量子理论允许在测量值足够粗粒度时被经典动力学描述^[83]。宏观极限下的量子系统将不再以粒子作为研究对象, 取而代之的是对粒子束的探测。因此, 粗粒化处理之后的测量结果为粒子束的强度分布。以两体系统为例, 设两体系统可能的输

入、输出分别为 $\{x, y\}, \{a, b\}, (a, b \in \{0, 1, \dots, m-1\})$, 在对相同的输入数组 $\{x, y\}$ 进行重复 N 次观测后 (为保证能够有效观测强度变化, 探测器的分辨率至少为 $O(\sqrt{N})$), 得到所有输出数组 $(a_x^1, a_x^2, \dots, a_x^N), (b_y^1, b_y^2, \dots, b_y^N)$, 观测者记录下每个输出值出现的次数。

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{0|x}, I_{1|x}, \dots, I_{m-1|x}) \\ I_y &= (I_{0|y}, I_{1|y}, \dots, I_{m-1|y}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $I_{a|x} = \sum_{r=1}^N \delta_{a_r^x=a}$ 表示测量为 x 时输出值 a 出现的次数。宏观定域原理要求在极限 $N \rightarrow \infty$ 内, 经过粗粒化处理后的概率 $P(I_x, I_y)$ 是定域的。根据经典理论, 此时概率模型可以由定域隐藏变量模型完全复现, 即对于每对测量 $\{x, y\}$, 存在系统联合概率 $P(I_{x_1}, \dots, I_{y_1}, \dots)$, 满足:

$$P(I_x, I_y) = \int \left(\prod_{z \neq x, y} dI_z \right) P(I_{x_1}, \dots, I_{y_1}, \dots) \quad (11)$$

换句话说, 当且仅当概率 $P(I_x, I_y)$ 等于系统联合概率 $P(I_{x_1}, \dots, I_{y_1}, \dots)$ 的边缘概率时, $P(I_x, I_y)$ 表示定域关联性。此外, 由于每次观测的输出变量是独立同分布的, I_x, I_y 分别可以看作是独立同分布变量之和。

宏观极限下粒子关联性恢复定域性的性质使得盒世界理论被排除在外。经证明, 盒世界理论中经过粗粒化处理的概率 $P(I_x, I_y)$ 仍是非定域的, 不满足宏观定域原理的要求。然而, 宏观定域原理刻画也并非量子关联性本身。研究表明, 宏观定域原理定义的关联性 P 等价于 Navascués–Pironio–Acín (NPA) 层次结构^[84-85] 中的第一级关联性集合 Q_1 。由中心极限定理可知, 当极限 $N \rightarrow \infty$ 时, P 中的变量在其平均值附近近似地服从均值为 0, 协方差矩阵 $\Gamma \geq 0$ 的多元高斯分布, 而矩阵 Γ 恰好是 Q_1 集合对应的半正定矩阵 Γ^1 。

NPA 层次结构本质上是一个致力于刻画量子关联性的半正定规划层次结构。该结构根据一系列条件进行层层递进的验证, 最终判断给定关联性集合是否为量子关联性集合。其中, 这组条件是量子关联性满足的必要条件。以两体系统 \mathcal{H}_{AB} 为例, 若 Alice 与 Bob 之间共享量子态 ρ_{AB} , 其中 Alice 可以选择的测量为 $\{x_1, x_2\}$, 每个测量 $x_i (i=1, 2)$ 对应的可能结果为 $\{a_1, a_2\}$; Bob 可以选择的测量为 $\{y_1, y_2\}$, 每个测量 $y_j (j=1, 2)$ 对应的可能结果为 $\{b_1, b_2\}$, 则作用于 Alice、Bob 系统的投影算子集合分别为 $\{E_a^x\}, \{E_b^y\}$, 系统产生的概率关联性 P 表示为

$P(ab|xy) = \text{Tr}(\rho_{AB} E_a^x E_b^y)$ 。根据 NPA 规定, 量子系统的测量算子满足以下 4 点条件: 1) 对应同一测量 x, y 的投影算子满足正交性, $E_a^x E_{a'}^x = \delta_{aa'} E_a^x$, $E_b^y E_{b'}^y = \delta_{bb'} E_b^y$; 2) 对应同一测量 x, y 的投影算子满足归一条件, $\sum_{a \in X} E_a^x = \mathbb{I}$, $\sum_{b \in Y} E_b^y = \mathbb{I}$; 3) 所有测量算子都是厄米算符, $E_a^{x\dagger} = E_a^x, E_b^{y\dagger} = E_b^y$; 4) 不同子系统之间的测量算子互易, $[E_a^x, E_b^y] = 0$ 。在此基础上对测量算子进行乘积和线性运算, 构造一系列新算子 $\{S_n\}$ (S_n 表示生成新算子的最小项至少需要 n 个测量算子)。如 $S_0 = \{\mathbb{I}\}, S_1 = S_0 \cup \{E_a^x\} \cup \{E_b^y\}, S_2 = S_0 \cup S_1 \cup \{E_a^x E_{a'}^x\} \cup \{E_b^y E_{b'}^y\} \cup \{E_a^x E_b^y\}, \dots$ 。可以看出, S_n 的元素包含 S_{n-1} 的所有元素, $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$ 。NPA 提出, $P(ab|xy)$ 是量子关联性的必要条件是对于算子集合 $S_m (m \geq 1)$, 存在一个半正定的厄米矩阵 $\Gamma^m \geq 0$, 其中:

$$\Gamma_{ij} = \text{Tr}(\rho_{AB} S_i^\dagger S_j) \quad (12)$$

研究证明, NPA 层次结构是收敛的, 非量子关联性集合 S 必然在 NPA 结构的某一阶验证中失败, 不能找到满足条件的矩阵 $\Gamma^{[85]}$ 。此外, 若关联性集合符合 n 阶验证 $\Gamma^n \geq 0$, 则将该集合表示为 Q_n 。根据 NPA 结构的层级特点可得, 阶数 n 越高, Γ^n 的验证约束也越强, 因此对量子关联性 Q 的刻画越准确, 即 $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ 。

因此, 宏观定域关联性集合 P 作为第一级结构 Q_1 , 多数情况下包括但不限于量子关联, 是一个比量子关联性集合稍微更大的特殊集合。此外, 根据 Q_1 集合的性质, 可以判定宏观定域原理在 (2,2,2,2) 实验中, 也能使关联性达到 Tsirelson 界限^[86], 这使得该原理作为量子物理基本原理成为可能。

2.3 定域正交原理 (local orthogonality)

信息因果原理和宏观定域原理都基于黑盒法, 这种处理方法虽然很大程度上突出了研究重点, 但也不可避免地存在弊端: 这些原理无法在三体情景下将量子关联和其他非定域关联区分开来。此外, 黑盒法不能解释量子互文性 (contextuality)^[87]。互文性和非定域性一样, 是量子理论的一个重要性质, 其主要观点是测量值依赖于与该测量对易的不同测量操作。当测量算子 A 与互易的不同测量算子进行同时测量时, 测量的结果可能会有不同^[88]。因此, 基于量子的互文性提出了一个全新的物理原理: 一致排斥原理^[41] (consistent exclusivity)。与此同时, 文献 [42] 提出了相似的理论, 命名为定域正交原理 (local orthogonality)。在概率论中, 两个事件

$e = (a, \dots | x, \dots)$ 和 $e' = (a', \dots | x', \dots)$ 相互排斥意味着他们不能同时为真。根据概率归一性, 定域正交原理规定一对正交 (排斥) 事件的概率之和不能超过 1, 即 $P(a, \dots | x, \dots) + P(a', \dots | x', \dots) \leq 1, (x_1 = x'_1, a \neq a')$ 。以此类推, 对于任何一组两两排斥的事件, 其概率之和不得大于 1, 即:

$$\sum_{a,b;x,y} P(a,b, \dots | x,y, \dots) \leq 1 \quad (13)$$

式 (13) 又被称为定域正交不等式。满足所有定域正交不等式的条件概率 $P(a,b, \dots | x,y, \dots)$ 的集合被称为定域正交关联性集合 LO。

可以证明, 所有量子关联性集合必然属于定域正交关联性集合^[89]。以两体量子系统为例, 设子系统 $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ 上的测量算子分别为 $\{\tilde{E}_a^x\}, \{\tilde{E}_b^y\}$, 投影算子 $E_{ab}^{xy} = \tilde{E}_a^x \otimes \tilde{E}_b^y$ 对应的条件概率 $p(ab|xy)$ 满足 $p(ab|xy) = \text{Tr}(\rho \tilde{E}_a^x \otimes \tilde{E}_b^y) = \text{Tr}(\rho E_{ab}^{xy})$ 。已知对于同一个测量 x, y , 不同测量结果之间正交且满足归一性, 因此投影算子 $\{E_{ab}^{xy}\}$ 之和一定小于等于单位算子 $\left(\sum_{a,b} E_{ab}^{xy} \leq \mathbb{I}\right)$ 。因此, 条件概率满足:

$$\sum_{a,b} p(ab|xy) = \text{Tr}\left(\rho \sum_{a,b} E_{ab}^{xy}\right) \leq \text{Tr}(\rho) = 1 \quad (14)$$

可以得出, 量子关联性一定满足定域正交原理。选择同一测量 $x = x'$ 不同结果 $a \neq a'$ 的算子 $E_a^x, E_{a'}^x (E_a^x = \tilde{E}_a^x \otimes \mathbb{I})$ 对应一对互斥事件 $e = (ab|xy), e' = (a'b|x'y)$ 。

和前两个原理一样, 定域正交原理并不是量子关联性满足的充分条件。研究证明在两体情景下, 定域正交原理等价于“无信令”原理^[42]。首先, 由定义可得, 定域正交关联性集合 LO 中必须存在一个不变的输入变量和对应不同的输出, 因此对应的概率关联性可以写成 $\{p(ab|x_0y)\}$ 或者 $\{p(ab|xy_0)\}$, 其中 x_0, y_0 是一个固定值。以 $\{p(ab|x_0y)\}$ 为例, 此时定域正交不等式可以写成 $\sum_{a,b;y} p(ab|x_0y) = \sum_{a,b} p(ab|x_0y_0) + \sum_{a,b} p(ab|x_0y'_0) \leq 1 (y_0 \neq y'_0)$ 。一对互斥的事件可以看做是两个关联测量产生的不同测量结果。如设输入 $y = y_0$ 时, 输出 x 的结果等于 $a = a_0$; 否则, $y = y'_0$ 时, 输出 x 得到不同的结果 $a \neq a_0$ 。因此, 定域正交不等式改写为 $\sum_b p(a_0b|x_0y_0) + \sum_{a \neq a_0, b} p(ab|x_0y'_0) \leq 1$ 。由概率归一性 $\left(\sum_{a,b} p(ab|x_0y'_0) = 1\right)$, 最终可得式子

$\sum_b p(a_0b|xy_0) \leq \sum_b p(a_0b|xy'_0)$ 。若将 y_0 和 y'_0 互换, 可以得到类似的式子。两式联合可以得出 $\sum_b p(a_0b|xy_0) = \sum_b p(a_0b|xy'_0)$ 。不难看出, 该式正好是“无信令”原理式(5)中的一种情况。因此, 无信令关联性集合NS包含定域正交关联性集合LO, $LO \subset NS$ 。另一方面, 可以证明定域正交关联性集合LO包含无信令关联性集合NS, $NS \subset LO$ 。如将“无信令”原理等式 $\sum_a p(ab|x_0y) = \sum_a p(ab|x'_0y)$, $\sum_b p(ab|xy_0) = \sum_b p(ab|xy'_0)$ 带入归一性 $\sum_{a,b} p(ab|x_0y_0) = 1$ 中, 可得 $\sum_{a,b} p(ab|xy) = 1 (y \in \{y_0, y'_0\})$ 。因此所有的两体“无信令”关联性集合NS等价于定域正交关联性集合LO, $NS = LO$ ^[90]。

此外, 不同于基于两体系统提出的信息因果原理与宏观定域原理, 定域正交原理在多体情况仍适用良好。定域正交关联性集合能够进行多次复制, 通过判断每次副本集合的概率分布是否满足定域正交不等式的方式, 形成定域正交关联性的层次结构^[42]。以 n 体系统为例, 设系统的概率分布为 p , 经过 K 次复制后, 若 Kn 个副本的概率分布 $p^{\otimes K} = \prod_{i=1}^K p_i$ (其中 p_i 代表第 i 个副本的条件概率) 依旧满足定域正交性, 即对于 Kn 个副本中的任意一对互斥事件, 其条件概率之和都小于或等于1, 则称该系统为第 K 级定域正交集 LO^k 。事实证明, 随着复制数量增加 $K \rightarrow \infty$, 定域正交原理对非定域关联性的限制越来越严格, 即 $LO^\infty \subseteq \dots \subseteq LO^2 \subseteq LO^1$, 能够有力排除非量子关联性。

2.4 “Almost quantum”理论

这一系列基于量子关联性展开的物理原理研究始终围绕一个关键的问题: 是否可能存在一些物理原理能够从所有可能的关联性集合中唯一地识别出量子关联性? 想要肯定回答这个问题则需要找出量子概率关联性与其他关联性的区别。然而, 2015年文献[43]提出一个包含量子关联性的理论, 称为“Almost quantum”。该理论证明在各种不同的关联性理论中, 量子理论并不那么特殊。

事实上, Almost quantum理论和量子理论有着极其相似的概率关联性。以两体系统为例, 设系统 \mathcal{H}_{AB} 上的投影算子分别为 $\{E_a^x\}$ 、 $\{E_b^y\}$ 。可知复合系统的测量概率为 $p(ab|xy) = \langle \psi | E_a^x E_b^y | \psi \rangle$, 其中 $|\psi\rangle$ 为有限维希尔伯特空间内的归一化向量。Almost

quantum理论和量子理论都要求投影算子具有正交完备性。即对同一个测量 x , 要求 $E_a^x E_{a'}^x = \delta_{a'a} E_a^x$, $\sum_{a \in X} E_a^x = \mathbb{I}$ 。两者唯一的区别在于定义投影算子的互易性。量子关联性要求子系统之间相互独立, 即不同子系统之间的投影算子相互对易, $[E_a^x, E_b^y] = 0$ 。而Almost quantum对这一性质稍加放松, 仅要求不同子系统之间的投影算子在作用于某一量子态时相互对易, 即 $[E_a^x, E_b^y] |\psi\rangle = 0$ 。通常情况下, 量子理论中使用张量积的方式表示子系统之间相互独立。如存在两个独立的系统 \mathcal{H}_A 、 \mathcal{H}_B , 其测量算子分别为 $\{\tilde{E}_a^x\}$ 、 $\{\tilde{E}_b^y\}$, 则对于复合系统 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, 作用于Alice、Bob的投影测量分别表示为 $\tilde{E}_a^x \otimes \mathbb{I}$ 、 $\mathbb{I} \otimes \tilde{E}_b^y$ 。为了更直观地比较量子关联性与Almost quantum关联性, 文章使用了互易算子的表达形式。值得注意的是, 张量积与互易算子的两种表达形式只有在有限维希尔伯特空间中是等价的^[85]。因此, 为了确保等价性, 文章讨论有限维希尔伯特空间的量子关联性。另一方面, Almost quantum理论和量子理论在计算能力方面有着截然不同的性质。Almost quantum问题可以通过半正定规划有效解决, 然而量子问题似乎要困难得多, 逼近两体系统Bell不等式的量子最大破坏问题是一个NP难的问题^[91]。

虽然Almost quantum是一个严格大于量子力学的理论, 但有证据证明Almost quantum集合满足大多数试图刻画量子关联性的物理原理, 包括信息因果原理、宏观定域原理和定域正交原理。例如, 对两体系统而言, Almost quantum关联性等价于NPA层次结构中的第 $1+AB$ 级关联性集合 Q_{1+AB} 。而关联性集合满足定域正交原理的充分必要条件是属于NPA结构的第一级集合 Q_1 。由NPA的结构特点可知, Q_1 集合包含 Q_{1+AB} 集合, Almost quantum理论完全满足定域正交原理。并且根据现有数值结果, 有理由猜测Almost quantum理论能够完全符合信息因果原理与宏观定域原理。因此, 这些原理都不能充分描述量子关联的非定域程度。从某种程度上说, 仅仅通过定义态空间关联性的物理原理只能止步于表征Almost quantum理论, 无法更加接近量子物理的真相。此外, 研究表明尽管Almost quantum和量子理论的态空间十分相似, 但Almost quantum理论的测量空间中存在一些无法排除的不合法测量。文献[92]试图在GPT理论框架下重现Almost quantum关联性, 发现若存在这样的理论, 它将不满足无限制假设(the

no-restriction hypothesis), 该假设规定 GPT 理论中的合法测量集是态集合的对偶。这一结论更进一步印证了量子物理中态和测量空间的特殊性。想要准确定义量子关联性, 还应该进一步限制系统上可能测量的规则。

总而言之, 物理学家们尝试在量子理论的物理特性中总结出规律, 并使其成为不拘泥于某一特定理论形式的物理原理, 最终重构量子理论的物理逻辑。这个过程中有两个主要的研究路线。一方面, 通过 GPT 中可操作的公理基础推导量子力学的理论结构。另一方面, 从概率关联性空间中提炼相关的物理原理, 在任何可能的关联性集合中筛选出量子关联性。

在所有器件无关原理和 GPT 广泛操作框架研究中, 具有抽象含义的黑盒模型是贯穿其中的基本思想。这样一种最普遍模型可以用于任意物理理论, 在统一的理论背景对各种不同理论进行平等比较, 更好地了解量子理论的特性。另一方面, 黑盒思想促进了人们对因果律的认识。物理学家们仅要求黑盒的内部遵循某一特定物理理论, 针对黑盒间的信道组合展开一系列研究, 尝试在现有因果律下对其进行解释。

3 不确定因果顺序 (indefinite causal order)

“无信令”原理作为黑盒思想下一个十分重要的物理原理, 是 GPT 操作框架下的基本原理。该原理来自量子理论中对相对论因果律的一个自然描述, 要求任何物理理论条件下, 黑盒之间的信道都具有明确的因果关系。然而, PR box 的研究表明, “无信令”原理作为唯一描述量子理论的物理原理不够的, 且在此基础上的一系列补充和调整都没有完全成功。与此同时, 一些物理学家们开始试图将黑盒内部限制为已知的物理理论, 而不对黑盒之间的组合方式做明确要求, 只通过黑盒的输入输出信息重构黑盒间遵循的因果关系。

因果关系可以理解为定义一系列事件发生的先后顺序。如图 5 表示复合系统中若存在 Alice 发送信号给 Bob 的信道, 则视为事件 A 是事件 B 的因果过去 (causal past), 表示为 $A \leq B$, 或者说事件 B 是事件 A 的因果未来 (causal future), 表示为 $B \geq A$, 且事件先后顺序的固定使得 AB 之间限制为单向传输, 即 $B \leq A$ 。通常来说, 两体系统具有预定义因果顺序 (predefined causal order) 表示联合概

率 $P(ab|xy)$ 可以写成所有可能的因果顺序的凸组合, 即:

$$P(ab|xy) = pP(x|aby)P(y|b) + (1-p)P(y|abx)P(x|a) \quad (15)$$

$$0 \leq p \leq 1$$

多体系统存在预定义因果顺序的必要条件是系统的概率分布可以写成所有可能的因果顺序的概率混合, 且其中至少一方 S_i 不在任何另一方 $S_j (j \neq i)$ 的因果未来中 ($S_i \not\geq S_j$, 或者 $S_j \not\leq S_i$)。然而研究证明, 黑盒模型在不明显违背量子力学框架的基础上, 存在不确定的因果顺序, 使得式 (15) 不成立。

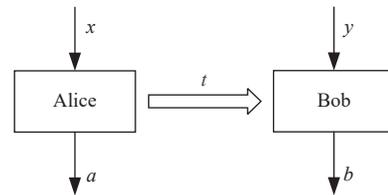


图 5 确定因果顺序 $A \leq B$ 的两体系统示意图

3.1 量子系统中的不确定因果顺序

2012 年, 文献 [44] 量子电路中的因果律提出新的设想, 构造了一个摒弃全局因果顺序的量子电路。该基本框架包括 3 个假设: 1) 随机变量, 每个实验室的输入变量是自由随机选择的; 2) 封闭的实验室, 实验室生成输出的过程不受外界环境和其他实验室的影响; 3) 局域量子性有效, 规定每个实验室内部遵循量子力学, 但不对整个复合系统做要求全局要求。该研究继续沿用器件无关思想, 将每个实验室看作是有限输入和对应输出的黑盒, 在此基础上研究因果结构对量子关联性的影响。

为测试框架内的系统关联性是否真的存在未预定义的因果顺序, 文章设计了一些模型用于因果结构的量化比较。如图 6, 以两体系统为例, 假设 Alice 和 Bob 分别具有随机输入 $x, y (x, y \in \{0, 1\})$, 通过一系列本地操作之后, a 和 b 将分别作为系统 Alice, Bob 的输出值 ($a, b \in \{0, 1\}$)。同时, 规定物理系统中存在随机变量 $b' (b' \in \{0, 1\})$ 作为“裁判”, 用于判定 Alice 或者 Bob 是否成功猜测对方输入值, 即 $a = y$ 或 $b = x$ 。在这当中, 我们假定 Alice 可以通过单信号通道将实验信息发送给 Bob ($Alice \leq Bob$)。因此, 物理系统成功的概率可以通过数学公式表示为:

$$P_{\text{succ}} := \frac{1}{2} [P(a = y|b' = 0) + P(b = x|b' = 1)] \quad (16)$$

式中, $P(a=y|b'=0)$ 表示判定 Alice 猜对 y 值的概率, $P(b=x|b'=1)$ 表示 Bob 猜对 x 值的概率。若模型存在预定义的全局因果结构, 则 Alice 与 Bob 之间只存在单信号通道, 式 (16) 的最大值为 $3/4$ 。换句话说, 任何存在全局因果顺序的系统都满足因果不等式 $P_{\text{succ}} \leq 3/4$ 。

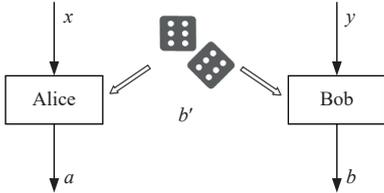


图6 因果不等式示意图

随后, 文献 [45] 考虑局域适用量子力学的两体系统, 并用 Choi-Jamiołkowski 同构^[20,93](Choi-Jamiołkowski isomorphism) 的方法重新定义上述模型, 该方法又可以称之为量子超映射。这是一种将量子操作映射到量子操作的高阶变换。考虑到量子映射集的结构与量子态的结构之间同构, 从输入量子态映射到输出量子态的线性算子 $V: \mathcal{H}_X \rightarrow \mathcal{H}_Y$ 可以转化为更高维希尔伯特空间中的态 $|V\rangle \in \mathcal{H}_{XY}$, 描述量子操作之间物理变换的映射 $\mathcal{M}: \mathcal{L}(\mathcal{H}_X) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_Y)$ 则可以看作 \mathcal{H}_{XY} 中的变换矩阵 $M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{XY})$ 。能够描述任何量子演化的量子超映射具有普适性, 是证明量子信息理论和量子力学定理的一般工具。

总而言之, 量子超映射的处理方法可以在更高维空间中描述个体实验室和多体系统的整体输入输出信息。如图 7, 以两体系统 AB 为例, 单个实验室 $X(X \in \{A, B\})$ 中的本地量子操作 \mathcal{M}_i^X 表示从输入态空间 \mathcal{H}_{X_1} 到输出态空间 \mathcal{H}_{X_2} 且对应结果为 i 的映射, $\mathcal{M}_i^X(\sigma) = \sum_{k=1}^m E_{ik} \sigma E_{ik}^\dagger, (\sigma \in \mathcal{H}_{X_1}, \mathcal{M}_i(\sigma) \in \mathcal{H}_{X_2}, E_{ik}: \mathcal{H}_{X_1} \rightarrow \mathcal{H}_{X_2})$, 所有可能的量子操作算子集合 $\{\mathcal{M}_i^X\}_{i=1,2,\dots,n}$ 是完全正保迹映射^[94](completely positive trace-preserving map, CPTP map), $\sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i^X = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m E_{ik} E_{ik}^\dagger = \mathbb{I}^{X_1}$ 。因此, 可以利用量子超映射构造 \mathcal{M}_i^X 对应的高维空间矩阵 $M_i^{X_1 X_2} (M_i^{X_1 X_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{X_1} \otimes \mathcal{H}_{X_2}))$, 使得 $M_i^{X_1 X_2} = (\mathbb{I}^{X_1} \otimes M_i^X)(|\psi^+\rangle\langle\psi^+|)$, 其中 $|\psi^+\rangle = \sum_{j=1}^m |jj\rangle \in \mathcal{H}_{X_1} \otimes \mathcal{H}_{X_1}$ 是最大纠缠态。此外, 考虑到复合系统的因果结构来自于所有子系统输入、输出空间之间的关联性, 因此定义过程矩阵 (process matrix) $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$, 该矩阵属于 Alice、Bob 的输入、输出空间张量积组成的高维空

间 ($\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2} \in \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_{B_1} \otimes \mathcal{H}_{B_2}$)。此时 P_{succ} 可改写成以下形式:

$$P(\mathcal{M}_i^A, \mathcal{M}_j^B) = \text{Tr}[\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2} (M_i^{A_1 A_2} \otimes M_j^{B_1 B_2})] \quad (17)$$

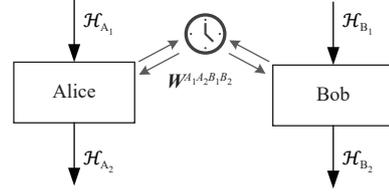


图7 不预定义全局因果顺序的量子两体系统示意图

对于任何一对 CPTP 映射 $\mathcal{M}^A, \mathcal{M}^B$, CJ 算子满足条件 $M^{A_1 A_2} \geq 0, \text{Tr}_{A_2} M^{A_1 A_2} = \mathbb{I}^{A_1}$ 。考虑到概率 P_{succ} 满足非负性和归一性, 因此两体系统中所有与局部量子力学兼容的模型概率都是由满足以下条件的过程矩阵 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$ 生成的。

$$\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2} \geq 0 \quad (18)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2} (M^{A_1 A_2} \otimes M^{B_1 B_2})) = 1 \quad (19)$$

式中, CJ 算子 $M^{A_1 A_2}, M^{B_1 B_2}$ 分别描述了子系统 $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ 内部的量子操作信息, 过程矩阵 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$ 则体现了 \mathcal{H}_A 与 \mathcal{H}_B 之间的外部信息传输。例如, 给定子系统 B 的输入为 ρ^{B_1} , 输出 B 到 A 的信道为 C , 则过程矩阵表示为 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2} = \mathbb{I}^{A_2} \otimes (C^{B_2 A_1})^\top \otimes \rho^{B_1}$ 。信息传输的顺序决定了事件在因果结构中的先后位置, 因此判断给定模型的量子关联性是否体现不确定的因果顺序的关键物理量是过程矩阵 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$ 。若 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$ 表示固定因果顺序, 对应的量子电路是量子梳 (quantum comb)^[21]——当前量子网络的理论研究中一种典型的量子电路。若局域适用量子力学的复合系统 AB 具有固定的因果结构, 根据预定义因果顺序的定义式 (15) 可得, A 与 B 之间最多允许存在一条单向信道, 表示为 $\mathbf{W}^{A \leq B}$ 或者 $\mathbf{W}^{B \leq A}$ 。因此, 两体的广义过程矩阵中可以分解为两种单信号传输情形的概率凸组合。

$$\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2} = q\mathbf{W}^{A \leq B} + (1-q)\mathbf{W}^{B \leq A} \quad (20)$$

若子系统之间存在预定义的因果顺序, 系统的过程矩阵 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$ 总是具有因果可分性 (causally separable), 可以分解成所有单信令情况的凸组合形式。反之, 若给定量子系统的全局因果结构是不可确定的, 其对应的过程矩阵是因果不可分的, 不能用典型的量子电路, 甚至是量子电路的概率混合表示。研究表明, 存在某类具有因果不可分性的过程

矩阵 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$, 使得概率 P_{succ} 打破因果不等式, $P_{\text{succ}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} > \frac{3}{4}$ 。即存在一些与量子力学局部兼容的系统, 能够在不预定义全局因果顺序的前提下打破因果不等式。

不仅如此, 文章证明两体系统的关联性在经典极限下始终是具有因果顺序的。经典操作矩阵 $\mathbf{M}_j^{(ki)}$ 可以表示为将输入态 i 映射到输出态 k 且经典结果为 j 的条件概率, 即 $\mathbf{M}_j^{(ki)} = P(k, j|i)$ 。由经典系统的特点可知, 对应的 C-J 算子是由计算基组成的对角矩阵 ($\mathbf{M}_j = \sum \mathbf{M}_j^{(ki)} |i\rangle\langle i|^{A_1} \otimes |k\rangle\langle k|^{A_2}$), 可以证明过程矩阵 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$ 是因果可分的。

3.2 经典系统中的不确定因果顺序

文献 [44] 提出的因果框架引发诸多关于过程矩阵与因果模型之间的研究^[95-97], 其中关于经典极限下两体系统必然存在确定因果顺序的结论引发质疑。研究发现, 在三体或多体系统中, 可能存在一些与任何预定义因果顺序都不兼容的信道^[46]。文章设计了一个因果博弈游戏, 该游戏在具有预定义因果顺序的场景中获胜概率严格小于 1, 但在没有预定义因果顺序的情况下一定获胜。并证明, 在局部兼容经典概率论的三体系统中, 存在特殊的过程矩阵使因果博弈游戏始终能够获胜。2015 年, 文献 [47] 对经典系统中的因果顺序进行了数学刻画与深入分析。

以经典概率论为前提, 在量子系统的因果框架的基础上将理论推广到经典系统。系统中的本地操作 $\mathbf{M}^{A_1 A_2}$ 、 $\mathbf{M}^{B_1 B_2}$ 视为从输入 I 映射到输出 O 的随机过程 P_{OI} , 重新定义为经典操作矩阵 $\mathbf{D} (\mathbf{D} = P_{OI})$, 代表全局因果结构的过程矩阵 $\mathbf{W}^{A_1 A_2 B_1 B_2}$ 等价于从输出 O 到输入 I 的线性正映射 P_{IO} , 重新定义为环境 (environment) $\mathbf{E} (\mathbf{E} = P_{IO})$ 。如图 8, 两体系统中 Alice 的实验室输入、输出变量分别为 X_1, A_1 , Bob 的实验室输入、输出变量分别为 X_2, A_2 , 两者从环境 \mathbf{E} 中获得的信号输入为 $\{I_1, I_2\}$, 输出为 $\{O_1, O_2\}$ 。因此 Alice 和 Bob 实验室可以看作是从输入 I_i, X_i 到输出 O_i, A_i 的条件概率 $P_{O_i A_i | I_i X_i} (i = 1, 2)$ 。为避免产生逻辑悖论, 环境 \mathbf{E} 要求具有逻辑一致性 (logical consistency), 使得所有实验室随机过程 $P_{O_i A_i | I_i X_i}$ 与环境映射 P_{OI} 能够共同组成系统随机过程 $P_{I, O, A | X}$ 。此外, 考虑到系统操作都是确定的经典操作, 文章规定单个封闭的实验室在生成输出的过程中执行的操作限制为 $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ 4 种: 输出常

数 0、输出常数 1、输出不变 (identity)、输出翻转 (bit-flip)。

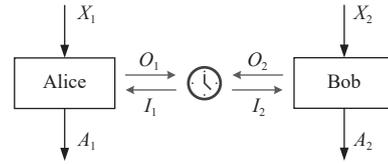


图 8 不预定义全局因果顺序的经典两体系统示意图

由于在任意本地操作下系统的总测量概率为 1, 且测量概率非负, 因此可以得出, 在两体经典系统中, 所有局部适用经典概率论的模型满足以下要求:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{E}(\mathbf{D}_{i_0} \otimes \mathbf{D}_{i_1})) &= 1 \quad \forall i_0, i_1 \in \{0, 1, 2\} \\ \mathbf{E}_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (21)$$

文章指出, 将式 (21) 看作变量为 \mathbf{E} 的线性规划, 所有解能够组成一个凸多胞体 (convex polytope)。根据凸多胞体的特点, 任何可能的逻辑一致的环境 \mathbf{E} 都可以分解为顶点 \mathbf{E}' 的凸组合^[98], 因此通过研究顶点 \mathbf{E}' 可以完全了解经典因果结构的性质。当物理系统为单体或者两体系统时, 所有顶点都代表确定过程, 顶点元素由 0 或者 1 组成, 这是符合物理直觉的。然而在三体或者多体凸多胞体中, 除了满足逻辑一致性的确定过程, 还存在由凸多胞体外的确定顶点概率组合而成的第二类顶点, 是逻辑不一致的一类过程。为避免逻辑悖论, 第二类顶点不属于有效因果结构的讨论范畴, 因此, 可以将第一类顶点定义为确定极点多胞体 (the deterministic-extrema polytope), 以此为对象研究确定过程 \mathbf{E}' 表示的全局因果结构。

该研究表明, 三体或多体确定极点多胞体中存在违背预定义因果顺序的顶点。以三体系统为例, 所有确定顶点 \mathbf{E}' 可以看作条件概率 $P_{I_1 I_2 I_3 | O_1 O_2 O_3}$, 其中顶点 $\mathbf{E}'_1 (I_1 I_2 I_3 | O_1 O_2 O_3)$ 是一个合法的三体确定过程。

$$\mathbf{E}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

通过矩阵表示可知, 模型中允许存在的信息传输有 $\mathbf{E}'_1 (000|000), \mathbf{E}'_1 (000|111), \mathbf{E}'_1 (001|010), \mathbf{E}'_1 (001|011), \mathbf{E}'_1 (010|100), \mathbf{E}'_1 (010|110), \mathbf{E}'_1 (100|001), \mathbf{E}'_1 (100|101)$ 。可以看到该模型中不存在常数输入 $I_i (i = 1, 2, 3)$, \mathbf{E}'_1 可

以等价于以下形式, 3 个实验室之间相互影响, 互为因果, 形成因果循环 (如图 9), 不能用预定义全局因果顺序解释。

$$I_1 = \bar{O}_2 O_3, I_2 = O_1 \bar{O}_3, I_3 = \bar{O}_1 O_2 \quad (23)$$

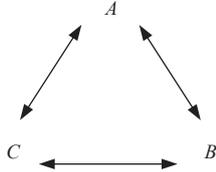


图 9 三体系统因果循环示意图

3.3 量子电路的经典控制与量子控制

合理的量子超映射能够表现出不确定因果顺序, 这一现象引起了诸多学术关注。因果结构在量子计算领域的量子电路中得到应用^[51,99-105]。控制操作的顺序作为计算电路的一部分, 在提高计算效率上有重要作用, 不确定因果结构成为量子电路新的突破口。为了给非预定义因果顺序的广义量子超映射一个合理的物理解释, 并探索更一般的量子控制电路的可实现实验方案, 文献 [49] 针对过程矩阵 \mathbf{W} 进行了一系列系统的分类和研究, 试图挖掘不同因果结构类型的量子电路。文章对量子电路的量子操作以及全局因果结构做出系统的定义。设系统存在 N 个从输出映射到输出的量子操作 $\mathcal{A}_i: \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_i^I} \rightarrow \mathcal{H}^{A_i^O}) (i \in \mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\})$, 定义希尔伯特空间 \mathcal{H}^P 与希尔伯特空间 \mathcal{H}^F , 分别可以看作是操作 $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^N$ 的全局因果过去与全局因果未来^[44,106]。与量子系统的因果框架类似, 文章引用了量子超映射的方法将量子操作 \mathcal{A}_i 改写成 Choi 形式 $A_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{A_i^I} \otimes \mathcal{H}^{A_i^O})$, 且规定都是 CPTP 映射。因此所有量子操作之间的依赖关系定义为过程矩阵 $\mathbf{W} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{PA_N^IOF})(\mathcal{H}^{A_N^IO} := \otimes_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{H}^{A_i^IO})$ ^[44,106]。

根据过程矩阵 \mathbf{W} 的不同结构和特点, 最终可以总结归纳出 3 类具有不同特征的量子电路: 固定因果顺序的量子电路 (quantum circuits with fixed causal order, QC-FOs), 经典控制因果顺序的量子电路 (quantum circuits with classical control of causal order, QC-CCs), 量子控制因果顺序的量子电路 (quantum circuits with quantum control of causal order, QC-QCs)。还有一类量子电路称为概率量子电路 (probabilistic quantum circuits), 该电路由概率量子超映射描述, 可以根据概率由 QC-FOs、QC-CCs 和 QC-QCs 实现。

在固定因果顺序的量子电路中, 所有量子操作具有确定的因果顺序, 因此量子模型不能违背因果不等式^[44], 即任何操作不受未来操作的影响^[107]。如图 10, 假设具有预定义的固定操作顺序 $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_N)$, 则外部 CP 映射 $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^N$ 与内部量子操作 $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^{N+1}$ 两两相连, 最终嵌入全局因果过去 \mathcal{H}^P 与全局因果未来 \mathcal{H}^F 之间, 形成完整的量子电路, 内部电路操作 \mathcal{M}_{i+1} 能够将每个外部映射 \mathcal{A}_i 的输出与内部辅助系统 \mathcal{H}^{α_i} 转换作为后续映射 \mathcal{A}_{i+1} 的输入。其中, \mathcal{H}^{α_i} 用于辅助内部电路映射与外部映射之间的相互作用。此时, 对应的过程矩阵 $\mathbf{W}_{P \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_N \rightarrow F}$ 可以写成以下形式, 其中运算符 $*$ 表示 link product 运算^[21,108]: \mathcal{M}_i 是 \mathcal{M}_i 对应的 Choi 矩阵。

$$\mathbf{W}_{P \rightarrow A_1 \rightarrow A_N \rightarrow F} = \mathcal{M}_1 * \mathcal{M}_2 * \dots * \mathcal{M}_{N+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{PA_N^IOF}) \quad (24)$$

此外, 固定因果顺序的量子电路中存在一类特殊的量子电路: 具有并行操作的量子电路 \mathbf{W}_{\parallel} (quantum circuits with operations used in parallel, QC-PARs)。该电路中存在多个可以同时进行的操作电路, 以任意可能的固定顺序将操作应用于内部映射, 在辅助系统的额外帮助下得到相应输出的过程, 所有操作有且只能执行一次。

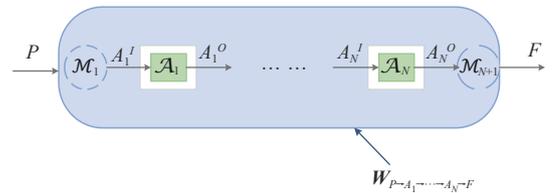


图 10 固定因果顺序的量子电路示意图

固定顺序的量子电路作为量子计算框架中的标准电路, 是最常见且重要的一类量子超映射。然而, 还存在一类不同于此, 但同样与预定义因果结构兼容的量子电路——经典控制因果顺序的量子电路。此类量子超映射的主要特点是内部操作 \mathcal{M}_i 不仅需要映射外部量子操作 $\mathcal{H}^{A_i^O \alpha_i}$, 还需要输出经典结果 k_{i+1} , 用于确定下一个外部操作 $\mathcal{A}_{k_{i+1}}$ 。这种既追踪经典输出又输出量子态的操作被称为量子器具 (quantum instruments)^[109]。经典控制因果顺序的量子电路由一系列量子器具 $\{\mathcal{M}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^{\rightarrow k_{n+1}}\}_{k_{n+1} \in \mathcal{N} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_n\}}$ 组成, 其中 (k_1, k_2, \dots, k_n) 表示执行过的外部操作顺序, 所有外部操作有且只能执行一次。量子电路的全部执行过程为如下。首先, 执行电路操作

$\mathcal{M}_\emptyset^{\rightarrow k_1}$ 确定第一个外部操作 \mathcal{A}_{k_1} , 并将全局输入 \mathcal{H}^P 映射到该外部操作的输入态 $\mathcal{H}^{A_1^I}$ 与辅助系统 \mathcal{H}^{α_1} 中。随后, 在时间点 t_n 与 t_{n+1} 之间 ($1 \leq n \leq N-1$), 依次执行映射 $\mathcal{M}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^{\rightarrow k_{n+1}}$ 确定下一个量子操作 $\mathcal{A}_{k_{n+1}}$, 并在辅助系统 \mathcal{H}^{α_n} 的帮助下将 \mathcal{A}_n 的输出态线性映射到 $\mathcal{A}_{k_{n+1}}$ 的输入空间 $\mathcal{H}^{A_{k_{n+1}}^I}$ 和辅助系统 $\mathcal{H}^{\alpha_{n+1}}$ 。最终在时间 t_N 后, 量子电路执行完所有的外部操作, $\mathcal{M}_{(k_1, k_2, \dots, k_N)}^{\rightarrow F}$ 将 \mathcal{A}_N 的输出态和辅助系统 \mathcal{H}^{α_N} 共同映射至全局输出 \mathcal{H}^F 。因此, 经典控制因果顺序的量子电路对应的过程矩阵 $W_{\text{QC-CCs}}$ 可以写成:

$$W_{\text{QC-CCs}} = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_N)} W_{(k_1, k_2, \dots, k_N, F)} \in L(\mathcal{H}^{PA_N^{IO}F}) \quad (25)$$

式中, $W_{(k_1, k_2, \dots, k_N, F)} := \mathcal{M}_\emptyset^{\rightarrow k_1} * \dots * \mathcal{M}_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^{\rightarrow k_{n+1}} * \dots * \mathcal{M}_{(k_1, k_2, \dots, k_N)}^{\rightarrow F}$, 过程矩阵是所有可能的因果顺序之和。经典控制因果顺序的量子电路中最典型的代表是经典开关 (classical switch)^[51], 其特点是在全局输入 \mathcal{H}^P 、输出 \mathcal{H}^F 中, 存在两个额外的子系统 $\mathcal{H}^{P_c}, \mathcal{H}^{F_c}$, 用于编码经典控制开关, 动态控制因果顺序的生成。当控制系统的经典测量结果为 1 时, 电路首先将全局输入映射至操作 \mathcal{A}_1 , 再发送给 \mathcal{A}_2 ; 当测量结果为 2 时, 操作顺序相反 (如图 11)。

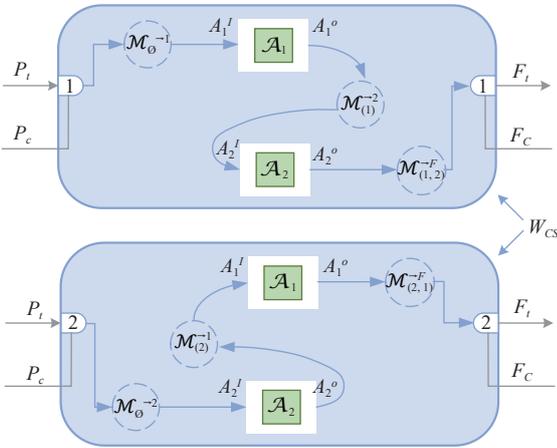


图 11 经典开关电路示意图

类似地, 量子控制因果顺序的量子电路能够利用处于叠加态的量子比特连续地控制因果顺序, 并在 QC-CCs 的基础上作出一些设置调整, 以适用量子控制系统。首先, 利用辅助希尔伯特空间 $\{\mathcal{H}^{\alpha_n}\}_{n=1}^N$ 对内部电路操作 $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^{N+1}$ 进行“纯化”处理 (purify)^[110] 是向量子控制转变的一个关键。假设辅助系统存在 Kraus 算子 $V_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{\rightarrow k_n} : \mathcal{H}^{A_{k_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}} \rightarrow \mathcal{H}^{A_{k_n}^{\alpha_n}}$, 使得对应 Choi 矩阵 $M_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{\rightarrow k_n}$ 与 Choi 向

量 $|V_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{\rightarrow k_n}\rangle$ 满足关系 $M_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{\rightarrow k_n} = |V_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{\rightarrow k_n}\rangle \langle V_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{\rightarrow k_n}|$, 其中 $|V_{(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})}^{\rightarrow k_n}\rangle \in \mathcal{H}^{A_{k_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} A_{k_n}^{\alpha_n}}$ 。类似地, 外部量子操作 $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^N$ 也通过一个 Kraus 算子做出“纯化”应用, 得到 Choi 向量 $|A_i\rangle \in \mathcal{H}^{A_i^I A_i^O}$ 。其次, 为了将经典控制系统转变为量子控制, 量子电路额外增加了一部分能够用以相干控制的系统。在 QC-QCs 中, 要求控制系统 \mathcal{H}^{C_n} 追踪已被执行的操作无序集而非完整顺序, 使得不同顺序之间存在相互“干扰”, 并对给定时间点的操作进行编码。换句话说, 控制系统的希尔伯特空间 \mathcal{H}^{C_n} 中包含态 $|\mathcal{K}_{n-1}, k_n\rangle^{C_n}$, 其中 \mathcal{K}_{n-1} 是一个无序集, 包含 $n-1$ 个已经执行过的量子外部操作, k_n 表示在时间点 t_n 将被执行的操作下标。因此, QC-QCs 电路能够相关地控制内部电路操作 $\{V_{\mathcal{K}_{n-1}, k_n}^{\rightarrow k_{n+1}}\}_{n=1}^{N-1}$ 的应用 ($V_{\mathcal{K}_{n-1}, k_n}^{\rightarrow k_{n+1}} : \mathcal{H}^{A_{k_n}^{\alpha_n}} \rightarrow \mathcal{H}^{A_{k_{n+1}}^{\alpha_{n+1}}}, k_n \notin \mathcal{K}_{n-1}, \mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1} \cup k_n$)。量子电路的全部执行过程为如下。首先, 在时间点 t_1 之前, 量子电路对输入态进行“纯化”处理, 使该态能发送至任意操作 \mathcal{A}_{k_1} , 同时控制系统相应地输出附加控制态 $|\emptyset, k_1\rangle^{C_1}$ 给每一个叠加分量。随后, 在时间点 t_n 与 t_{n+1} 之间 ($1 \leq n \leq N-1$), 根据控制态 $|\mathcal{K}_{n-1}, k_n\rangle^{C_n}$ 应用“纯”操作算符 $V_{\mathcal{K}_{n-1}, k_n}^{\rightarrow k_{n+1}}$, 将输出态统一地发送给所有未被执行的操作 $\mathcal{A}_{k_{n+1}} (k_{n+1} \notin \mathcal{K}_{n-1} \cup k_n)$ 与辅助系统 $\mathcal{H}^{\alpha_{n+1}}$, 同时将控制态更新为 $|\mathcal{K}_{n-1} \cup k_n, k_{n+1}\rangle^{C_{n+1}}$, 从而对下一个要应用的操作索引 k_{n+1} 进行编码, 并抹去关于前一个特定操作索引 k_n 的信息, 仅记录整个操作集 $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1} \cup k_n$ 。最后, 在完成所有外部操作的时间点 t_N 之后, 操作系统根据态 $|\mathcal{N}, F\rangle^{C_{N+1}}$ 应用算子 $V_{\mathcal{K}_{N-1}, k_N}^{\rightarrow F} (\mathcal{K}_{N-1} = \mathcal{N} \setminus k_N)$ 将操作 \mathcal{A}_{k_N} 的输出和 \mathcal{H}^{α_N} 的辅助态一起, 转换至电路全局输出 \mathcal{H}^F 和辅助系统 \mathcal{H}^{α_F} 。因此, 量子控制因果顺序的量子电路对应的过程矩阵 $W_{\text{QC-QCs}}$ 可以写成:

$$W_{\text{QC-QCs}} = \text{Tr}_{\alpha_F} (|w_{(\mathcal{N}, F)}\rangle \langle w_{(\mathcal{N}, F)}|) = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_N)} \text{Tr}_{\alpha_F} (|w_{(k_1, k_2, \dots, k_N, F)}\rangle \langle w_{(k_1, k_2, \dots, k_N, F)}|) \quad (26)$$

式中, $|w_{(k_1, k_2, \dots, k_N, F)}\rangle := |V_{\emptyset, \emptyset}^{\rightarrow k_1}\rangle * \dots * |V_{\{k_1, k_2, \dots, k_{N-2}, k_{N-1}\}}^{\rightarrow k_N}\rangle * |V_{\{k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N\}}^{\rightarrow F}\rangle \in \mathcal{H}^{PA_N^{IO}F\alpha_F}$ 。值得注意的是, 过程向量 $|w_{(\mathcal{N}, F)}\rangle$ 是多个子项 $|w_{(k_1, k_2, \dots, k_N, F)}\rangle$ 的叠加, 其中每项将前一个操作的输出以不同的顺序传递给下一个外部操作。因此, 即使应用顺序是在叠加的情况下, 仍要求所有操作有且只能执行一次。这确保了 $W_{\text{QC-QCs}}$ 是线性运算符, 同时是一个合法过程矩

阵。此外, 这一要求排除了一些文献中提出的与量子超映射不符合的电路^[111-114]。

QC-QCs 中的经典例子之一是量子开关 (quantum switch)^[51], 与经典开关类似, 其特点是在全局输入 \mathcal{H}^P 、输出 \mathcal{H}^F 中, 存在两个额外的量子系统 $\mathcal{H}^{P_c}, \mathcal{H}^{F_c}$, 以非经典的方式控制因果顺序的生成。如当 \mathcal{H}^{P_c} 中的量子比特为 $|1\rangle$ 时, 电路首先相干地将全局输入映射至操作 \mathcal{A}_1 , 再发送给 \mathcal{A}_2 ; 当量子比特为 $|2\rangle$ 时, 操作顺序相反 (如图 12)。此外, 不少研究将量子开关推广至 N 个操作^[64,115], 并得出结论, 量子开关在诸多量子信息处理任务中具有优势^[51-72], 目前已经过多个实验证实^[50,62,116-121]。

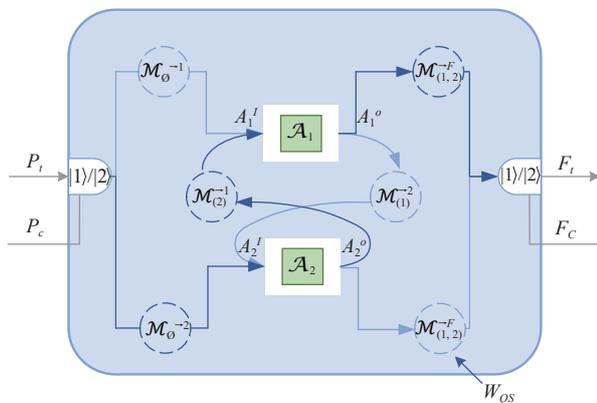


图 12 量子开关电路示意图

总而言之, 以上 3 类量子电路对应的量子超映射都是具有确定的超映射, 因此又被称为“超信道” (superchannel)^[122]。这类超映射具有保迹性, 若将要求进行适当的放松改为迹非增映射, 则可以得到概率过程矩阵。若一组概率过程矩阵之和为一个确定过程矩阵, 则称之为“量子超器具” (quantum superinstruments)^[123]。

如图 13, 不同量子电路的特点与关系总结如下。首先, 固定因果顺序的量子电路是最小的集合, 包含一个确定因果顺序的电路, 且所有过程矩阵具有因果可分性^[97,124-125]。然而, QC-FCs 并不是一个凸集, 通常情况下不同顺序的 QC-FCs 的凸组合并不是一个合法的 QC-FC, 不能用一个简单的确定因果顺序电路模拟。然而, 具有并行操作的量子电路 $W_{||}$ 是一个例外。根据定义可得, QC-PARs 与任何顺序的 QC-FC 兼容。其次, 经典控制因果顺序的量子电路作为一个凸集包含 QC-FCs, 其过程矩阵仍具有因果可分性, 其中典型代表是经典开关 W_{CS} , 能够利用经典比特离散地控制因果顺序。值得注意的是 QC-CCs 并不是多个 QC-FCs 的

简单概率混合, 过程矩阵 W_{QC-CCs} 等式中的任何一个子项 $W_{(k_1, k_2, \dots, k_N, F)}$ 都不满足合法性条件。最后, 量子控制因果顺序的量子电路是 QC-CCs 的拓展, 典型电路包括量子开关 W_{QS} 。QC-CCs 与 QC-QCs 都是动态建立因果顺序的量子电路, 后面的量子操作顺序取决于之前的操作^[95,97,99,124]。此外, 这两类过程矩阵都是因果可分的, 不能违背因果不等式。因此, QC-QCs 不包含文献 [44] 提出的量子模型 W_{OCB} , 是所有合法量子超映射的真子集。

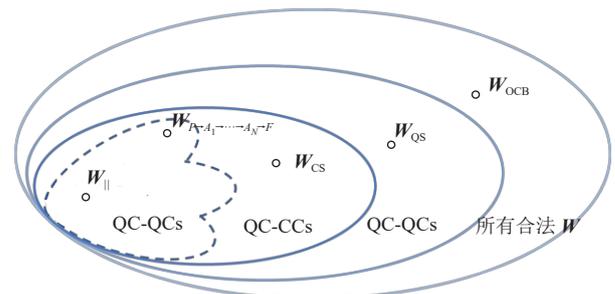


图 13 过程矩阵分类图^[49]

关于量子电路的操作控制的研究可以为尝试设计各种实验以实现不确定因果顺序的模型提供理论基础。不难看出, 这种通过自下而上的方法构建广义量子电路的研究仍存在一些开放性问题, 如 QC-QCs 类之外的量子超映射是否具有物理解释? 具有何种性质?

4 结束语

寻找量子物理的信息原理是围绕量子理论的根本问题而展开的基础研究, 试图以物理的角度看待由希尔伯特空间等数学语言描述的量子理论, 从中抽象出最基本的原理, 解释薛定谔方程背后的物理意义。“无信令”原理作为第一个从量子理论中总结出来的反映相对论因果性的器件无关原理, 是整个研究的基础。一方面, GPT 规定框架内的所有公理推导遵循“无信令”原理, 所有黑盒之间具有确定的因果关系。GPT 作为一个普适的操作框架, 有利于在统一的理论背景下对公理推导而来的理论结构进行公平对比, 并通过部分修改还原量子理论的特性和逻辑结构。另一方面, “无信令”原理作为 Bell 概率模型的延伸, 描述了量子关联性的重要特征。有关“无信令”原理的研究激励着更多物理学家从关联性中提炼能够唯一识别量子关联性集合的所有物理原理, 将其与其他关联性集合完全区分开来。这种方法不再考虑通过操作公理推导

理论结构, 仅从观察到的统计数据中考虑原理。然而, 另一项研究有着和“无信令”原理完全相反的思维逻辑。不确定因果顺序结构在特定的物理理论限制下, 通过放宽对黑盒间信道的全局假设, 允许其在不违背该理论数学描述的前提下出现不同的组合方式。该研究可以证明, 目前人们对于因果律在量子理论中的物理描述并不完全清楚。这一发现或许可以为完善量子物理原理的基础研究提供新的思路。

回顾寻找量子物理的信息原理之路, 有一些迹象表明, 当前研究无法准确定义量子关联性的原因可能在于我们将满足全局因果关系的黑盒子与满足特定物理描述的黑盒子当成两个不同的问题来研究。也许在数学中无处不在的对偶思想在量子物理的基本原理上还没有得到很好的体现^[126]。黑盒子与因果律的关系也许比我们现阶段了解到的还要更近一些。

参 考 文 献

- [1] EINSTEIN A, PODOLSKY B, ROSEN N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. *Physical Review*, 1935, 47(10): 777-780.
- [2] BOHR N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. *Physical Review*, 1935, 48(8): 696-702.
- [3] BOHM D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden" variables. I[J]. *Physical Review*, 1952, 85(2): 166-179.
- [4] BOHM D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden" variables. II[J]. *Physical Review*, 1952, 85(2): 180-193.
- [5] BELL J S. On the einstein podolsky rosen paradox[J]. *Physics Physique Fizika*, 1964, 1(3): 195-200.
- [6] CLAUSER J F, HORNE M A, SHIMONY A, et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories[J]. *Physical Review Letters*, 1969, 23(15): 880-884.
- [7] TIRELSON B S. Quantum generalizations of Bell's inequality[J]. *Letters in Mathematical Physics*, 1980, 4(2): 93-100.
- [8] ASPECT A, GRANGIER P, ROGER G. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedanken-experiment: A new violation of Bell's inequalities[J]. *Physical Review Letters*, 1982, 49(2): 91-94.
- [9] HENSEN B, BERNIEN H, DRÉAU A E, et al. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres[J]. *Nature*, 2015, 526(7575): 682-686.
- [10] GIUSTINA M, VERSTEEGH M A, WENGEROWSKY S, et al. Significant-Loophole-Free test of Bell's theorem with entangled photons[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(25): 250401.
- [11] SHALM L K, MEYER-SCOTT E, CHRISTENSEN B G, et al. Strong Loophole-Free test of local realism[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(25): 250402.
- [12] WERNER R F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model[J]. *Physical Review A*, 1989, 40(8): 4277-4281.
- [13] BUDRONI C, CABELLO A, GÜHNE O, et al. Quantum contextuality[EB/OL]. (2021-02-09). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2102.13036>.
- [14] GLEASON A M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space[J]. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1957, 6: 885-893.
- [15] KOCHEN S, SPECKER E. The problem of hidden variables in quantum mechanics[J]. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1967, 17: 59-87.
- [16] MERMIN N D. What's wrong with these elements of reality?[J]. *Physics Today*, 1990, 43(6): 9,11.
- [17] MERMIN N D. Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 65(27): 3373.
- [18] MERMIN N D. Hidden variables and the two theorems of John Bell[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1993, 65(3): 803.
- [19] POPESCU S, ROHRLICH D. Quantum nonlocality as an axiom[J]. *Foundations of Physics*, 1994, 24(3): 379-385.
- [20] D'ARIANO G M, CHIRIBELLA G, PERINOTTI P. Quantum theory from first principles: An informational approach[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- [21] CHIRIBELLA G, D'ARIANO G M, PERINOTTI P. Theoretical framework for quantum networks[J]. *Physical Review A*, 2009, 80(2): 022339.
- [22] CHIRIBELLA G, D'ARIANO G M, PERINOTTI P. Informational derivation of quantum theory[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(1): 012311.
- [23] BIRKHOFF G, VON NEUMANN J. The logic of quantum mechanics[J]. *Annals of Mathematics*, 1936: 823-843.
- [24] VON NEUMANN J. Mathematical foundations of quantum mechanics[M]. New Edition, Princeton: Princeton University Press, 2018.
- [25] MACKEY G W. Mathematical foundations of quantum mechanics[M]. New York: Dover Publications, 2004.
- [26] LUDWIG G. An axiomatic basis for quantum mechanics: Volume 1 derivation of Hilbert space structure[M]. [S.l.]: Springer, 2012.
- [27] MÜLLER M. Probabilistic theories and reconstructions of quantum theory[J]. *SciPost Physics Lecture Notes*, 2021: 28.
- [28] HARDY L. Quantum theory from five reasonable axioms[EB/OL]. (2001-09-25). <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/0101012>.
- [29] BARRETT J. Information processing in generalized probabilistic theories[J]. *Physical Review A*, 2007, 75(3): 032304.
- [30] SHORT A J, BARRETT J. Strong nonlocality: A trade-off between states and measurements[J]. *New Journal of*

- Physics*, 2010, 12(3): 033034.
- [31] SHOR P W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer[J]. *SIAM Journal on Computing*, 1999, 26: 1484-1509.
- [32] AARONSON S, ARKHIPOV A. The computational complexity of linear optics[C]//Proceedings of the 43rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing. [S.l.]: ACM, 2011: 333-342.
- [33] AARONSON S. Quantum computing and hidden variables[J]. *Physical Review A*, 2005, 71(3): 032325.
- [34] BUHRMAN H, CLEVE R, MASSAR S, et al. Nonlocality and communication complexity[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(1): 665.
- [35] KRUMM M, MÜLLER M P. Quantum computation is the unique reversible circuit model for which bits are balls[J]. *NPJ Quantum Information*, 2019, 5(1): 7.
- [36] LEE C M, BARRETT J. Computation in generalised probabilistic theories[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(8): 083001.
- [37] BARRETT J, DE BEAUDRAP N, HOBAN M J, et al. The computational landscape of general physical theories[J]. *NPJ Quantum Information*, 2019, 5(1): 41.
- [38] PAWŁOWSKI M, PATEREK T, KASZLIKOWSKI D, et al. Information causality as a physical principle[J]. *Nature*, 2009, 461(7267): 1101-1104.
- [39] CHIRIBELLA G, SPEKKENS R W. Quantum theory: Informational foundations and foils[M]. [S.l.]: Springer, 2016.
- [40] NAVASCUÉS M, WUNDERLICH H. A glance beyond the quantum model[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, 466(2115): 881-890.
- [41] CABELLO A. Simple explanation of the quantum violation of a fundamental inequality[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(6): 060402.
- [42] FRITZ T, SAINZ A B, AUGUSIAK R, et al. Local orthogonality as a multipartite principle for quantum correlations[J]. *Nature Communications*, 2013, 4(1): 1-7.
- [43] NAVASCUÉS M, GURYANOVA Y, HOBAN M J, et al. Almost quantum correlations[J]. *Nature Communications*, 2015, 6(1): 6288.
- [44] ORESHKOV O, COSTA F, BRUKNER Č. Quantum correlations with no causal order[J]. *Nature Communications*, 2012, 3(1): 1092.
- [45] CHIRIBELLA G, D'ARIANO G M, PERINOTTI P. Transforming quantum operations: Quantum supermaps[J]. *Europhysics Letters*, 2008, 83(3): 30004.
- [46] BAUMELER Ä, FEIX A, WOLF S. Maximal incompatibility of locally classical behavior and global causal order in multipartite scenarios[J]. *Physical Review A*, 2014, 90(4): 042106.
- [47] BAUMELER Ä, WOLF S. The space of logically consistent classical processes without causal order[J]. *New Journal of Physics*, 2016, 18(1): 013036.
- [48] YING M. Foundations of quantum programming[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc, 2016.
- [49] WECHS J, DOURDENT H, ABBOTT A A, et al. Quantum circuits with classical versus quantum control of causal order[J]. *PRX Quantum*, 2021, 2(3): 030335.
- [50] PROCOPIO L M, MOQANAKI A, ARAÚJO M, et al. Experimental superposition of orders of quantum gates[J]. *Nature Communications*, 2015, 6(1): 7913.
- [51] CHIRIBELLA G, D'ARIANO G M, PERINOTTI P, et al. Quantum computations without definite causal structure[J]. *Physical Review A*, 2013, 88(2): 022318.
- [52] GUHA T, ALIMUDDIN M, PARASHAR P. Thermodynamic advancement in the causally inseparable occurrence of thermal maps[J]. *Physical Review A*, 2020, 102(3): 032215.
- [53] GUPTA M K, SEN U. Transmitting quantum information by superposing causal order of mutually unbiased measurements[EB/OL]. (2019-09-28). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.13125>.
- [54] LOIZEAU N, GRINBAUM A. Channel capacity enhancement with indefinite causal order[J]. *Physical Review A*, 2020, 101(1): 012340.
- [55] MUKHOPADHYAY C, GUPTA M K, PATI A K. Superposition of causal order as a metrological resource for quantum thermometry[EB/OL]. (2018-12-18). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.07508>.
- [56] MUKHOPADHYAY C, PATI A K. Superposition of causal order enables quantum advantage in teleportation under very noisy channels[J]. *Journal of Physics Communications*, 2020, 4(10): 105003.
- [57] PROCOPIO L M, DELGADO F, ENRÍQUEZ M, et al. Communication enhancement through quantum coherent control of N channels in an indefinite causal-order scenario[J]. *Entropy*, 2019, 21(10): 1012.
- [58] PROCOPIO L M, DELGADO F, ENRÍQUEZ M, et al. Sending classical information via three noisy channels in superposition of causal orders[J]. *Physical Review A*, 2020, 101(1): 012346.
- [59] SALEK S, EBLER D, CHIRIBELLA G. Quantum communication in a superposition of causal orders[EB/OL]. (2018-09-18). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.06655>.
- [60] SAZIM S, SEDLAK M, SINGH K, et al. Classical communication with indefinite causal order for N completely depolarizing channels[J]. *Physical Review A*, 2021, 103(6): 062610.
- [61] SIMONOV K, FRANCICA G, GUARNIERI G, et al. Work extraction from coherently activated maps via quantum switch[J]. *Physical Review A*, 2022, 105(3): 032217.
- [62] TADDEI M M, CARIÑE J, MARTÍNEZ D, et al. Computational advantage from the quantum superposition of multiple temporal orders of photonic gates[J]. *PRX Quantum*, 2021, 2(1): 010320.
- [63] ZHAO X, YANG Y, CHIRIBELLA G. Quantum metrology with indefinite causal order[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(19): 190503.
- [64] ARAÚJO M, COSTA F, BRUKNER Č. Computational advantage from quantum-controlled ordering of gates[J].

- Physical Review Letters*, 2014, 113(25): 250402.
- [65] CALEFFI M, CACCIAPUOTI A S. Quantum switch for the quantum internet: Noiseless communications through noisy channels[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2020, 38(3): 575-588.
- [66] CHIRIBELLA G, BANIK M, BHATTACHARYA S S, et al. Indefinite causal order enables perfect quantum communication with zero capacity channels[J]. *New Journal of Physics*, 2021, 23(3): 033039.
- [67] CHIRIBELLA G, WILSON M, CHAU H. Quantum and classical data transmission through completely depolarizing channels in a superposition of cyclic orders[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 127(19): 190502.
- [68] EBLER D, SALEK S, CHIRIBELLA G. Enhanced communication with the assistance of indefinite causal order[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(12): 120502.
- [69] FEIX A, ARAÚJO M, BRUKNER Č. Quantum superposition of the order of parties as a communication resource[J]. *Physical Review A*, 2015, 92(5): 052326.
- [70] FELCE D, VEDRAL V. Quantum refrigeration with indefinite causal order[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(7): 070603.
- [71] FREY M. Indefinite causal order aids quantum depolarizing channel identification[J]. *Quantum Information Processing*, 2019, 18(4): 96.
- [72] GUÉRIN P A, FEIX A, ARAÚJO M, et al. Exponential communication complexity advantage from quantum superposition of the direction of communication[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(10): 100502.
- [73] ARORA S, BARAK B. Computational complexity: A modern approach[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [74] FENNER S A. PP-lowness and a simple definition of AWPP[J]. *Theory of Computing Systems*, 2003, 36(2): 199-212.
- [75] FORTNOW L, ROGERS J. Complexity limitations on quantum computation[J]. *Journal of Computer and System Sciences*, 1999, 59(2): 240-252.
- [76] BAUMELER Ä, WOLF S. Computational tameness of classical non-causal models[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2018, 474(2209): 20170698.
- [77] POPESCU S. Nonlocality beyond quantum mechanics[J]. *Nature Physics*, 2014, 10(4): 264-270.
- [78] SCARANI V. Bell nonlocality[M]. Oxford: Oxford University Press, 2019.
- [79] AL-SAFI S W, SHORT A J. Information causality from an entropic and a probabilistic perspective[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(4): 042323.
- [80] BRASSARD G, BUHRMAN H, LINDEN N, et al. Limit on nonlocality in any world in which communication complexity is not trivial[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(25): 250401.
- [81] ALLCOCK J, BRUNNER N, PAWLOWSKI M, et al. Recovering part of the boundary between quantum and nonquantum correlations from information causality[J]. *Physical Review A*, 2009, 80(4): 040103.
- [82] GALLEGO R, WÜRFLINGER L E, ACÍN A, et al. Quantum correlations require multipartite information principles[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(21): 210403.
- [83] KOFLER J, BRUKNER Č. Classical world arising out of quantum physics under the restriction of coarse-grained measurements[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(18): 180403.
- [84] NAVASCUÉS M, PIRONIO S, ACÍN A. Bounding the set of quantum correlations[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(1): 010401.
- [85] NAVASCUÉS M, PIRONIO S, ACÍN A. A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations[J]. *New Journal of Physics*, 2008, 10(7): 073013.
- [86] WEHNER S. Tsirelson bounds for generalized Clauser-Horne-Shimony-Holt inequalities[J]. *Physical Review A*, 2006, 73(2): 022110.
- [87] CABELLO A. Correlations without parts[J]. *Nature*, 2011, 474(7352): 456-458.
- [88] PERES A. Quantum theory: Concepts and methods[M]. [S.l.]: Springer, 2002.
- [89] SAINZ A B, FRITZ T, AUGUSIAK R, et al. Exploring the local orthogonality principle[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(3): 032117.
- [90] CABELLO A, SEVERINI S, WINTER A. Non-contextuality of physical theories as an axiom[EB/OL]. (2010-10-11). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1010.2163>.
- [91] ITO T, KOBAYASHI H, MATSUMOTO K. Oracularization and two-prover one-round interactive proofs against nonlocal strategies[C]//2009 24th Annual IEEE Conference on Computational Complexity. [S.l.]: IEEE, 2009: 217-228.
- [92] SAINZ A B, GURYANOVA Y, ACÍN A, et al. Almost-quantum correlations violate the no-restriction hypothesis[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(20): 200402.
- [93] CHOI M-D. Completely positive linear maps on complex matrices[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1975, 10(3): 285-290.
- [94] JAMIOLKOWSKI A. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators[J]. *Reports on Mathematical Physics*, 1972, 3(4): 275-278.
- [95] BAUMELER Ä, WOLF S. Perfect signaling among three parties violating predefined causal order[C]//2014 IEEE International Symposium on Information Theory. [S.l.]: IEEE, 2014: 526-530.
- [96] FEIX A, ARAÚJO M, BRUKNER Č. Causally nonseparable processes admitting a causal model[J]. *New Journal of Physics*, 2016, 18(8): 083040.
- [97] ORESHKOV O, GIARMATZI C. Causal and causally separable processes[J]. *New Journal of Physics*, 2016, 18(9): 093020.
- [98] ZIEGLER G M. Lectures on polytopes[M]. [S.l.]: Springer, 2012.

- [99] HARDY L. Probability theories with dynamic causal structure: A new framework for quantum gravity[EB/OL]. (2005-09-29). <https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0509120>.
- [100] ZYCH M, COSTA F, PIKOVSKI I, et al. Bell's theorem for temporal order[J]. *Nature Communications*, 2019, 10(1): 3772.
- [101] GONG M, XU F, LI Z D, et al. Verification of a resetting protocol for an uncontrolled superconducting qubit[J]. *NPJ Quantum Information*, 2020, 6(1): 99.
- [102] LI Z D, YIN X F, WANG Z, et al. Photonic realization of quantum resetting[J]. *Optica*, 2020, 7(7): 766-770.
- [103] NAVASCUÉS M. Resetting uncontrolled quantum systems[J]. *Physical Review X*, 2018, 8(3): 031008.
- [104] QUINTINO M T, DONG Q, SHIMBO A, et al. Reversing unknown quantum transformations: Universal quantum circuit for inverting general unitary operations[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(21): 210502.
- [105] QUINTINO M T, DONG Q, SHIMBO A, et al. Probabilistic exact universal quantum circuits for transforming unitary operations[J]. *Physical Review A*, 2019, 100(6): 062339.
- [106] ARAÚJO M, FEIX A, NAVASCUÉS M, et al. A purification postulate for quantum mechanics with indefinite causal order[J]. *Quantum*, 2017, 1: 10.
- [107] KRETSCHMANN D, WERNER R F. Quantum channels with memory[J]. *Physical Review A*, 2005, 72(6): 062323.
- [108] CHIRIBELLA G, D'ARIANO G M, PERINOTTI P. Quantum circuit architecture[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(6): 060401.
- [109] DAVIES E B, LEWIS J T. An operational approach to quantum probability[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1970, 17(3): 239-260.
- [110] STINESPRING W F. Positive functions on C^* -algebras[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1955, 6(2): 211-216.
- [111] ABBOTT A A, WECHS J, HORSMAN D, et al. Communication through coherent control of quantum channels[J]. *Quantum*, 2020, 4: 333.
- [112] CHIRIBELLA G, KRISTJÁNSSON H. Quantum Shannon theory with superpositions of trajectories[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2019, 475(2225): 20180903.
- [113] KRISTJÁNSSON H, CHIRIBELLA G, SALEK S, et al. Resource theories of communication[J]. *New Journal of Physics*, 2020, 22(7): 073014.
- [114] OI D K. Interference of quantum channels[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(6): 067902.
- [115] COLNAGHI T, D'ARIANO G M, FACCHINI S, et al. Quantum computation with programmable connections between gates[J]. *Physics Letters A*, 2012, 376(45): 2940-2943.
- [116] GOSWAMI K, CAO Y, PAZ-SILVA G, et al. Increasing communication capacity via superposition of order[J]. *Physical Review Research*, 2020, 2(3): 033292.
- [117] GOSWAMI K, GIARMATZI C, KEWMING M, et al. Indefinite causal order in a quantum switch[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(9): 090503.
- [118] GUO Y, HU X M, HOU Z B, et al. Experimental transmission of quantum information using a superposition of causal orders[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 124(3): 030502.
- [119] RUBINO G, ROZEMA L A, FEIX A, et al. Experimental verification of an indefinite causal order[J]. *Science Advances*, 2017, 3(3): e1602589.
- [120] RUBINO G, ROZEMA L A, MASSA F, et al. Experimental entanglement of temporal orders[EB/OL]. (2018-09-25). <http://arxiv.org/abs/1712.06884>.
- [121] WEI K, TISCHLER N, ZHAO S R, et al. Experimental quantum switching for exponentially superior quantum communication complexity[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(12): 120504.
- [122] GOUR G. Comparison of quantum channels by superchannels[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019, 65(9): 5880-5904.
- [123] CHIRIBELLA G, TOIGO A, UMANITÀ V. Normal completely positive maps on the space of quantum operations[J]. *Open Systems & Information Dynamics*, 2013, 20(1): 1350003.
- [124] WECHS J, ABBOTT A A, BRANCIARD C. On the definition and characterisation of multipartite causal (non) separability[J]. *New Journal of Physics*, 2019, 21(1): 013027.
- [125] ARAÚJO M, BRANCIARD C, COSTA F, et al. Witnessing causal nonseparability[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(10): 102001.
- [126] LE T P, MERONI C, STURMFELS B, et al. Quantum correlations in the minimal scenario[EB/OL]. (2021-11-11). <https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.06270>.