

Hopf分岔系统的参数化镇定方法

陆金波, 侯晓荣, 罗 敏

(电子科技大学能源科学与工程学院 成都 611731)

【摘要】针对Hopf分岔系统镇定问题, 提出了一种参数化镇定方法。应用该方法设计的控制器阶次较低, 结构简单, 不含有平衡点的值, 不改变原系统平衡点的位置。添加控制器后能够较好地改善原系统分岔点附近的特性, 实现对原系统的Hopf分岔甚至混沌状态的稳定控制。根据Hurwitz判据推导了参数化控制器的约束条件, 并用柱形代数剖分算法求得了控制器的参数区间, 在区间内任意一组参数都能够镇定系统的状态。以Lorenz系统为例, 展开说明了该参数化镇定方法对控制器的设计过程, 并进行了仿真。仿真结果验证了该方法的有效性。

关键词 柱形代数剖分; Hopf分岔控制; Lorenz系统; 参数化控制器

中图分类号 TP13 文献标志码 A doi:10.3969/j.issn.1001-0548.2016.06.012

Parametric Stabilization Method for a Class of Hopf Bifurcation Systems

LU Jin-bo, HOU Xiao-rong, and LUO Min

(School of Energy Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Chengdu 611731)

Abstract A parametric stabilization method is proposed for the problem of Hopf bifurcation system control. Compared with the existing methods, the controller designed by this method has a lower controller order and a simpler structure, and it does not contain equilibrium points. The method keeps equilibrium of the origin system unchanged. Under the control, the characteristics of the original system will be improved at equilibrium, and the system states of Hopf bifurcation or chaos can be controlled to stable. Using the Hurwitz criterion, the constraints of the parametric controller are derived. The idea of cylindrical algebraic decomposition (CAD) is employed to compute the constraints to find the parameter ranges of the designed controller, and the controller can be designed to stabilize the system by using any feasible control parameters in the ranges. Taking Lorenz system as an example, the controller design process of the method and numerical simulations are discussed. The simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words cylindrical algebraic decomposition; Hopf bifurcation control; Lorenz system; parametric controller

分岔作为非线性系统的一种常见现象, 近年来相关研究大量涌现^[1-3]。分岔控制的目的是为了改变系统动态性能以获得期望的系统特性, 其主要目标包括: 延迟系统分岔的发生、镇定不稳定的分岔、改变已有分岔点的参数值、修正分岔的形状和类型、改善分岔点附近的系统特性, 或者这些目标的某些组合^[4]。Hopf分岔是分岔中的一种重要类型, 其实际意义在于Hopf分岔是系统状态处于稳定和不稳定之间的一种临界状态, 所以对其研究非常重要, 相关研究成果也很多^[5-7]。

在实际的工程系统中, Hopf分岔系统也广泛存在, 涵盖了很多的领域, 包括: 电力系统^[8]、电子

技术^[9]、网络技术^[10]、新能源^[11]、光学技术^[12]等, 而很多工程中的问题在实际分析和计算时都会涉及到Hopf分岔的控制问题。Hopf分岔的控制是控制工程和电子技术等领域的重点研究方向之一, 有大量的研究成果, 包括实际工程应用^[13]和理论研究^[14]。

随着研究的深入, 参数化控制器逐步应用在了Hopf分岔系统的控制中^[15-16]。文献[15]在这方面做出了重要的工作, 其根据状态反馈理论, 给出了一种相对通用的Hopf分岔控制形式, 并通过实例对控制器的参数进行了求解和仿真。文献[16]对文献[15]的部分工作进行了进一步的深入, 对控制器进行了简化, 在控制参数平面上绘制了约束条件曲线, 并

收稿日期: 2015-07-28; 修回日期: 2016-03-16

基金项目: 国家自然科学基金(61374001, 61074189)

作者简介: 陆金波(1978-), 男, 博士, 主要从事非线性控制、鲁棒控制等方面的研究。

以此对系统的分岔情况进行了分析。

尽管在Hopf分岔控制器设计方面已经存在大量的研究,但是目前的研究文献中依然存在一定的局限性,如控制器形式复杂不够通用、控制阶次较高、约束条件求解繁琐、参数求解不充分。在现有的研究中,文献[15]使用参数化控制的方法在Hopf分岔控制方面进行了很好的应用,用不等式的方式对求出的控制器参数范围进行了描述,分岔控制效果明显。但是,该文献设计的控制器中含有系统全部的平衡点,表达式结构非常复杂,阶次很高,控制器的阶次是原系统平衡点的整数倍。文献[16]对这种参数化的控制器进行了明显的简化,去掉了原控制器中大部分的高次项,使得控制器的阶次降低,使用柱形代数剖分方法将控制器的约束条件绘制在了二维空间中,并对各个子空间的分岔情况进行了分析。但是该文献中设计的控制器阶次依然较高,且控制器中含有原系统平衡点的值。文献[17]对文献[16]中的参数化方法做了进一步的应用,但是没有对控制器形式进行改进。

因此本文提出了一个简单通用的参数化控制器设计方法,使用该方法设计的控制器阶次更低,控制器中不含有系统平衡点的值,并且不会改变原系统平衡点的位置。

1 系统描述和参数化控制器设计

1.1 Hopf分岔系统描述

考虑如下具有Hopf分岔的非线性系统:

$$\dot{X} = F(X, \mu) \quad (1)$$

式中, $\dot{X}$ 表示 X 针对时间 t 的导数; $X \in R^n$ 表示 X 是实数域 n 维的状态向量; $\mu \in R$ 是一个标量参数,称为分岔参数。注意:通常 μ 可以考虑成 m 维的向量, $1 \leq m \leq n$ 。 $F(X, \mu)$ 是一个具有Hopf分岔的非线性多项式系统矩阵,并且满足如下的条件:

1) 令 X^* 为系统的平衡点,使得针对任何 μ 都存在 $F(X^*, \mu) \equiv 0$;

2) 当 μ 变化使得 $\mu = \mu^*$ 时,系统在平衡点 X^* 附近将产生一簇极限环。

1.2 参数化控制器设计

针对系统式(1)设计一个通用的非线性状态反馈控制形式:

$$\dot{X} = F(X, \mu) + u(X, \mu) \quad (2)$$

增加控制器后,为了不改变原系统的平衡点值,控制器 u 需要满足如下的条件,即:

$$u(X^*, \mu) = 0, u(X, \mu^*) \neq 0$$

针对系统式(1),考虑通用性,令:

$$F(X, \mu) = [f_1(X, \mu), f_2(X, \mu), \dots, f_n(X, \mu)]^T$$

式中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。设:

$$u(X, \mu) = [0, 0, \dots, u_j(X, \mu), 0, \dots, 0]^T \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_j = g(X, \mu) f_j(X, \mu) + \sum_{i=1, i \neq j}^n c_{0i} f_i(X, \mu) \quad (3)$$

式中,

$$g(X, \mu) = c_1 + \sum_{k=1}^n (c_{k+1} x_k + c_{n+k+1} x_k^2)$$

$\{c_{0i}, c_1, c_{k+1}, c_{n+k+1} \in R\}$ 是控制器的参数。这样控制器 $u(X, \mu)$ 能够镇定系统式(1)并且稳定系统的分岔^[6]。

注1:该控制器中 $g(X, \mu)$ 形式简单,是由系统状态变量组成的多项式,且其中不包含系统的平衡点,而且通常情况下2次项是不需要的。相较于文献[15-16],设计的控制器更简单、适用,控制器中不含有系统的平衡点。

注2: $u(X, \mu)$ 中可以有多个分量,但是通常一个分量就能满足控制系统的要求。

注3:控制器式(3)是由原系统状态方程的矢量组合构成,控制器本身不含有系统平衡点的值,且增加控制器后不会改变原系统平衡点的位置。

注4:式(3)所描述的控制器适用于大多数的系统,但是给出严格的数学证明比较困难。接下来的讨论中将通过一个三维系统的控制器设计来展开说明设计过程。

1.3 主要定理

定理 1 对于 k 阶实多项式 $B(X)$ 和 m 阶实多项式 $A(X)$, $X \in R^n$, $k \geq 1$, $m \geq 1$,如果在 $X = X_0$ 处存在 $B(X_0) = 0$,则必然存在 p 阶实多项式 $L(X)$, $0 \leq p < k$,使得 $L(X_0) = A(X_0)$ 。

证明:

根据多项式除法, $A(X)$ 可以写为:

$$A(X) = \bar{A}(X)B(X) + L_{A/B}(X)$$

式中, $\bar{A}(X)$ 是 $B(X)$ 除 $A(X)$ 的整式部分; $L_{A/B}(X)$ 为 $B(X)$ 除 $A(X)$ 的余式部分。令 $L(X) = L_{A/B}(X)$,则在根 X_0 处必然存在 $L(X_0) = A(X_0)$ 。

定理 2 一个具有Hopf分岔的3阶非线性系统可以描述为以下的形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(X, \mu) \\ \dot{x}_3 = f_3(X, \mu) \end{cases} \quad (4)$$

式中, μ 是分岔参数; $X = [x_1, x_2, x_3]^T$ 。系统式(4)的Jacobi矩阵满秩。考虑式(3)并适当简化,可以得

到如下的参数化控制器:

$$u(X, \mu) = [u_1(X, \mu), u_2(X, \mu), u_3(X, \mu)]^T \quad (5)$$

$$u_j(X, \mu) = g(X, \mu)f_j(X, \mu) + \sum_{k=1, k \neq j}^3 c_{0k}f_k(X, \mu) \quad (6)$$

式中, $u_j(X, \mu) \neq 0$; $u_k(X, \mu) = 0$; $j = 1, 2, 3$;
 $g(X) = c_1 + c_2x_1 + c_3x_2 + c_4x_3$; $\{c_{0k}, c_i \in R, i = 1, 2, 3, 4\}$;
 c_{0k} 、 c_i 是控制器参数。则在Hurwitz判据确定的约束条件内, 通过选择控制器参数 c_{0k} 、 c_i , 系统式(4)能够实现在平衡点附近的控制。

证明:

不失一般性, 通常控制器式(6)可以写成如下的简化表达形式:

$$u_2(X, \mu) = g(X, \mu)f_2(X, \mu) + c_{01}f_1(X, \mu) \quad (7)$$

在系统式(4)上增加控制器式(7)后则闭环表达式可以写为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(X, \mu) \\ \dot{x}_2 = f_2(X, \mu) + u_2(X, \mu) \\ \dot{x}_3 = f_3(X, \mu) \end{cases} \quad (8)$$

这样闭环系统的Jacobi矩阵描述为:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

式中,

$$\begin{aligned} j_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} g(X) + c_2 f_2 + c_{01} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ j_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} g(X) + c_3 f_2 + c_{01} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ j_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} g(X) + c_4 f_2 + c_{01} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \end{aligned}$$

设系统的一个平衡点 $X_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$, 则根据Jacobi矩阵, 系统在平衡点处的特征方程描述为:

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - J) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$$

式中,

$$a_0 = 1$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[-c_{01} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} g(X) - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - c_3 f_2 \right]_{X=X_0} \\ a_2 &= \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) g(X) - \right. \\ &\quad \left. c_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 - c_4 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} f_2 + c_3 f_2 \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_{01} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \\ & \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right]_{X=X_0} \\ a_3 &= \left[\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \right. \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) g(X) + \\ & \quad \left(-c_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + c_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - c_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \right. \\ & \quad \left. c_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - c_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right) f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \\ & \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \\ & \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right]_{X=X_0} \end{aligned}$$

通过特征方程系数可以看出, 当 $X = X_0$, $\frac{\partial f_n}{\partial x_j}$ 和

f_n 的值是确定的, $f_n = f_n(X, \mu)$, $n = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ 。且由于原系统Jacobi矩阵满秩, 则在特征方程系数 a_1 、 a_2 、 a_3 的表达式中与控制器参数相关的多项式不可能同时为零, 因此 a_1 、 a_2 、 a_3 的数值和符号可以通过 c_{01} 、 c_i 进行改变。又因为 $a_0 > 0$, 根据Hurwitz判据并考虑到定理1, 设系统式(4)的平衡点方程为 $G(X_0) = 0$, 则对于控制器参数可以得到如下的约束条件:

$$S: \begin{cases} l_1 = L_{a_1/G}(X_0) > 0 \\ l_2 = L_{a_2/G}(X_0) > 0 \\ l_3 = L_{a_3/G}(X_0) > 0 \\ l_4 = L_{a_4/G}(X_0) > 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中, $a_4 = a_1 a_2 - a_0 a_3$ 。因此, 在Hurwitz判据确定的约束条件内, 通过选择适当的控制器参数 c_{0k} 和 c_i , 能够在平衡点附近实现对系统式(4)的稳定控制。

注5: 约束条件 l_4 中, 如果出现 $l_4 = 0$ 则说明系统处于临界稳定状态, 即Hopf分岔, 其状态特性表现为等幅震荡; 如果 $l_4 > 0$, 则系统状态收敛, 即稳定, 接下来的分析设计中将只考虑稳定时的情况。

2 Lorenz系统控制器设计

人们已经在量子物理、电子电路、磁物理、通讯技术、无线探测等众多领域中对Lorenz系统进行了大量的研究工作。接下来将使用Lorenz系统对控

制器设计过程进行说明和验证。

2.1 Lorenz系统描述

Lorenz系统可以描述为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x-y) \\ \dot{y} = bx - xz - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (10)$$

式中, a 、 b 、 c 是可变参数, 这些参数对系统特性有着直接影响, 细微的参数变化都有可能系统导致系统轨迹由稳定转变为分岔, 甚至是混沌^[15]。根据式(10), 求出系统的平衡点方程为:

$$x_0^3 - (bc - c)x_0 = 0 \quad (11)$$

2.2 控制器设计及约束条件计算

根据式(7), 控制器可以设计为:

$$u_2 = \dot{y}(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z) + c_0\dot{x}$$

式中, $c_0 \in R$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$, $c_3 \in R$, $c_4 \in R$ 是控制器参数。根据式(10), 控制器变为:

$$u_2 = (bx - xz - y)(c_1 + c_2x + c_3y + c_4z) - c_0a(x - y) \quad (12)$$

Lorenz系统的状态特性直接受到系统参数的影响, 随着系统参数的变化, 系统状态轨迹会从稳定转变为分岔甚至混沌。为了验证控制器的性能, 本文选择系统参数 $a=4$, $b=16$, $c=1$, 根据文献[15], 没有控制器时系统的状态特性是混沌的。将系统参数带入Lorenz系统式(4), 可以得到新的系统为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -4(x-y) \\ \dot{y} = 16x - xz - y \\ \dot{z} = xy - z \end{cases} \quad (13)$$

根据式(13), 系统在平衡点处的方程为:

$$x_0^3 - 15x_0 = 0 \quad (14)$$

为了简化计算过程, 令 $c_0=0$, $c_3=0$, 控制器可以简写为:

$$u_2(x, y, z) = \dot{y}(c_1 + c_2x + c_4z) \quad (15)$$

将式(15)带入, 计算和整理后的系统约束条件为:

$$l_1 = c_4x_0^2 + c_2x_0 + c_1 + 6 \quad (16)$$

$$l_2 = (5 + 5c_1 + 16c_4)x_0^2 + 16c_2x_0 - 59c_1 - 55 \quad (17)$$

$$l_3 = (120c_4 + 12c_1 + 12)x_0^2 + 120c_2x_0 - 60c_1 - 60 \quad (18)$$

$$l_4 = (5c_1^2 + 16c_2^2 + 240c_4^2 + 32c_1c_4 - 4c_4 + 18)x_0^2 + (32c_1c_2 + 480c_2c_4 - 4c_2)x_0 - 59c_1^2 - 349c_1 - 270 \quad (19)$$

充分求解约束条件式(16)~式(19)组成的不等式组非常困难。式(16)~式(19)平衡点处的方程式(14)构成了一个半代数集, 使用柱形代数剖分方法可以对这个半代数集进行充分求解, 从而将不等式组的求解问题转换成控制器参数空间的区域划分问题。

3 数值化计算及仿真

下面将进行数值化仿真。由于控制器式(15)中含有 c_1 、 c_2 、 c_4 共3个参数, 直接用柱形代数剖分方法对控制器的半代数集求解后得到的参数区间将由多个不等式组描述, 不够直观。为了进一步简化约束条件, 在系统的3个平衡点 $E_0=(0,0,0)$, $E_-=(-\sqrt{15}, -\sqrt{15}, 15)$, $E_+=(+\sqrt{15}, +\sqrt{15}, 15)$ 处对约束条件进行计算和分析。

在平衡点 E_0 处:

$$l_{10} = c_1 + 6 \quad (20)$$

$$l_{20} = -59c_1 - 55 \quad (21)$$

$$l_{30} = -60(c_1 + 1) \quad (22)$$

$$l_{40} = -59c_1^2 - 349c_1 - 270 \quad (23)$$

在平衡点 E_- 处:

$$l_{1-} = c_1 - \sqrt{15}c_2 + 15c_4 + 6 \quad (24)$$

$$l_{2-} = 16c_1 - 16\sqrt{15}c_2 + 240c_4 + 20 \quad (25)$$

$$l_{3-} = 120c_1 - 120\sqrt{15}c_2 + 1800c_4 + 120 \quad (26)$$

$$l_{4-} = 16c_1^2 + 240c_2^2 + 3600c_4^2 + 480c_1c_4 - 32\sqrt{15}c_1c_2 - 480\sqrt{15}c_2c_4 - 4c_1 - 60c_4 + 4\sqrt{15}c_2 \quad (27)$$

在平衡点 E_+ 处:

$$l_{1+} = c_1 + \sqrt{15}c_2 + 15c_4 + 6 \quad (28)$$

$$l_{2+} = 16c_1 + 16\sqrt{15}c_2 + 240c_4 + 20 \quad (29)$$

$$l_{3+} = 120c_1 + 120\sqrt{15}c_2 + 1800c_4 + 120 \quad (30)$$

$$l_{4+} = 16c_1^2 + 240c_2^2 + 3600c_4^2 + 480c_1c_4 + 32\sqrt{15}c_1c_2 + 480\sqrt{15}c_2c_4 - 4c_1 - 60c_4 - 4\sqrt{15}c_2 \quad (31)$$

由于系统稳定, 分析式(20)~式(22)可得:

$$c_1 \in (-6, -1)$$

而根据式(23), 有:

$$l_{40} = 0 - (59c_1 + 54)(c_1 + 5) \quad (32)$$

从而可以得到 $c_1 \in [-5, -1]$, 当 $c_1 = -5$ 时, $l_{40} = 0$ 。

本文只考虑稳定的情况, 则 $c_1 \in (-5, -1)$ 。接下来将使用柱形代数剖分计算系统的控制器参数。

为了简化计算过程, 选择 $c_1 = -3$, 此时系统在平衡点 E_0 处的状态是稳定的。 $c_1 = -3$ 带入约束条件式(24)~式(31), 这样使用柱形代数剖分方法可以得到控制器的参数区间。新的约束条件为:

$$l_{1-} = -\sqrt{15}c_2 + 15c_4 + 3 \quad (33)$$

$$l_{2-} = -16\sqrt{15}c_2 + 240c_4 - 28 \quad (34)$$

$$l_{3-} = -120\sqrt{15}c_2 + 1800c_4 - 240 \quad (35)$$

$$l_{4-} = \frac{4}{5}(5c_2 - 5\sqrt{15}c_4 + \sqrt{15})(60c_2 - 60\sqrt{15}c_4 + 13\sqrt{15}) \quad (36)$$

$$l_{1+} = \sqrt{15}c_2 + 15c_4 + 3 \quad (37)$$

$$l_{2+} = 16\sqrt{15}c_2 + 240c_4 - 28 \quad (38)$$

$$l_{3+} = 120\sqrt{15}c_2 + 1800c_4 - 240 \quad (39)$$

$$l_{4+} = \frac{4}{5}(5c_2 + 5\sqrt{15}c_4 - \sqrt{15})(60c_2 + 60\sqrt{15}c_4 - 13\sqrt{15}) \quad (40)$$

此时控制器还有 c_2 和 c_4 两个参数需要确定, 根据系统在平衡点 E_- 和 E_+ 处的情况使用柱形代数剖分计算可以得出 c_2 和 c_4 的参数范围。

由约束条件式(33)~式(40)组成的方程组的隐函数曲线被绘制在二维空间上, 如图1所示。按照柱形代数剖分理论, 对这些函数曲线划分的区域进行搜索, 最终得到区域 Q_s , 在该区域内, 选择参数 c_2 和 c_4 能够实现系统的镇定。区域 Q_s 的边界是 L_1 和 L_2 , 其中 L_1 是式(40)的方程 $l_{4+} = 0$ 的一部分, L_2 是式(36)的方程 $l_{4-} = 0$ 的一部分, 其函数方程分别为:

$$L_1: \begin{cases} c_2 \leq 0 \\ 60c_2 + 60\sqrt{15}c_4 - 13\sqrt{15} = 0 \end{cases}$$

$$L_2: \begin{cases} c_2 \geq 0 \\ -60c_2 + 60\sqrt{15}c_4 - 13\sqrt{15} = 0 \end{cases}$$

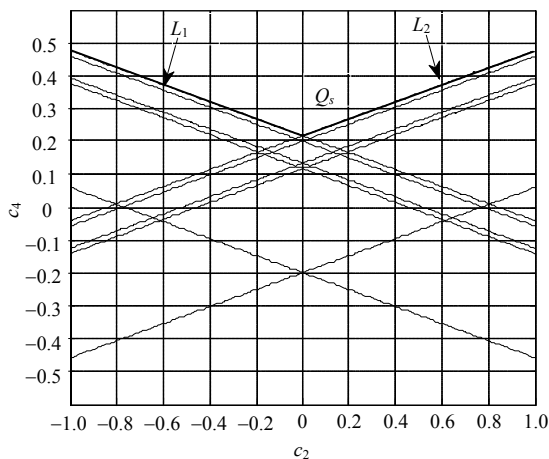


图1 系统约束条件曲线在 c_2 - c_4 平面的划分情况

为了证明控制器的有效性, 对系统进行了数值化仿真, 仿真结果如图2~图4所示。在这种情况下, 控制器参数 $c_0 = 0$, $c_1 = -3$, $c_2 = 1$, $c_4 = 1$ 。

图2是系统在 E_0 处的轨迹, 轨迹是收敛的。图3是在 E_- 处的轨迹, 图4是在 E_+ 处的轨迹, 这两个轨迹都是收敛的。

具有多个平衡点的非线性系统控制时, 通常只能保证系统状态在平衡点附近的局部稳定性, 即在

平衡点附近的一个邻域内能够使系统轨迹收敛到该平衡点。本文仿真时系统在平衡点 E_0 、 E_- 、 E_+ 处的初始值分别为: $(0, 1, -1)$, $(-4, -4, 16)$, $(4, 4, 16)$ 。

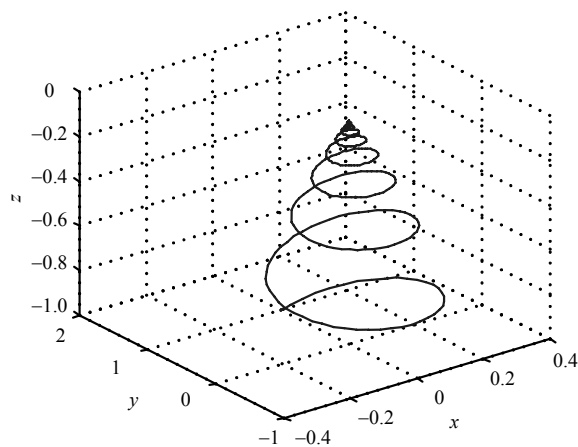


图2 当 $c_1 = -3$ 时, 在 E_0 处稳定的系统轨迹曲线

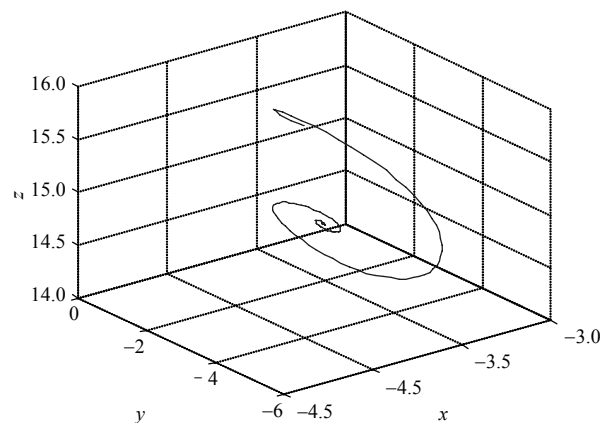


图3 系统在 E_- 处稳定的轨迹曲线

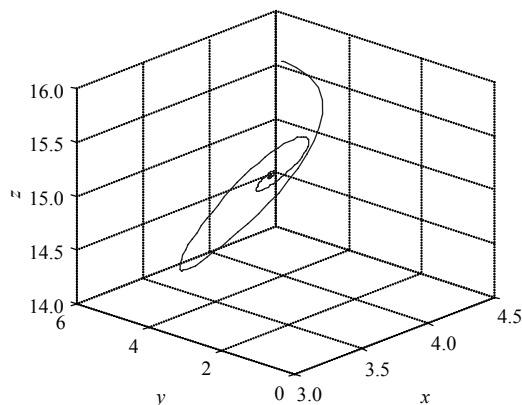


图4 系统在 E_+ 处稳定的轨迹曲线

4 结束语

本文针对一类具有Hopf分岔的非线性系统提出了一种参数化镇定方法, 并对三维时情况进行了证明。使用该方法, 设计的控制器结构简单, 控制器

参数求解充分, 不会改变原系统平衡点的位置, 能够实现系统的稳定控制。以Lorenz系统作为实例, 说明了参数化控制器的设计过程。最后通过数值化仿真证明了本文提出方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] 毕闯, 张千, 向勇, 等. 峰值电流控制同步开关变换器的分岔控制研究[J]. 电子科技大学学报, 2015, 44(1): 67-71.
BI Chuang, ZHANG Qian, XIANG Yong, et al. Study of bifurcation control of peak current-mode controlled synchronous switched converter[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2015, 44(1): 67-71.
- [2] 李绍荣, 廖晓峰. 连续时延神经网络的Hopf分岔现象研究[J]. 电子科技大学学报, 2002, 31(2): 163-167.
LI Shao-rong, LIAO Xiao-feng. Study of bifurcation phenomenon for neural network with continuously time delay[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2002, 31(2): 163-167.
- [3] PHADKE A, FOZDAR M, NIAZI K, et al. New technique for computation of closest Hopf bifurcation point using real-coded genetic algorithm[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2011, 5: 11-18.
- [4] CHEN G, MOIOLA J, WANG H. Bifurcation control: Theories, methods, and applications[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10: 511-548.
- [5] 张中华, 付景超, 邓冠男. 一个类Lorenz系统的Hopf分岔分析及分岔控制[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2015, 12(1): 96-103.
ZHANG Zhong-hua, FU Jing-chao, DENG Guan-nan. Hopf bifurcation analysis and bifurcation control of a Lorenz-like system[J]. Complex Systems and Complexity Science, 2015, 12(1): 96-103.
- [6] ALEXANDER J, TANG W, CHEN G. Chaos control in duffing system using impulsive parametric perturbations[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2010(57): 305-309.
- [7] XIANG Y, ZHANG Q, HU J. Simulation study of bifurcation control in synchronous switching converter[C]// International Conference Communications, Circuits and Systems (ICCCAS). [S.l.]: IEEE, 2013, 2: 463-466.
- [8] HUANG M, TSE C, WONG S, et al. Low-frequency Hopf bifurcation and its effects on stability margin in three-phase PFC power supplies connected to non-ideal power grid[J]. IEEE Transactions on Circuits and System, 2013, 60(12): 3328-3340.
- [9] DEIVASUNDARI P, UMA G, SANTHI R. Experimental verification of Hopf bifurcation in pulse-width modulated inverter fed cage induction motor drive system[J]. IET Power Electronics, 2014, 7: 340-349.
- [10] LIU F, WANG H, GUAN Z. Stability analysis and control of bifurcation in a TCP fluid flow model of wireless networks[C]//The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). [S.l.]: IEEE, 2012: 1026-1030.
- [11] YANG L, XU Z, ØSTERGAARD J, et al. Oscillatory stability and eigenvalue sensitivity analysis of a DFIG wind turbine system[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2011, 26: 328-339.
- [12] CHLOUVERAKIS K, ASWAD K, HENNING I, et al. Determining laser linewidth parameter from Hopf bifurcation minimum in lasers subject to optical injection[J]. Electronics Letters, 2003, 39: 1185-1187.
- [13] LIU F, XIONG G, GUAN Z, et al. Stability analysis and control Hopf bifurcation in a FAST TCP model[C]//The 32nd Chinese Control Conference (CCC). [S.l.]: IEEE, 2013: 1076-1080.
- [14] XIAO M, ZHENG W, CAO J. Hopf bifurcation of an $(n+1)$ -neuron bidirectional associative memory neural network model with delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24: 118-132.
- [15] PEI Y, CHEN G. Hopf bifurcation control using nonlinear feedback with polynomial functions[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(5): 1683-1704.
- [16] WU Z, YU P. A method for stability and bifurcation control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51: 1019-1023.
- [17] WU Z, DING R, CHEN Y. Classification of parametrically constrained bifurcations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31: 135-142.

编辑 漆 蓉