

· 物理电子学 ·

# 任意循环过程热机效率的极值研究

苏万春

(广州航海高等专科学校基础部 广州 510725)

【摘要】根据卡诺定理给出了热机的循环效率极大值问题。根据 $P$ - $V$ 图、 $T$ - $S$ 图、热力学第二定律,对任意循环过程的热机效率极大值问题进行了研究。通过 $P$ - $V$ 图对循环过程的分析, $T$ - $S$ 图积分法、外切法、分解法对循环过程的分析,热力学第二定律对循环过程的分析,得出了任意循环过程热机效率以卡诺循环的热机效率为最大极限值的结论。

关键词  $P$ - $V$ 图;  $T$ - $S$ 图; 热力学第二定律; 热机效率; 卡诺循环  
中图分类号 O414.1 文献标识码 A

## Study of the Extreme Value of the Efficiency of Heat Engines in the Process of Arbitrary Cycles

SU Wan-chun

(Basic Courses Department Guangzhou Maritime College Guangzhou 510725)

**Abstract** Carnot's Theorem discusses the extreme value of the efficiency of heat engines' cycles. Starting from the graphs of  $P$ - $V$  and  $T$ - $S$  and the second law of thermodynamics, the extreme value of the efficiency of heat engines in the process of arbitrary cycles is studied. The result shows that the efficiency of the heat engine in Carnot cycle is the greatest of all arbitrary cycles.

**Key words**  $P$ - $V$  graph;  $T$ - $S$  graph; the second law of thermodynamics; efficiency of heat engines; Carnot cycle

卡诺于1824年提出了卡诺定理:在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切可逆热机,其效率都相等,与工作物质无关;在相同的高温热源和相同的低温热源之间工作的一切不可逆热机,其效率都小于可逆热机的效率。热学教材中,以理想气体为工作物质,导出了理想气体准静态正卡诺循环的效率只由高低温度热源的温度 $T_1$ 和 $T_2$ 决定,其效率为: $\eta_c = 1 - (T_1/T_2)$ 。其他任意循环过程效率都不得大于 $\eta_c$ 。本文从 $P$ - $V$ 图、 $T$ - $S$ 图、热力学第二定律出发,对任意循环过程热机效率极值进行了研究。

### 1 $P$ - $V$ 图中任意循环过程热机效率的极值

任意循环过程在 $P$ - $V$ 图中可用一条任意的闭合曲线 $ABCD$ 表示,如图1所示。假设闭合曲线 $ABCD$ 表示一任意的正循环过程,其中 $T_1$ 和 $T_2$ 分别表示正循环过程中的最高与最低温度。下面以理想气体为工质,对任意循环过程热机效率的极值进行分析。一个任意的可逆循环过程可用一系列的微小的可逆卡诺循环来代替。将图1中的 $ABCD$ 循环分解成 $n$ 个微小的可逆卡诺循环,每个微小的可逆卡诺循环的最高温度分别为 $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n}$ ,它们的最低温度分别为 $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n}$ ,当 $n \rightarrow \infty$ 时,第 $i$ 个微小的卡诺循环的绝热过程与第 $i+1$ 个微小的卡诺循环的绝热过程重合(图1中的虚线部分),其过程方向相反,其体积可认为近似相等。因此,整个循环过程中工质在高温热源吸收的热量为:

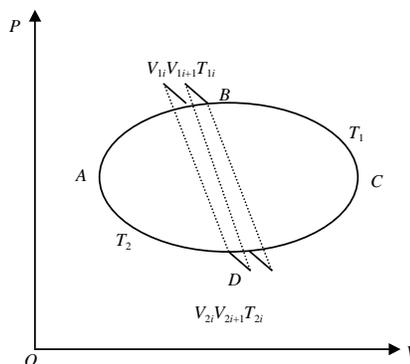


图1  $P$ - $V$ 图中任意正循环过程

收稿日期:2005-03-30

作者简介:苏万春(1966-),男,硕士,讲师,主要从事热力学与统计物理学方面的研究。

$Q_1 = \sum_{i=1}^n \gamma RT_{1i} |\ln(V_{i+1}/V_i)| = \gamma RT_{11} |\ln(V_{12}/V_{11})| + \gamma RT_{12} |\ln(V_{13}/V_{12})| + \dots + \gamma RT_{1n} |\ln(V_{1n}/V_{1n-1})|$  , 因为  $T_1 = \max\{T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n}\}$  , 所以有 :

$$Q_1 \geq \gamma RT_1 [|\ln(V_{12}/V_{11})| + |\ln(V_{13}/V_{12})| + \dots + |\ln(V_{1n}/V_{1n-1})|] \quad (1)$$

整个循环过程中工质在低温热源放出的热量为 :

$Q_2 = \sum_{i=1}^n \gamma RT_{2i} |\ln(V_{2i+1}/V_{2i})| = \gamma RT_{21} |\ln(V_{22}/V_{21})| + \gamma RT_{22} |\ln(V_{23}/V_{22})| + \dots + \gamma RT_{2n} |\ln(V_{2n}/V_{2n-1})|$  , 因为  $T_2 = \min\{T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n}\}$  , 所以有 :

$$Q_2 \geq \gamma RT_2 [|\ln(V_{22}/V_{21})| + |\ln(V_{23}/V_{22})| + \dots + |\ln(V_{2n}/V_{2n-1})|] \quad (2)$$

式中  $\gamma$  为摩尔数 ;  $R$  为摩尔气体常量。由式(1)、(2)得 :

$$\frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{\gamma RT_2 [|\ln(V_{22}/V_{21})| + |\ln(V_{23}/V_{22})| + \dots + |\ln(V_{2n}/V_{2n-1})|]}{\gamma RT_1 [|\ln(V_{12}/V_{11})| + |\ln(V_{13}/V_{12})| + \dots + |\ln(V_{1n}/V_{1n-1})|]} \quad (3)$$

对任意的微小可逆卡诺循环的绝热过程, 由绝热方程得到<sup>[1]</sup> :

$$V_{22}/V_{21} = V_{12}/V_{11}, V_{23}/V_{22} = V_{13}/V_{12}, \dots, V_{2n}/V_{2n-1} = V_{1n}/V_{1n-1} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得 :  $Q_2/Q_1 \geq T_2/T_1$  ,  $1 - (Q_2/Q_1) \leq 1 - (T_2/T_1)$  ,  $\eta \leq \eta_c$ 。上式表明 :  $P$ - $V$ 图中任意循环过程热机效率  $\eta$  以卡诺循环的热机效率  $\eta_c$  为最大极限值。

## 2 $T$ - $S$ 图中任意循环过程热机效率的极值

计算任意循环过程热机的效率,  $T$ - $S$ 图与 $P$ - $V$ 图相比, 简单方便得多。对任意循环过程的热机效率分3种方法进行讨论。

### 2.1 积分法

在 $T$ - $S$ 图中有一任意的正循环过程 $ABCD$ , 如图2所示, 在图中很容易找到整个循环过程中的最高温度 $T_1$ (对应图2的 $B$ 点)与最低温度 $T_2$ (对应图2的 $D$ 点),  $A$ 、 $C$ 是吸热、放热的分界点, 由定积分的定义可以求得任意循环过程 $ABCD$ 吸收的热量 $Q_1$ 与放出的热量 $Q_2$ 为 :  $Q_1 = \int_{ABC} T(S)dS$  , 其路径沿 $ABC$ 。  $Q_2 = \int_{ADC} T(S)dS$  , 其路径沿 $ADC$ 。由定积分的性质得 :

$$Q_1 = \int_{ABC} T(S)dS \quad T_1(S_2 - S_1) \quad (5)$$

$$Q_2 = \int_{ADC} T(S)dS \quad T_2(S_2 - S_1) \quad (6)$$

将式(6)除以式(5)得 :  $Q_2/Q_1 = T_2(S_2 - S_1)/T_1(S_2 - S_1)$  ,  $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$  ,  $1 - (Q_2/Q_1) = 1 - (T_2/T_1)$  ,  $\eta = \eta_c$ 。上式表明 :  $T$ - $S$ 图中任意循环过程热机效率  $\eta$  以卡诺循环的热机效率  $\eta_c$  为最大极限值。

### 2.2 外切法

仍以图2中任意正循环过程 $ABCD$ 为例, 作任意的正循环过程 $ABCD$ 的外切矩形 $EFGHE$ <sup>[2]</sup>, 如图3所示。外切矩形 $EFGHE$ 的正循环就是由两个等温过程 $EF$ 、 $GH$ 和两个绝热过程 $FG$ 、 $HE$ 所构成的正卡诺循环, 其高温热源的温度为 $T_1$ , 其低温热源的温度为 $T_2$ 。其热机效率为 :

$$\eta_c = 1 - (Q_{c2}/Q_{c1}) = W_c/Q_{c1} = 1 - (T_2/T_1) \quad (7)$$

式中  $W_c$  为正卡诺循环 $EFGHE$ 对外做的净功 ; 相当于外切矩形 $EFGHE$ 的面积。  $Q_{c1}$  为正卡诺循环 $EFGHE$ 在高温吸收的热量。对于任意的正循环过程 $ABCD$ 的热机效率为 :

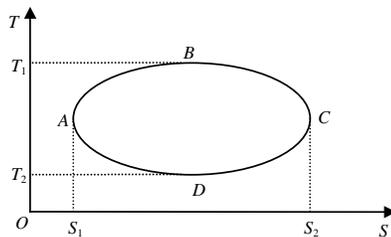


图2  $T$ - $S$ 图中任意正循环过程

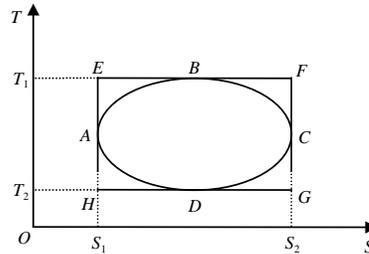


图3  $T$ - $S$ 图中任意正循环过程

$$\eta = 1 - (Q_2/Q_1) = W/Q_1 \tag{8}$$

式中  $W$  为任意正循环过程  $ABCD$  对外做的净功；相当于闭合曲线  $ABCD$  的面积。 $Q_1$  为任意正循环过程  $ABCD$  在高温吸收的热量。由图3知道： $Q_{c1} - Q_1 = W_c - W$ ， $Q_{c1} - W_c = Q_1 - W$ ，因  $Q_{c1} = Q_1$ ，代入上式得：

$$(Q_{c1} - W_c)/Q_{c1} = (Q_1 - W)/Q_1, 1 - (W_c/Q_{c1}) = 1 - W/Q_1 \tag{9}$$

将式(7)、(8)代入式(9)得： $1 - \eta_c = 1 - \eta$ ， $\eta = \eta_c$ 。

上式表明： $T$ - $S$ 图中任意循环过程热机效率  $\eta$  以卡诺循环的热机效率  $\eta_c$  为最大极限值。

### 2.3 分解法

以上述任意正循环过程  $ABCD$  为例。任意循环过程可用一系列的微小的可逆卡诺循环来代替<sup>[3]</sup>，如图4所示。将图中的  $ABCD$  循环分解成  $n$  个微小的可逆卡诺循环，每个微小的可逆卡诺循环的最高温度分别为： $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1n}$ ，他们的最低温度分别为： $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n}$ 。当  $n \rightarrow \infty$  时，第  $i$  个微小的卡诺循环的绝热过程与第  $i+1$  个微小的卡诺循环的绝热过程重合(图4中的虚线部分)，其过程方向相反。对于第  $i$  个微小的可逆卡诺循环，如图5所示。其吸收的热量  $Q_{1i}$  为： $Q_{1i} = T_{1i} \Delta S_i$ ，整个  $ABCD$  任意循环过程中吸收的热量  $Q_1$ 。

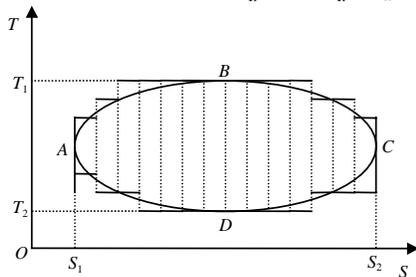


图4  $T$ - $S$ 图中任意正循环过程

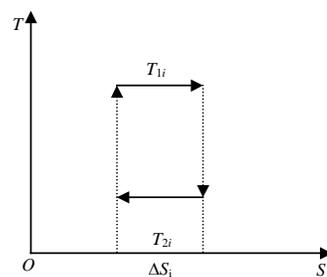


图5 第  $i$  个微小的可逆卡诺循环

$Q_1 = \sum_{i=1}^n Q_{1i} = T_{11} \Delta S_1 + T_{12} \Delta S_2 + \dots + T_{1n} \Delta S_n$ ， $Q_1 = \sum_{i=1}^n Q_{1i} \leq T_1 \Delta S_1 + T_1 \Delta S_2 + \dots + T_1 \Delta S_n$ ， $Q_1 = \sum_{i=1}^n Q_{1i} \leq T_1 (\Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n)$ ，即：

$$Q_1 \leq T_1 (S_2 - S_1) \tag{10}$$

同理：对于第  $i$  个微小的可逆卡诺循环其放出的热量  $Q_{2i}$  为： $Q_{2i} = T_{2i} \Delta S_i$ 。整个  $ABCD$  任意循环过程中放出的热量  $Q_2$ ： $Q_2 = \sum_{i=1}^n Q_{2i} = T_{21} \Delta S_1 + T_{22} \Delta S_2 + \dots + T_{2n} \Delta S_n$ ， $Q_2 = \sum_{i=1}^n Q_{2i} \geq T_2 (\Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n)$

$$Q_2 \geq T_2 (S_2 - S_1) \tag{11}$$

由式(11)除以式(10)得：

$$Q_2/Q_1 \geq T_2 (S_2 - S_1) / T_1 (S_2 - S_1)$$
，即  $Q_2/Q_1 \geq T_2/T_1$ ， $1 - (Q_2/Q_1) \leq 1 - (T_2/T_1)$ ， $\eta \leq \eta_c$

上式表明： $T$ - $S$ 图中任意循环过程热机效率  $\eta$  以卡诺循环的热机效率  $\eta_c$  为最大极限值。

### 3 根据热力学第二定律推出任意循环过程热机效率的极值

热力学第二定律有克劳修斯和开尔文两种表述，但其数学形式可用熵增原理表示：当热力学系统从一个平衡态经绝热过程到达另一个平衡态时，它的熵永不减少<sup>[4-5]</sup>，即： $dS \geq 0$ 。

以高温热源(温度为  $T_1$ )、低温热源(温度为  $T_2$ )、热机为研究对象，其研究对象构成封闭的热力学系统，其经过的过程为绝热过程，如图6所示。用  $dS_1$  表示高温热源的熵变， $dS_2$  表示低温热源的熵变， $dS_3$  表示热机的熵变。由于热机经任意循环后其熵变为零。由熵增原理得： $dS = dS_1 + dS_2 = 0$ 。

对于任意的微小过程，由于高温热源相当于放出热量  $\delta Q_1$ ，低温热源相当于吸收热量  $\delta Q_2$ ，上式变为： $-(\delta Q_1/T_1) + (\delta Q_2/T_2) \geq 0$ ，若  $T_1$ 、 $T_2$  温度不变，当系统经过有限过程时，上式变为： $\delta Q_2/T_2 \geq \delta Q_1/T_1$ ， $Q_2/T_2 \geq Q_1/T_1$ 。经整理： $Q_2/Q_1 \geq T_2/T_1$ ， $1 - (Q_2/Q_1) \leq 1 - (T_2/T_1)$ ， $\eta \leq \eta_c$ 。上式表明：任意循环过程热机效率  $\eta$  以卡诺循环的热机效率  $\eta_c$  为最大极限值。

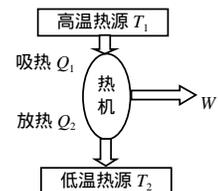


图6 高温热源、低温热源、热机构成的封闭系统

(下转第57页)

## 5 结 论

本文针对传统的D型迭代学习控制的控制律设计方法依赖于被控系统的相对度、相对度增益及高阶微分的问题,提出了一种一阶D型迭代学习控制设计方法。该方法通过对被控对象串联、并联一个一阶子系统的方法构造一个相对度为1、相对度增益可知的虚拟系统,这里的所谓虚拟系统是指并联子系统并不参与实际的控制,是在计算跟踪误差及其导数时而引入的一个虚拟的环节。该方法无需知道被控对象的相对度及相对度增益,不依赖于被控系统的参数,可解决具有高阶相对度系统的高阶微分迭代学习控制问题,对具有高阶相对度的系统,可设计一个一阶D型迭代学习控制律,实现有限区间上的渐近跟踪。理论证明与仿真实例验证了该方法的正确性与有效性。

### 参 考 文 献

- [1] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [2] Sugie T, Ono T. An iterative learning control law for dynamical systems [J]. Automatica, 1991, 27(4): 729-732.
- [3] Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action[J]. International Journal of Systems Science, 1991, 22(3): 447-454.
- [4] Ahn H S, Choi C H, Kim K B. Iterative learning control for a class of nonlinear systems[J]. Automatica, 1993, 29(6): 1 575-1 578.
- [5] Wang D. On D-type and P-type ILC designs and anticipatory approach[J]. International Journal of Control, 2000, 73(10): 890-901.
- [6] Sun M, Wang D. Sampled-data iterative learning control for nonlinear systems with arbitrary relative degree[J]. Automatica, 2001, 37(2): 283-289.
- [7] Sun M, Wang D. Anticipatory iterative learning control for nonlinear systems with arbitrary relative degree[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 2001, 46(5): 783-788.
- [8] Sun M, Wang D. Initial shift issues on discrete-time iterative learning control with system relative degree[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(1): 144-148.

编辑 漆 蓉

(上接第53页)

## 4 结 束 语

任意循环过程热机效率以卡诺循环的热机效率为最大极限值,这是已知的结论。虽然本文通过多种途径、采用了多种方法对该结论进行了证明,但其他的途径与方法依然存在。所有的途径与方法只是对卡诺定理的进一步佐证。

本文研究工作得到广州航海高等专科学校基金(No.200512008)资助,在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [2] 张寅静. 用嫡讨论任意循环的极值效率[J]. 郑州工业大学学报, 2000, 21(2): 105-107.
- [3] 彭菊村, 徐定华. 任意可逆循环效率及其极限问题的探讨[J]. 孝感学院学报, 2000, 20(4): 42-44.
- [4] 秦允豪. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [5] 许崇桂. 热学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.

编辑 孙晓丹