第 36 卷　第 1 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.36　No.1
2007 年 2 月　　Journal of University of Electronic Science and Technology of China　　Feb. 2007

・光电子学工程与应用・

量子比特的门操作与共形映照

廖进昆[1]，侯文婷[2]，刘永智[1]，廖翊韬[1]，代志勇[1]

(1. 电子科技大学光电信息学院　成都　610054;　2. 中国科技大学物理系　合肥　230026)

【摘要】一个双态量子体系即量子比特。在忽略一个位相因子的情况下，可以将量子比特表示在Riemann复球面上，即量子比特的Bloch球表示。采用球极射影，可以将量子比特的Bloch球表示等同于扩充复平面的复数表示。考虑一位量子比特的门操作，将幺正变换与复平面上一类特殊的共形映照相联系。研究表明，量子比特的门操作与共形映照有着密切的关系。

关　键　词　量子计算;　量子比特;　量子门;　球极射影;　共形映照

中图分类号　TN911.2　　　文献标识码　A

Gate Operations of Qubit and Conformal Mapping

LIAO Jin-kun[1]，HOU Wen-ting[2]，LIU Yong-zhi[1]，LIAO Yi-tao[1]，DAI Zhi-yong[1]

(School of Opto-Eletronic Information, Univ. of Electron. Sci. & Tech. of China　Chengdu　610054;

2. Physics Department, University of Science of Technology　Hefei　230026)

Abstract　A two-level quantum system is a quantum bit(qubit).Without the consideration of quantum coherence, qubit can be expressed on Riemann complex sphere,i.e. Bloch sphere representation. Identifying the Bloch sphere representation of qubit with the extended complex plane by means of stereographic projection and considering the gate operations of single qubit,we obtain equivalance relation between unitary operations and one special kind of conformal mappings.The investigation shows that there is close relation between gate operations of qubit and conformal mappings.

Key words　quantum computation;　qubit;　quantum gate;　stereographic projection;　conformal mapping

量子力学与通信理论、计算机科学的结合产生了一门新的学科分支——量子通信与量子计算，即量子信息科学。近年来，量子信息科学在理论和实验上取得了一系列重大突破，引起了人们更为广泛的关注和兴趣[1]。特别是美国AT&T公司科学家Peter Shor于1994年提出量子算法，并显示了量子计算的高度并行性之后，更激发了人们对量子计算机和量子算法的深入研究[2]。

由于量子计算的并行能力，量子计算机具有超越经典计算机的潜在可能性。从原理上讲，量子计算机的构成基于双态量子体系，该体系称为量子比特。根据量子力学基本原理，双态量子体系的任意量子态可以表示为两个基态的叠加态，即二维复Hilbert空间中的矢量；或者在忽略一个位相因子的情况下可以表示为终点位于二维球面S^2上的矢量，即量子比特的Bloch球表示[3]。与经典计算机类似，量子计算机可以视为量子比特有规律的演化，其中最基本的操作是一位量子比特的处理，相应的物理单元称为一位量子门。按照量子力学的要求，量子门实现的操作必须是幺正变换，对应的数学描述为幺正矩阵。

本文讨论量子比特的几何表示、量子门操作与共形映照的相互关系。

1　量子比特的表示

采用Dirac符号，在一个双态量子体系中，两个基矢量取为$|0\rangle$和$|1\rangle$，量子比特的任意态矢量为：

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = (a,b)^{\mathrm{T}}$$

式中　a和b是复数，满足$|a|^2+|b|^2=1$ [4]。不难证明该量子态也可以表示为：

收稿日期：2005 - 12 - 05
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60377021)

作者简介：廖进昆(1962 –)，男，在职博士生，副教授，主要从事集成光学和光电子器件、量子通信和量子计算方面的研究.

$$|\psi\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}(\cos\frac{\phi}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sin\frac{\phi}{2}|1\rangle) \tag{1}$$

式中　$0 \le \phi \le \pi$；$0 \le \theta \le 2\pi$。在不考虑量子相干效应时，忽略位相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$，量子比特最终表示为：

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\phi}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sin\frac{\phi}{2}|1\rangle \tag{2}$$

于是，态矢量 $|\psi\rangle$ 可以用从球心引向单位球面 S^2 上一点 $q(x_1, x_2, x_3)$ 的矢量表示，或者可以将 $|\psi\rangle$ 与球面上参数为 (ϕ,θ) 的点等同起来，这就是量子比特的Bloch球面表示。

众所周知，通过球极射影可以将扩充复平面上的点与单位球面上的点建立一一对映，该球面在复分析中称为Riemann球面[5]。将Bloch球面与Riemann球面等同，可以定义映射：

$$P: H \to \tilde{C} \tag{3}$$

即为从二维射影Hilbert空间 H 到扩充复平面 $\tilde{C}$ 的投影。

2　量子比特的射影表示

考虑映射 P，$|\psi\rangle = (a,b)^{\mathrm{T}}$ 被映为复数：

$$z = P(|\psi\rangle) = \frac{x_1}{1-x_3} + \mathrm{i}\frac{x_2}{1-x_3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{ctg}\frac{\phi}{2} = \frac{a}{b} \tag{4}$$

式中　a 和 b 是复数 z 的齐次坐标。不难验证：$P(|0\rangle) = \infty$，$P(|1\rangle) = 0$，$P([|0\rangle \pm |1\rangle]) = \pm 1$。设 $P(|\psi_1\rangle) = (a_1, b_1)^{\mathrm{T}}$，$P(|\psi_2\rangle) = (a_2, b_2)^{\mathrm{T}}$。那么叠加态 $P(|\psi\rangle) = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle$ 对应于：

$$z = (\alpha a_1 + \beta a_2)/(\alpha b_1 + \beta b_2) \tag{5}$$

两个态矢量的内积为：

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = a_1 a_2 + b_1^* b_2 = \frac{|z_1||z_2|}{(|z_1|^2+1)^{1/2}(|z_2|^2+1)^{1/2}}(1 + \frac{1}{z_1^* z_2})$$

按式(2)，此处 $a_i (i = 1,2)$ 是非负实数。

3　量子比特的幺正操作

考虑量子门的幺正操作，其数学表示为：

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\begin{pmatrix} c & d \\ -d^* & c^* \end{pmatrix} \tag{6}$$

即 $\boldsymbol{U}$ 表示为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 与 $SU(2)$ 群[6]元素的乘积。其中 $|c|^2 + |d|^2 = 1$；c^* 是 c 的复共轭。这一操作也可以看成Bloch球绕某轴的旋转，另一方面该旋转又与扩充复平面上的一类特殊线性分式映射对应，此映射为：

$$z' = f_U(z) = (c'z + d')/(-d'^* z + c'^*) \tag{7}$$

式中　$|c'|^2 + |d'|^2 = 1$。根据式(7)可以定义如下的系数矩阵：

$$\boldsymbol{U}_f = \begin{pmatrix} c' & d' \\ -d'^* & c'^* \end{pmatrix} \tag{8}$$

该矩阵为幺正矩阵且行列式为1。对于任意的量子比特 $|\psi\rangle = (a,b)^{\mathrm{T}}$，根据式(6)，经过幺正操作变换为：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(ca + db, -d^* a + c^* b)^{\mathrm{T}}$$

再由式(4)对应于：

$$z' = (ca + db)/(-d^* a + c^* b) \tag{9}$$

另一方面，由式(4) $|\psi\rangle = (a,b)^{\mathrm{T}}$ 对应于 $z = a/b$，按共形映射式(7)对应为：

$$z' = (c'a + d'b)/(-d'^* a + c'^* b) \tag{10}$$

为建立幺正操作与共形映射的对应关系，由式(9)和式(10)看出，为保证两处的 z' 相同只需令：

$$c = c', d = d' \tag{11}$$

即幺正变换 $\boldsymbol{U}$ 与共形映射 $\boldsymbol{U}_f$ 下列关系成立：

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\boldsymbol{U}_f \tag{12}$$

归纳起来，对于给定的幺正变换 $\boldsymbol{U}$ 可以定出幺正矩阵 $\boldsymbol{U}_f$，最终确定相应的共形映射：

$$z' = f_U(z) = (cz + d)/(-d^* z + c^*) \tag{13}$$

4　一位门对应的共形映射

考虑一位量子比特的门操作即量子比特的幺正操作，按照上述理论常见的操作[7]和对应的共形映射如下：

(1) 恒等操作：$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。对应的共形映射为：

$$f_{\boldsymbol{I}}(z) = z \tag{14}$$

(2) 非门：$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。对应的共形映射为：

$$f_{\boldsymbol{X}}(z) = 1/z \tag{15}$$

(3) $\boldsymbol{Z}$操作：$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。对应的共形映射为：

$$f_{\boldsymbol{Z}}(z) = -z \tag{16}$$

(4) $\boldsymbol{Y}$操作：$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。对应的共形映射为：

$$f_{\boldsymbol{Y}}(z) = -1/z \tag{17}$$

(5) Hadamard门：$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$。对应的共形映射作为：

$$f_{\boldsymbol{H}}(z) = (z+1)/(z-1) \tag{18}$$

(下转第149页)

所示。由结果可知，最优工艺路线为：铣端面-半精镗-铰孔。

表2　工艺路线优化

阶段	节点	路线	阶段效益/元	最优解	
				成本/元	路线
I	钻孔	钻-扩	7.4+2=9.4	8.6	钻-铰
		钻-铰	5.6+3=8.6		
	半精镗	镗-扩	7.4+3=10.4	9.6	镗-铰
		镗-铰	5.6+4=9.6		
II	铣端面	铣-钻	3.0+3+8.6=14.6	13.6	铣-镗
		铣-镗	2.0+2+9.6=13.6		

4　结 束 语

本文提出的基于动态规划法和遗传算法，把工艺路线层优化和工序优化结合起来的综合优化模型，能较为满意地解决工艺过程优化问题。对遗传算法的改进，提高了其处理约束优化问题的能力。通过实例验证了该方法的有效性。

参　考　文　献

[1] VANCZA J, MARKUS A. Experiments with the integration of reasoning, optimization and generalization in process planning[J]. Advances in Engineering Software, 1996, 25: 29-39.

[2] DOWNLATSHAHI S, ASHOK M S. Design optimization in concurrent engineering: a team approach. concurrent engineering[J]. Research and Application, 1997, 5(5): 145-154.

[3] 周　明, 孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.

[4] 李建勇, 鄂明成. 基于混合遗传算法的柔性制造系统优化设计[J]. 计算机集成制造系统-CIMS, 2003, 9(3): 198-20.

[5] 李向东. 运筹学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1990.

[6] FEN C J, KUSIAK A, Huang C. Cost evaluation in design with form features[J]. Computer-Aided Design, 1996, 28(11): 879-885.

[7] 沈静株. 过程系统优化[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.

[8] BLOCH C, RANGANATHAN R. Process-based cost modeling[J]. IEEE Transaction on Components Hybrids and Manufacturing Technology, 1992, 15(3): 288-294.

[9] 孟少龙. 机械加工工艺手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 1991.

编　辑　孙晓丹

(上接第133页)

5　结 束 语

本文讨论量子比特和门操作的几何表示。通过将量子比特的Bloch球表示投影到扩充复平面上，建立了量子比特的复数表示；将量子门的幺正操作与扩充复平面上的一类分式线性映射相等同，得出了幺正操作与共形映射的对应关系。运用量子比特的几何表示和量子门操作的共形映射表示，人们可以从几何角度更为深刻地理解双态量子体系的量子力学行为。

参　考　文　献

[1] ALBER G, BETH T, HORODECK M, et al. Quantum information: an introduction to basic theoretical concepts and experiments[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.

[2] SHOR P W. Algorithms for quantum computation discretelog and factoring[C]// In Proceeding of the 35th IEEE Symposium on Foundatins of Computer Science, Sante Fe, 1994: 20.

[3] NIELSEN M, CHUANG I. Quantun computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

[4] DIRAC P A M. The principles of quantum mechanics[M]. Oxford: Oxford University Press, 1958.

[5] AHLFORS L V. Complex analysis[M]. 3rdEdition. New York: McGraw-Hill Companies, Inc.,1979.

[6] 余扬政, 冯承天. 物理学中的几何方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

[7] 李承祖, 黄明球, 陈平行, 等. 量子通信和量子计算[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000.

感谢山西大学光电研究所彭堃墀院士的鼓励和四川大学物理与技术学院王顺金教授的指点。

编　辑　漆　蓉