第 34 卷　第 2 期　　　　　　　电 子 科 技 大 学 学 报　　　　　　　Vol.34　No.2
2005 年 4 月　　　　　　　Journal of UEST of China　　　　　　　Apr. 2005

通有连续时间神经网络的K-稳定性

韩仲明

(乐山师范学院数学系　四川 乐山　614004)

【摘要】研究了具有时滞的通有连续时间神经网络的K-稳定性问题；利用常数变易法，通过应用不等式分析技巧和微分方程性质，获得了具有时滞的通有连续时间神经网络的平衡点的K-全局渐近稳定性与K-全局指数稳定性的易于验证的时滞相关充分条件，通过实例验证了该充分条件的有效性。

关　键　词　时滞；神经网络；平衡点；K-稳定性

中图分类号　O175.13　　　　**文献标识码**　A

K-Stability of General Neural Network With-Delay

HAN Zhong-ming

(Department of Mathematics, Leshan Teacher’s college　Sichuan Leshan　614004)

Abstract　In this paper, the problem of K-stability for general neural network with time-delay was studied. By the method of variation of the parameters and inequality analysis and some properties of differential equations, sufficient delay-dependent conditions of K-stability and K-exponentially stability for general neural network with time-delay are established.

Key words　time-delay;　neural network;　equilibrium point;　K-stability

神经网络的研究是众多学科和领域关注的热点，近年来，已经取得了许多重要的成果，给出了系统的平衡点及平衡点处稳定性的判别准则[1~8]，这些研究中，对通有连续时间神经网络的研究还不多见，除文献[3～5]以外，几乎都没有考虑时滞对稳定性的影响。基于此，本文利用常数变易公式、微分方程的性质，结合不等式分析技巧[9]，讨论了具有时滞的通有连续时间神经网络系统的平衡点的存在唯一性及平衡点处的K-全局渐近稳定性与K-全局指数稳定性，得到了时滞相关的K-稳定性条件。

1　系统的描述与准备

考虑具有时滞的通有连续时间神经网络系统：

$$\begin{cases} C_i\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{u_i(t)}{R_i}+\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{T}_{i\,j}f_j(u_j(t-t))+\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{W}_{i\,j}u_j(t)+I_i \\ u_i(t)=j_i(t) \qquad t\in[-t,\ 0] \end{cases} \tag{1}$$

式中　$R_i>0$ 为电阻；$C_i>0$ 为电容；R_i，C_i并联；$\tilde{T}_{i\,j},\tilde{W}_{i\,j},I_i$ 均为常数；$f_i(\cdot)$ 为神经元的非线性特性；$u_i(t)$ 为第i个神经元的输入；$f_i(u_i)$ 为第i个神经元的输出；t 为时滞，$0\le t<+\infty$。记 $a_i=\dfrac{1}{C_iR_i}$，$T_{i\,j}=\dfrac{\tilde{T}_{i\,j}}{C_i}$，$W_{i\,j}=\dfrac{\tilde{W}_{i\,j}}{C_i}$，$P_i=\dfrac{I_i}{C_i}$ 则系统式(1)为：

收稿日期：2003 – 03 – 04
作者简介：韩仲明(1963 –)，男，副教授，主要从事神经网络稳定性方面的研究.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_iu_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}T_{ij}f_j(u_j(t-t))+\sum\limits_{j=1}^{n}W_{ij}u_j(t)+P_i\\ u_i(t)=j_i(t) \qquad t\in[-t,\ 0]\end{cases} \tag{2}$$

定义 1　如果存在常向量 $\boldsymbol{u}^*=(u_1^*, u_2^*, \Lambda, u_n^*)^T\in R^n$ **，使得：**

$$-a_iu_i^*+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_j(u_j^*)+\sum_{j=1}^{n}W_{ij}u_j^*+P_i=0, i=1,2,\Lambda\ ,n \tag{3}$$

则称 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ **是系统式(2)的平衡点。**

设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ **是系统式(2)的平衡点，作变换** $x_i(t)=u_i(t)-u_i^*$**，**i=1，2，…，n**。于是系统式(2)可改写为：**

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\{f_j[x_j(t-t)+u_j^*]-f_j(u_j^*)\}+\sum_{j=1}^{n}W_{ij}x_j(t)=$$

$$-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}W_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}[f_j'(u_j^*)x_j(t-t)+\frac{1}{2!}f_j''(x)x_j^2(t-t)]，i=1，2，\cdots，n \quad t\geq 0 \tag{4}$$

式中　$x_i(t)=u_i(t)-u_i^*\triangleq f_i(t)$ **；**$-t\leq t\leq 0$**；**x **在** $x_j(t-t)+u_j^*$ **与** u_j^* **之间。易知系统式(4)的零解的稳定性对应了系统式(2)(也就是系统式(1))的平衡点** $\boldsymbol{u}^*$ **的稳定性。**

定义 2　称系统式(4)的零解是K-全局渐近稳定的，若存在π≥1及K∈(0，+∞)，当$\|f(0)\|_t<K$ **时，有：**
$\|x(t)\|_t\leq\pi\|f(0)\|_t$**，**$t\geq 0$**，且** $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x(t)\|=0$ **。这里**$\|f(0)\|_t=\max\limits_{-t\leq t\leq 0}\|f(t)\|$，$\|\cdot\|$**是$R^n$中某类范数。**

定义 3　称系统式(4)的零解是K-全局指数稳定的，若存在l>0，π ≥1及K∈(0，+∞)，当$\|f(0)\|_t<K$ **时，有：**$\|x(t)\|\leq\pi\|f(0)\|_t e^{-lt}$**，**$t\geq 0$**。**

2　主要结果及证明

引理1[5]　设系统式(2)中每一个非线性函数 f_i **具有以下性质：**

1) f_i **，**$R\to R$**是有界的且连续可微；**

2) $0<\dfrac{\mathrm{d}f_i(u)}{\mathrm{d}u}\leq d_i$ **(常数)，**$u\in(-\infty,\ +\infty)$**，**i=1, 2, ⋯, n**；**

3) $\det[\operatorname{diag}(a_i)-(W_{ij})_{n\times n}]\neq 0_i$**，则系统式(2)必存在唯一的平衡点。**

定理1　假设系统式(4)满足引理1的条件，并且满足：$f_i(u)$ **二价可微，且**$|f_i''(u)|\leq M$**，M为常数；**
$-a_i+W_{ii}+T_{ii}\ f_i'(u_i^*)<0$, $a_i>0$ **，存在K>0以致：**

$$\frac{1}{a_i-W_{ii}-T_{ii}\ f_i'(u_i^*)}\left\{|T_{ii}|\left|f_i'(u_i^*)\right|\left[\left[|-a_i+W_{ii}|+\sum_{j=1}^{n}((1-d_{ij})|W_{ij}|+|T_{ij}|(|f_j'(u_j^*)|+\frac{1}{2}MK))\right]t+\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{j=1}^{n}\left[(1-d_{ij})(|W_{ij}|+|T_{ij}||f_j'(u_j^*)|)+\frac{1}{2}MK|T_{ij}|\right]\right]\right\}<1 \tag{5}$$

式中　i=1, 2, ⋯, n**；**$d_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j\ ,\\ 0,\ i\neq j\ ,\end{cases}$ 　　$i\ ,\ j=1,2,\Lambda\ ,n$。

则式(4)的零解是K-全局渐近稳定的。

证明　设式(4)有解 $x_i(t)$ **，因为** $x_i(t)$ **是连续可微的(**$t\geq 0$**)，所以：**

$$x_i(t-t)-x_i(t)=-\int_{t-t}^{t}x_i'(q)\mathrm{d}q \tag{6}$$

由式(4)和式(7)和常数变易式(4)的解可表示为：

$$x_i(t)=\exp[(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))t]\,x_i(0)-\int_0^t\exp[(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))(t-s)]\times$$

$$\{T_{ii}f_i'(u_i^*)\int_{s-t}^{s}[(-a_i+W_{ii})x_i(q)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}W_{ij}\ x_j(q)+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(f_j'(u_j^*)x_j(q-t)+\frac{1}{2}f_j''(x)x_j^2(q-t))]\mathrm{d}q+$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[W_{ij}x_j(s)+T_{ij}f_j'(u_j^*)x_j(s-t)]+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_j''(x)x_j^2(s-t)\}\,\mathrm{d}s \qquad t\geq 0 \tag{7}$$

由定理条件和式(8)有：

$$|x_i(t)|\leq|x_i(t)|\leq \exp[(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))t]\,|x_i(0)|+\int_0^t \exp[(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))(t-s)]\{|f_i'(u_i^*)|\,|T_{ii}|\times$$

$$\sup_{s-t\leq q\leq s}[\,|-a_i+W_{ii}|\,|x_i(q)|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|W_{ij}|\,|x_j(q)|+\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|\,(|f_j'(u_j^*)|\,|x_j(q-t)|+\frac{1}{2}M|x_j(q-t)|^2)]\;t+$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[\,|W_{ij}|\,|x_j(s)|+|T_{ij}|\,|f_j'(u_j^*)|\,|x_j(s-t)|\,]+\frac{1}{2}M\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|\,|x_j(s-t)|^2\}\,\mathrm{d}s\triangleq Q_i(t)$$

令 $Q_i(t)=|f_i(t)|$，$(-t\leq t\leq 0)$；$Q_i(t)=|f_i(t)|$，$(-2t\leq t\leq -t)$**那么：**$Q_i(t)\geq|x_i(t)|\,(-t\leq t<+\infty)$，**且对任意**$d\in(1,\ K/|f_i(0)|_t)$，**有：**

$$|Q_i(t)|<d\,|f_i(0)|_t\triangleq N<K \qquad (t\geq 0) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

式中 $|f(0)|_t=\max\limits_{-t\leq t\leq 0}|f_i(t)|$

反证假如式(9)**不成立，则一定存在某个**i_0**及**$t_1>0$**，以致：**

$Q_{i_0}(t_1)=N$；$Q_{i_0}(t)<N$，$(-t\leq t\leq t_1)$；$Q_j(t)\leq N$，$(-t\leq t\leq t_1,\ j\neq i_0,\ j=1,2,\cdots,n)$

且 $\dfrac{\mathrm{d}Q_{i_0}(t_1)}{\mathrm{d}t}\geq 0$。**另一方面：**

$$\frac{\mathrm{d}Q_{i_0}(t_1)}{\mathrm{d}t}\leq(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))Q_{i_0}(t_1)+|T_{ii}|\,|f_i'(u_i^*)|\sup_{t_1-t\leq x\leq t_1}[\,|-a_i+W_{ii}|\,|Q_{i_0}(x)|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|W_{ij}|\,|Q_j(x)|+$$

$$\frac{1}{2}M|Q_j(x-t)|^2)]t+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[\,|W_{ij}|\,|Q_j(t_1)|+|T_{ij}|\,|f_j'(u_j^*)|\,|Q_j(t_1-t)|\,]+\frac{1}{2}M\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|\,|Q_j(t_1-t)|^2\leq$$

$$(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))\{1-\frac{1}{a_i-W_{ii}-T_{ii}f_i'(u_i^*)}[\,|T_{ii}|\,|f_i'(u_i^*)|\,(|-a_i+W_{ii}|+\sum_{j=1}^{n}((1-d_{ij})|W_{ij}|+$$

$$|T_{ij}|\,(|f_j'(u_j^*)|+\frac{1}{2}MK)))\,t+\sum_{j=1}^{n}((1-d_{ij})(|W_{ij}|+|T_{ij}|\,|f_j'(u_j^*)|)+\frac{1}{2}MK|T_{ij}|)]\}\,N<0 \tag{9}$$

矛盾。因此式(9)**成立。**

令$d\to 1$　**得：**$|x_i(t)|\leq Q_i(t)\leq|f_i(0)|_t$，$t\geq 0$。

证 $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$：

令 $s=\limsup\limits_{t\to\infty}Q_i(t)$，**由**$Q_i(t)\leq|f_i(0)|_t$，**有**$0\leq s\leq K$，**由上极限的基本性质，存在**$t_2>0$，**使**$Q_i(t)\leq s+e$ $(t\geq t_2)$。**类似式**(10)，**可知当**$t\geq t_2+2t\triangleq t_3$**时：**

$$\frac{\mathrm{d}Q_i(t)}{\mathrm{d}t}=(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))Q_i(t)+|T_{ii}|\,|f_i'(u_i^*)|\,[\,|-a_i+W_{ii}|\,(s+e)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|W_{ij}|\,(s+e)+$$

$$\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|\,(|f_j'(u_j^*)|\,(s+e)+\frac{1}{2}M(s+e)^2)]\,t+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[\,|W_{ij}|+|T_{ij}|\,|f_j'(u_j^*)|\,](s+e)+\frac{1}{2}M\sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|\,(s+e)^2$$

所以：

$$Q_i(t)\leq\exp[(-a_i+W_{ii}+T_{ii}f_i'(u_i^*))(t-t_3)]Q_i(t_3)+\frac{1}{a_i-W_{ii}-T_{ii}f_i'(u_i^*)}\{|T_{ii}|\,|f_i'(u_i^*)|\,[\,|-a_i+W_{ii}|\,(s+e)+$$

$$\sum_{j=1}^{n}((1-d_{ij})|W_{ij}|\,(s+e)+|T_{ij}|\,(|f_j'(u_j^*)|\,(s+e)+\frac{1}{2}M(s+e)^2))]\,t+\sum_{j=1}^{n}[(1-d_{ij})(\,|W_{ij}|+$$

$$|T_{ij}|\,|f_j'(u_j^*)|\,)\,(s+e)+\frac{1}{2}M(s+e)^2|T_{ij}|\,]\}\quad(t>t_3)$$

令$t \to +\infty$，$e \to 0$有：

$$s \le \frac{1}{a_i - W_{ii} - T_{ii} f_i'(u_i^*)} \{ |T_{ii}| |f_i'(u_i^*)| [|-a_i + W_{ii}| + \sum_{j=1}^{n} ((1-d_{ij})|W_{ij}| + |T_{ij}| (|f_j'(u_j^*)| + \frac{1}{2}MK))] t + \sum_{j=1}^{n} [(1-d_{ij})(|W_{ij}| + |T_{ij}| |f_j'(u_j^*)|) + \frac{1}{2}MK|T_{ij}|]\} s$$

由式(6)知$s=0$，从而$\lim\limits_{t\to+\infty}|x_i(t)|=0$，进一步有$\lim\limits_{t\to+\infty}\| x(t) \|=0$。由上述定理的证明方法，证以下定理成立。

证毕

定理2　在定理1的条件下，系统式(4)的零解也是K-全局指数稳定的。当$\tilde{W}_{ij}=0\,(i, j=1, 2, \Lambda\ , n)$时，神经网络系统式(1)变为具有时滞的Hopfield型神经网络，文献[5]的主要结论是本文结论的特殊情况，所以定理1推广了文献[5]的结果。

3 实　例

考虑系统：

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x_1(t-t) \\ \cos x_2(t-t) - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

式中 $f_1(x_1(t-t)) = \sin x_1(t-t)$；$f_1'(0)=1 \le 1$；$|f_1''| = |-\sin x_1(t-t)|$。$f_2(x_2(t-t)) = \cos x_2(t-t) - 1$，$f_2'(0)=0$，$|f_2''| = |-\cos x_2(t-t)| \le 1$。

因为由引理1中条件2)：

$$-a_1 + W_{11} + T_{11} f_1'(0) = -2 - 5 + 3 = -4 < 0$$

$$-a_2 + W_{22} + T_{22} f_2'(0) = -5 + 2 = -3 < 0$$

所以，由式(6)得：$K < \frac{3-33t}{6t+2}$，$\frac{5}{111} \le t < \frac{1}{11}$。根据定理1得知系统式(11)的零解是$K$-全局指数渐近稳定的。

其中，$K \in (0, \frac{3-33t}{6t+2})$，$\frac{5}{111} < t < \frac{1}{11}$。

参 考 文 献

[1] Yang H, Dillon T S. Exponential stability and oscillation of Hopfield graded response neural network[J]. IEEE Transactions on Neural Network, 1994, 5(5):719-729

[2] Gopalsamy K, He X Z. Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays[J]. Physica D, 1994, 76: 344-358

[3] Anthony H Y, Michol N, Wang K. Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays[J]. Physical Review E, 1994, 50(5): 4 206-4 213

[4] Driessche P V D, Zou X F. Global attractivity in delayed Hopfield heural network models[J]. SIAM J Appl Math, 1998, 58(6): 1 878-1 890

[5] 韩仲明. Hopfield型时滞神经网络模型的K-稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2003, 26(1) 49-53

[6] 钟守铭, 李正良. 通有连续时间神经网络的稳定性[J]. 电子科技大学学报, 1996, 25(1): 92-97

[7] 邱亚林. 具有时滞的通有连续时间神经网络的指数稳定性[J]. 电子科技大学学报, 1999, 28(5): 533-535

[8] 李树勇, 马知恩. 含可变时滞的大规模通有神经网络动力系统的吸引域[J]. 西安交通大学学报, 2001, 35(10) 1 089-1 092

[9] 张　毅, 章　毅, 王慕秋. 非线性时滞微分不等式及其应用[J]. 科学通报, 1993, 38(16): 1 455-1 458

编　辑　刘文珍