第 33 卷 第 3 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.33 No.3
2004 年 6 月　　Journal of UEST of China　　Jun. 2004

基于随机投标人数的最优保留值设置

安 勇，陈绍刚，赵丽霞
(电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】在Friedman对投标人数所作的服从Poisson分布假定的基础上，研究了招标活动中招标商对最优保留值的设置问题，得出了最优保留值的设置与参与投标的期望人数无关以及招标商的期望收益受参与投标的期望人数影响的结论，同时给出了最优保留值的设置公式，从而给招标机制的设计提出了一种更接近实际情况的方法。

关 键 词 拍卖; 保留值; 投标商; 期望收益; 随机投标人数
中图分类号 F224.0 文献标识码 A

Optimal Reservation Value Setting Based on Random Bidders

An Yong，Chen Shaogang，Zhao Lixia
(School of Applied Mathmatics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Friedman viewed that the number of bidders in bidding submit Poisson Distribution. On the aboue assumption, this paper studies reservation value setting and draws conclusions that reservation value has no pertinence with the expected number of bidders while the expected number of bidders affect expected revenue of the auctioneer. Meanwhile this paper gets a formula to calculate reservation value, thus brings forward a way for design of bidding meechanism, which further approaches actual conditions.

Key words auction; reservation value; bidder; expected revenue; random bidders

R.P.McA fee 于1987年给拍卖下过如下定义[1]：拍卖是一种市场状态，此市场状态在市场参入者标价基础上具有决定资源配置和资源价格的明确规则。市场参入者包括招标商和投标商，资源的拥有者为招标商，希望获取资源者为投标商。招标商和投标商一起参入的拍卖是完整的拍卖。拍卖作为一种经济交易机制，其最大特点是能够给难以确定价格的物品最终确定一个合理的价位，它充分体现了“公平、公正”的市场竞争原则。拍卖交易方式很多，其中有四种最基本的拍卖方式，即英式拍卖、荷兰式拍卖、第一价格拍卖和第二价格拍卖。

1 基于确定投标人数的保留值设置所面临的问题

对于拥有资源的招标商而言，他们最关心的是利用或设计何种机制，制定何种交易规则能使拍卖的期望收益最大或目标最优。其中包括多激励定价、投标人数的研究、最优保留值的设定研究等[1,2]。其中，招标商对保留值的设置是其要考虑的一种主要的拍卖规则。招标商对拍卖品设定保留值，可以避免在简单的拍卖规则下，由于投标人数太少而造成的投标商低价中标，有利于招标商的最优期望收益的获取。给定“基准模型”的7个假定：1) 单物品拍卖；2) 所有投标商及招标商都是风险中性的；3) 每个投标商对拍卖物品及价值的估计是独立的，且这个估计值仅投标商自己知道；4) 每个投标商具有对称性，即它们的估值的分布函数相同；5) 每个投标商的支付函数只与它的投标价有关；6) 投标商之间是非合作博弈；7) 卖主就是

收稿日期：2003 – 12 – 04
基金项目：国家杰出青年科学基金资助项目(79270052)
作者简介：安 勇(1979 –)，男，硕士生，主要从事价格、拍卖理论及其应用方面的研究.

投标人，不存在交易费用。

在此基础上，Samuleson和Myerson证明当基准模型假设成立，且招标商对拍卖品的估值为 v_0 时，设置保留值r满足 $v_0 = r - \dfrac{1-F(r)}{f(r)}$ 时，能得到最大的收益，其中$F(r)$是独立私人估值的分布函数，$f(r)$是密度函数[3]。基于此，文献[4]推导了最优保留值的设定与投标人数的关系。但是，上述文献讨论的基础是投标人数为一确定的取值。实际拍卖中，在拍卖之前，招标商已经确定了保留值，不可能知道参加此次拍卖的确切人数，文献[5]详细研究了招投标过程中的参与投标人数的确定方法。因此以确定的投标人数来研究最优保留值的设定有一定的局限性。文献[6]认为投标者的个数n服从Poisson分布，若 l 为投标者的估计数，则随机变量的概率分布密度为

$$P(n) = \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l}$$

由于参与投标人数的特点符合稠密性特点，因此文献[6]的设定是切合实际的。在此假定的基础上，招标商的最优保留值的设置必须考虑参与投标人数的随机性特点，研究参与投标的期望人数对最优保留值的影响机制将是十分有意义的。

2 基于随机投标人数的最优保留值设定方法

设“基准模型”的7个假定仍成立，考察拍卖中任意一个投标商的投标行为，其投标后期望收益为 $EU = VP - X$ ，其中 EU 为投标商期望收益，V为投标商的估值，P为中标概率，X为期望支出。投标商的均衡策略为 $b_i = b(V_i)$ ，不失一般性，设投标商1的报价为 $b(x)$ ，其他人的均衡策略为 $b(V_j)$ ， $j \neq 1$ ，当n确定时，投标商 1 的支出可以表示为 $X_1 = X_1(b(x), b(V_2), \cdots, b(V_n))$ ，其期望值为 $X(x) = EX_1 = E[X_1(b(x), b(V_2), \cdots, b(V_n))]$ 。如果投标商1中标，则其余投标商的标价必须小于投标商1的报价，即 $b(V_j) \leq b(x), j \neq 1$ ，由于 $b(x)$ 是严格的增函数，因此投标商1中标，当且仅当 $V_j \leq x (j \neq 1)$ ，由全概率公式，$V_j \leq x (j \neq 1)$ 的概率为

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(x \mid N = n) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} F^{n-1}(x)$$

因此，投标商1参加拍卖的期望收益为

$$U(x, V_1) = V_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} - X(x) \tag{1}$$

因为 $b(V)$ 是均衡策略，当投标商1的投标策略为 $x = V_1$ 时，其期望收益达到最大值，其一阶必要条件满足

$$\frac{\partial U(x, V_1)}{\partial x}\bigg|_{x=V_1} = V_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F^{n-1}(V_1)) - X'(V_1) = 0 \tag{2}$$

设招标商定有一最低的保留值r(可以看成V的下限值)，如果投标商1对拍卖品的估值为r时，即使中标，其期望收益也为零。即r满足

$$U(r, r) = r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} - X(r) = 0 \tag{3}$$

式(2)对任意 $V_1 \geq r$ 成立，移项得

$$X'(V_1) = V_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F^{n-1}(V_1)) \tag{4}$$

对式(4)分步积分，并利用式(3)得

$$\begin{aligned} X(V_1) &= r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} F^{n-1}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} \int_r^{V_1} x \mathrm{d}F^{n-1}(x) = \\ & r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} x F^{n-1}(x)\Big|_r^{V_1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} \int_r^{V_1} F^{n-1}(x)\mathrm{d}x = \\ & V_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} F^{n-1}(V_1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l} \int_r^{V_1} F^{n-1}(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

招标商由于知道投标商1的估值V_1服从分布$F(V_1)$以及其支出的期望为$X(V_1)$，由期望定义$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x$，得投标商1的期望收益为

$$X_1=\int_r^V X(V_1)F'(V_1)\mathrm{d}v_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{n!}e^{-l}\int_r^V[V_1F^{n-1}(V_1)-\int_r^{V_1}F^{n-1}(x)\mathrm{d}x]F'(V_1)\mathrm{d}V_1=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-l}\,[\int_r^V V_1F^{n-1}(V_1)F'(V_1)\mathrm{d}V_1-\int_r^V(\int_r^{V_1}F^{n-1}(x)\mathrm{d}x)F'(V_1)\mathrm{d}V_1]=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-l}\,[\int_r^V V_1F^{n-1}(V_1)F'(V_1)\mathrm{d}V_1-\int_r^V F^{n-1}(V_1)(1-F(V_1))]\mathrm{d}V_1=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-l}\,[\int_r^V (V_1F'(V_1)+F(V_1)-1)F^{n-1}(V_1)\mathrm{d}V_1]=$$

$$\mathrm{e}^{-l}\int_r^V(V_1F'(V_1)+F(V_1)-1)\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[l\,F(V_1)]^n}{n!}}{F(V_1)}\mathrm{d}V_1=\mathrm{e}^{-l}\int_r^V(V_1F'(V_1)+F(V_1)-1)\frac{\mathrm{e}^{l\,F(V_1)}-1}{F(V_1)}\mathrm{d}V_1 \tag{5}$$

式中 积分号中的V是估值的最大值。招标商的期望收益为所有投标商期望支出的总和，由模型的对称性可得，招标商总的期望收益为

$$X=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{n!}\mathrm{e}^{-l}n\mathrm{e}^{-l}\int_r^V(V_1F'(V_1)+F(V_1)-1)\frac{\mathrm{e}^{l\,F(V_1)}-1}{F(V_1)}\mathrm{d}V_1=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-l}\mathrm{e}^{-l}\int_r^V(V_1F'(V_1)+F(V_1)-1)\frac{\mathrm{e}^{l\,F(V_1)}-1}{F(V_1)}\mathrm{d}V_1=$$

$$l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-l}\mathrm{e}^{-l}\int_r^V(V_1F'(V_1)+F(V_1)-1)\frac{\mathrm{e}^{l\,F(V_1)}-1}{F(V_1)}\mathrm{d}V_1=$$

$$l\,\mathrm{e}^{-l}\int_r^V(V_1F'(V_1)+F(V_1)-1)\frac{\mathrm{e}^{l\,F(V_1)}-1}{F(V_1)}\mathrm{d}V_1$$

又 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}=-l\,\mathrm{e}^{-l}(rF'(r)+F(r)-1)\frac{\mathrm{e}^{l\,F(r)}-1}{F(r)}$，令$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}=0$得

$$rF'(r)=1-F(r) \tag{6}$$

此结论与文献[3]的结论相同，因此有以下命题：

命题1 在假定参加投标的投标人数服从参数为l的Poisson分布基础上，最优保留值r满足$rF'(r)=1-F(r)$，此式与l无关，因此招标商在设定最优保留值的过程中不必考虑以往相似投标的期望人数，而可以以任一确定的投标人数n来确定最优保留值。

命题2 给定估值V的某一具体分布，由式(5)便可求得招标商的最大期望收益，显然最大期望收益与历史投标人数的期望值有关。

算例 设参加某种古玩拍卖的人数估计数为$l=5$，投标人对拍卖物品的估值V服从[0,1]区间上的均匀分布，则有

$$F(V)=\begin{cases}1 & V\geq 1\\ V & 0\leq V<1\end{cases}$$

由(6)式，可得招标商设定的最优保留值为$r=1/2$，将其代入(5)式，可得招标商的最大期望收益为

$$X=5\mathrm{e}^{-5}\int_{1/2}^{1}(2V_1-1)\frac{\mathrm{e}^{5V_1}-1}{V_1}\mathrm{d}V=5\mathrm{e}^{-5}\int_{1/2}^{1}2(\mathrm{e}^{5V_1}-1)\mathrm{d}V_1+5\mathrm{e}^{-5}\int_{1/2}^{1}\frac{1}{V_1}\mathrm{d}V_1-5\mathrm{e}^{-5}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{e}^{5V_1}}{V_1}\mathrm{d}V_1=$$

$$10\mathrm{e}^{-5}(\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2.5}-\frac{1}{2}+\ln 2)-5\mathrm{e}^{-5}\int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{e}^{5V_1}}{V_1}\mathrm{d}V_1\approx 0.515\ 4$$

(下转第330页)

3 比较研究的启示

目前我国企业的营销策略和手段还相对落后，仍局限在传统的$4P_S$组合的运用，甚至是单一的价格手段或促销手段的运用上，对20世纪90年代以来西方理论界和企业界先后提出的一些新的营销策略还未有及时借鉴和吸收过来。例如，随着世界经济形势和市场环境的变化，传统营销组合理论中占中心地位的$4P_S$策略，逐渐转向以$4P_S$理论为基础前提，而这一变化还没有被我国企业普遍认识和接受。入世之后，我国企业在营销环境方面将面临新的变化：具体表现在国内市场国际化、世界经济规模化、市场竞争多极化、产品趋向高新化、营销方式现代化。针对全新的营销环境，我国企业只有运用新的市场营销观念和营销策略来加以适应，通过创造市场来拓展市场，通过超越顾客来吸引顾客，通过价值竞争提高企业竞争力，通过关系营销建立顾客的忠诚度，从而使企业在激烈的市场竞争中化被动为主动，以有效占领和扩大市场份额。

市场营销策略研究是涉及面较广的课题，市场营销方式是多种多样的。现实企业营销活动中，营销策略必将对企业发展起着越来越重要的作用，新的营销策略和与此相对应的营销措施更是层出不穷，而且也正处于不断完善和发展过程中。21世纪的人类社会，高科技迅速发展和经济全球化推动市场营销环境的变迁，造就新的营销策略。因而，每个企业在选择营销策略时不是一成不变的，而是处于不断发展、不断完善过程中，营销组合也不是单纯的4Ps或4Cs、4Rs、4Vs，而是4Ps+4Cs+4Rs+4Vs+…，企业在选择营销策略时应去尝试按照这几种营销进行组合和创新，才能适应市场竞争和营销环境变化的需要。

参 考 文 献

[1] 胡俊侠. 营销理论的最新演变[J/OL]. http: //www. e521. com, 2003-08-25

[2] 吴健安. 市场营销学若干问题探索[J]. 西安邮电学院学报，2000, 5(4): 65-69

[3] 王成慧. 营销理论总体框架的形成与发展[DB/OL]. http:// www.emkt.com.cn, 2002-03-18

编 辑 孙晓丹

(上接第318页)

3 结 束 语

在拍卖中，招标商设置最优保留值，可以避免由于投标人数较少而造成的投标商低价中标，有利于招标商期望收益的获取。因此，招标商对保留值的设置是其要考虑的一种主要的拍卖规则。在现有对拍卖最优保留值的设置文献中，均把投标人数设定为一确定值。但实际上，保留值的设定应该在此次拍卖过程之前，招标商不可能确切了解参加此次拍卖的人数，进而不应该用确切的拍卖人数来研究最优保留值的设定问题。本文在Friedman认为投标者的个数n服从参数为l (l 为参加此种物品拍卖的期望人数)的Poisson分布基础上，重新研究了最优保留值的设置问题，得出参加投标人数的不确定性并不影响招标商的最优保留值的设置，招标商完全可以用确定的人数来设定最优保留值的结论。

参 考 文 献

[1] 陈绍刚, 赵蜀蓉. 基于随机估值的两物品拍卖的投标决策[J]. 电子科技大学学报, 2002, 31(4): 418-421

[2] 鲁耀斌, 张金龙, 黎志成. 多激励合同定价中最优风险分担率的研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, (5): 24-28

[3] Riley J G , Samuelson W. Optimal auctions[J]. American Economic Review, 1981, 71(3): 381-392

[4] 鲁耀斌, 张金龙, 黎志成. 拍卖过程中最优保留值设置的研究[J]. 管理工程学报, 1991, (1): 41-46

[5] 唐小我, 陈绍刚, 赵蜀蓉. 招标与拍卖过程中的投标人数研究[J]. 中国管理科学, 2003, 11(5): 53-55

[6] Friedman L A. Competitive bidding strategy[J]. Operations Research, 1956, 4(1): 104-112

[7] Maskin E, Riley J. Optimal auctions with risk averse buyers[J]. Econometrica, 1984, 52(3): 1 473-1 518

编 辑 徐安玉