

时频联合分布算法中核函数的改进*

张晓冬** 王 曦 贾宝富

(电子科技大学应用物理所 成都 610054)

【摘要】 分析了时频联合分布算法中核函数的作用。针对现有算法中存在的问题,提出了用简化的霍夫变换在 $\theta-\tau$ 平面提取信号自项成分,生成一个随输入信号变化的核函数的新算法,从而把信号自项与交叉项的分离问题转化为二值图像中过定点的直线检测问题。仿真结果表明,该方法克服了现有算法的不足,在保持信号自项的幅值正确计算的前提下,很好地衰减了交叉项。

关 键 词 时频联合分布; 核函数; 乔伊-威廉斯核; 霍夫变换

中图分类号 TN911.72

对信号进行时-频二维处理的方法,在实际应用中有着良好的发展前景^[1]。对于非平稳信号,由于不同时刻信号的频率不同,所以单纯地在时域或频域表示都不能完整地描述信号。为了准确表征信号在时间、频率上的变化过程,引入时频联合分布的算法^[2]。

魏格纳分布是一种典型的时频联合分布^[3]。从时频联合分布的基本公式出发^[4],魏格纳分布可以被视作核函数 $\Phi(\theta, \tau)=1$ 的特殊情况。从核函数的观点考虑,改变核函数的参数可以调整对交叉项的压缩程度,从而达到压缩交叉项、突出信号分量的目的。现有的乔伊-威廉斯分布及其改进形式就是典型的例子^[5,6]。

本文从仿真实验的结果出发,分析了乔伊-威廉斯核及其改进形式中存在的问题,并提出了用简化的霍夫变换在 $\theta-\tau$ 平面上求取核函数的新方法。该方法可以显著改善乔伊-威廉斯核及其改进形式中存在的问题,而计算量只有少量的增加。

1 时频联合分布的概念

所有的时频联合分布都可以从如下的基本方程中得到

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint S' \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) S \left(u + \frac{1}{2}\tau \right) \Phi(\theta, \tau) \exp(-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u) du d\tau d\theta = \\ \frac{1}{4\pi^2} \iint M(\theta, \tau) \exp(-j\theta t - j\tau\omega) d\tau d\theta$$

式中

$$M(\theta, \tau) = \Phi(\theta, \tau) \int S' \left(u - \frac{1}{2}\tau \right) S \left(u + \frac{1}{2}\tau \right) \exp(j\theta u) du = \\ \Phi(\theta, \tau) A(\theta, \tau)$$

$\Phi(\theta, \tau)$ 是核的二维函数。核函数确定了分布及其特征,某一分布的特性可以通过对核函数进行简单的约束来反映。方程中 $S(u)$ 为输入信号 $X(t)$ 的解析形式,即

$$S(t) = X(t) + j\hat{X}(t)$$

式中 $\hat{X}(t) = H[X(t)] = \frac{1}{\pi} \int X(\xi)/(t-\xi) d\xi$ 是 $X(t)$ 的希尔伯特变换。

1999年9月6日收稿

* 电子部预研基金资助项目

** 男 26岁 硕士生

2 核函数的选择

魏格纳分布是一种典型的时频联合分布，可看作是基本方程中 $\Phi(\theta, \tau)=1$ 时的情况。信号的魏格纳分布为

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int S' \left(t - \frac{1}{2} \tau \right) S \left(t + \frac{1}{2} \tau \right) \exp(-j \tau \omega) d\tau$$

这种核函数的选择存在的问题是：在多信号环境下，每两个信号分量之间存在一个交叉项，并且交叉项的幅值在一定情况下可达到信号幅值的两倍。因此使信号分量的检测变得困难，限制了这一算法的实际应用。

为抑制交叉项的影响，从核函数出发，有很多降低干扰的核函数形式。一种典型的抑制交叉项的核函数是乔伊-威廉斯核，其形式为

$$\Phi(\theta, \tau) = \exp(-\theta^2 \tau^2 / \sigma)$$

式中 σ 为一个定值的参数，改变 σ 的值，可得到对交叉项抑制程度不同的乔伊-威廉斯分布。

核函数的改进形式为

$$\Phi(\theta, \tau) = \exp[-(\theta/a)^n (\tau/b)^m]$$

将控制 θ 方向和 τ 方向，可分别沿 θ 或 τ 轴改变核的宽度。

对乔伊-威廉斯核的仿真结果表明，该核函数对交叉项有明显的抑制效果，而且交叉项峰值的减小对应着交叉项沿频率轴的扩散。这是由于这种分布的核函数满足边缘分布条件 $\Phi(\theta, 0) = \Phi(0, \tau) = 1$ 。沿 ω 轴的切面面积不变，峰值位置幅值的减小，对应了其他位置幅值的增加，即在频率轴交叉项扩散。

从信号变换到 $\theta - \tau$ 平面后的分布可以看出，对应于信号自项的分量一般集中在原点附近，过原点的直线上。当输入的是平稳信号时，该分量沿 θ 轴线分布，而对应于交叉项的分量一般是分布在两侧与之平行的直线上，不过原点；当输入的是非平稳信号时，自项对应的分量过原点，分布在与 θ 轴线成一定角度的直线上，交叉项一般仍分布在两侧与之平行的直线上，不过原点。

核函数的实质作用是：在上述情况下，外加一个原点为峰值，远离 θ 和 τ 轴处很快衰减的窗函数，从而减弱交叉项的影响。由此可见，核函数的选择与对应于信号自项、交叉项的分量在 $\theta - \tau$ 平面上的分布情况是密切相关的。一个好的核函数应该是在符合对核函数的一定要求的前提下，能够在 $\theta - \tau$ 平面上尽量保留对应于信号自项的分量，去掉对应于交叉项的分量。

3 存在的问题及改进方法

基于上述对核函数作用的分析及仿真实验的结果可以发现乔伊-威廉斯核存在如下问题：1) 参数确定后，核函数沿 θ 和 τ 轴方向的宽度不变，在一般情况下，这样的分布形式不能最大限度地保留信号自项。如果增大核函数沿轴线的宽度，则不可避免地会增加交叉项的成分。2) 改变核函数的参数，使核函数在 θ 和 τ 轴线附近的形状更为尖锐，可以观察到交叉项对比于信号自项有显著衰减，但同时信号自项的峰值幅度也大幅度减小。其原因在于加入核函数后，随着核函数在轴线附近变得尖锐，所保留的信号能量也逐渐减少，使最终的数据虽然能反映出交叉项所占比例在减少，但不能正确反映信号分量的大小。

以上两个问题产生的结果是：1) 信号不变而分别加参数不同的核函数窗后所得结果之间没有可比性。2) 在一定情况下，如果信号为一个正弦波外加一个峰值相同的线性调频波时，因为所加的核函数窗在 $\theta - \tau$ 平面上对正弦波的自项没有衰减而对调频波的自项衰减，因此得到的时频联合分布图上不能正确反映信号间的大小关系，这种差异随着对交叉项衰减的增加而增加。

由于乔伊-威廉斯核的改进形式同样是参数确定后,核函数沿 θ 和 τ 轴轴方向的宽度不变,因此也存在上述两个问题。只是因为沿两轴方向的核函数形状可分别调整,所以在特定的信号环境下相对于乔伊-威廉斯核有较小的改善。

图1~4说明了存在的问题。图中所加信号为两个幅值与频率变化率相同、初始频率不同的线性调频信号。在时频联合分布图中,为说明方便取 $|C(t, \omega)|$ 来显示,其结果并不改变信号自项与交叉项的分布位置以及信号幅值间的比例关系。图1中核函数取“1”,为魏格纳分布, θ - τ 平面上对应于信号自项,交叉项的分量保持原值不变;图2~4中分别加参数 $\sigma=10^6$ 、 $\sigma=10^5$ 、 $\sigma=10^4$ 的乔伊-威廉斯核,使得与信号自项相比,交叉项的分量有不同程度的衰减,得到交叉项衰减不同的乔伊-威廉斯分布。图中水平方向的轴为频率轴,垂直纸面的轴为时间轴。对比这三个图形可知,虽然交叉项有明显的衰减,但信号项也被部分衰减,造成时频联合分布图中计算出的信号幅值顺次减小,不能反映信号真实强度的大小。

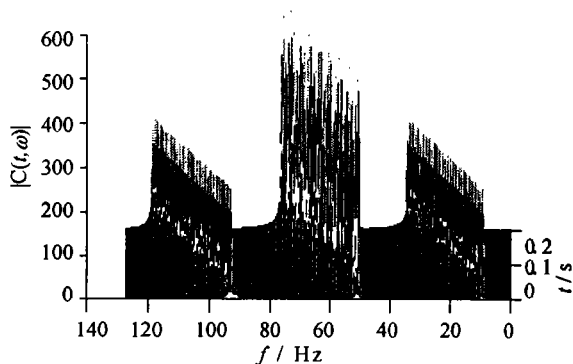


图1 魏格纳分布

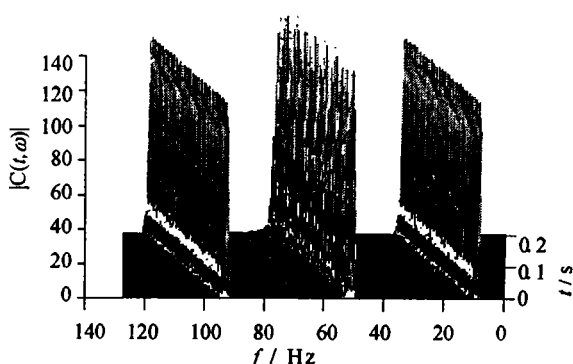


图2 乔伊-威廉斯分布

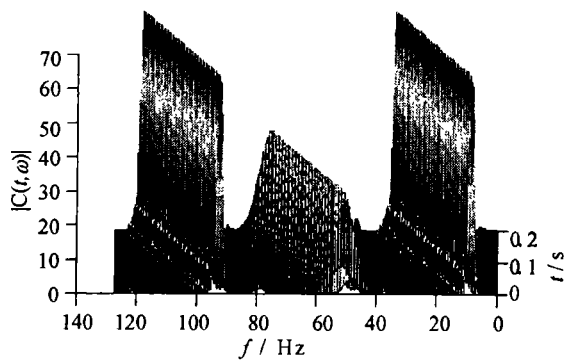


图3 乔伊-威廉斯分布

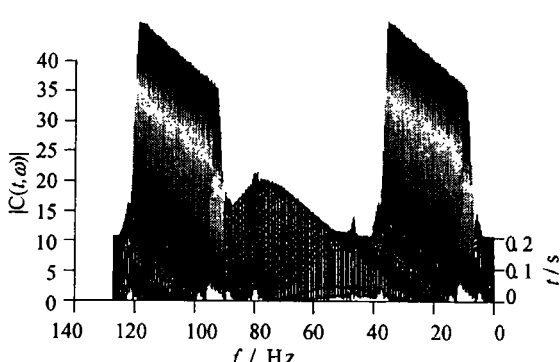


图4 乔伊-威廉斯分布

根据 θ - τ 平面上信号对应分量的分布特点,针对存在的问题,本文利用简化的霍夫变换,在 θ - τ 平面上检测出对应于信号自项的位置,给予保留;对应于交叉项的部分则不予检测,一并去掉,从而将分离信号自项与交叉项这一问题转化为一个二值图像过原点处的直线的检测问题。结果证明,这种处理方法有效地解决了上述乔伊-威廉斯核及其改进形式中存在的问题。具体的处理方法如下:

1) 将变换到平面的信号 $A(\theta, \tau)$ 作二值处理,得到一个二值的图像 F 。

2) 在图像 F 中,对应于 θ - τ 平面设定坐标轴与原点。图中距离原点为 R 与水平轴成 φ 角的直线为 $R=x\cos\varphi+y\sin\varphi$,则所有在这一直线上的点都可以用参数 R 与 φ 表示。

3) 检测过原点的直线。顺次扫描所有 F 上的点，对符合直线方程 $x\cos\varphi+y\sin\varphi-R\leq\varepsilon$ 的点，认为是在参数 R 与 φ 所确定的直线 L 上。设定一门限 LIM，当检测到 L 上的点多于 LIM 时，则检测到一条直线。重新扫描整个 F 平面，计算该直线上所有点的位置，并在另一个与 F 同样大小，初值为零的平面 B 上设置相应的点为“1”。上述方程中的 ε 为一个接近零的较小数，而不是零。因为计算的是平面上离散的点，所以当某一点距一直线的距离小于设定的 ε ，即认为该点在这条直线上。

4) 检测出所有过原点的直线，将 B 中所有对应的点设为“1”，并将 B 中对应于 $\theta=0$ ， $\tau=0$ 的两条直线上的点设为“1”，目的是使最终得到的分布满足边缘特性。

5) 以得到的 B 为核函数，对 $A(\theta,\tau)$ 加窗，再进行二维傅里叶变换，即可得到最终的时频联合分布。

在实际仿真过程中，发现上述处理方法中 R 与 ε 只要设置为接近零的数即可。LIM 可设置为 20~30 之间的整数，视所处理的图像大小而定。因为要检测的是过原点的直线，而交叉项分量一般不过原点，所以 LIM 的值只要稍大一些，就很容易得到满意的结果。检测到某一个点后，若只将该点设为“1”，则由于在该直线上显然应该属于信号自项的分量较小而没有检测到，造成最终时频联合分布图上信号失真。解决这一问题的方法是在检测到某一点后，将以该点为中心的 3×3 或 5×5 的范围内的点均设为“1”，仿真结果表明，取 3×3 大小范围时，即可准确反映信号的分布。取 5×5 大小范围，结果变化不大，同样能准确反映信号的分布，且不会引入更多的交叉项的分量。

上述处理方法采用了霍夫变换。但在本文特殊的条件下，只需检测过某一定点的直线即可，而无需检测平面上所有的直线。可将其视为是一种简化的霍夫变换，为检测直线所增加的计算量也不算大。由核函数的选择方式来看，每一组新的信号到来时，检测出的对应于信号自项的直线将随之改变，从而核函数的形式也随之改变。因此本文引入了一种动态变化的核函数，在输入信号变化的情况下，总能保持最大限度地检测出信号自项。

4 仿真结果

在仿真实验中所加信号与线性调频信号相同。作为一种双线性变换，从理论上说在最终所得到时频联合分布图上有一些点是负值，并且交叉项一般来说是过 $C(t,\omega)=0$ 平面振荡分布的。在结果显示中仍取 $|C(t,\omega)|$ 来显示，其结果并不改变信号自项与交叉项的分布位置以及信号幅值间的比例关系。图 5 为检测直线时取 5×5 的点作为检测到的范围；图 6 为取 3×3 的点。由图中可见，新算法最大限度利用了信号自项的分量，与图 1 相比很好地衰减了信号交叉项，并且计算出的信号自项幅值与图 1 中信号自项保持一致。

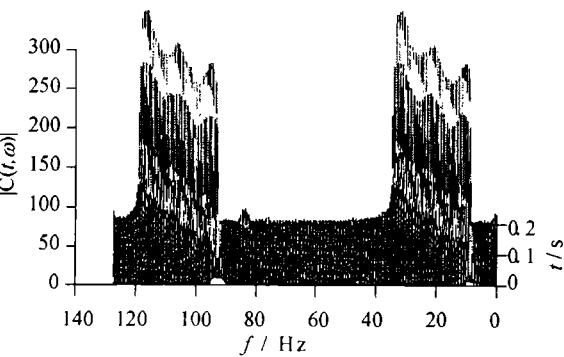


图 5 新算法得到的分布

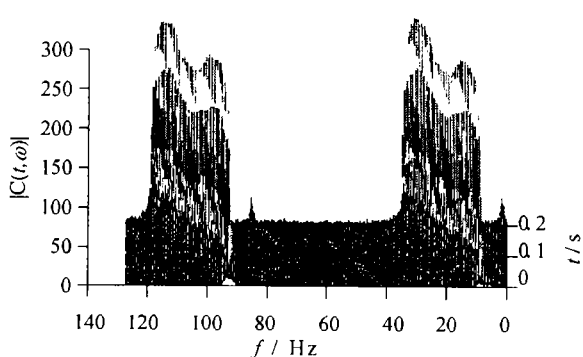


图 6 新算法得到的分布

5 结 论

时频联合分布算法中一个重要的问题是双线性变换自身引入的交叉项对信号自项检测的影响。本文就近年来提出的降低交叉项干扰的核分布做了仿真实验,针对现有算法中存在的问题,提出了一种在 $\theta-\tau$ 平面上用简化的霍夫变换来提取信号自项的方法,从而将信号自项与交叉项的分离问题转化为一个二值图像中过定点的直线检测问题。从核函数选取的方式上看,该算法相当于引入了一个随输入信号变化而变化的核函数,以达到最大限度地检测出信号自项的目的,仿真实验证明了这种算法的有效性。

参 考 文 献

- 1 葛利嘉,陈天麒,黄香馥等. 高分辨时-空二维谱分析的并行处理方法. 电子科技大学学报, 1994, 23(2): 119~125
- 2 科恩 L. 时-频分析: 理论与应用. 西安: 西安交通大学出版社, 1998
- 3 Wigner E P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. Phys Rev, 1932, 40: 749
- 4 Cohen L. Time-frequency distribution-a review. Proc. IEEE, 1989, 77(7): 941~981
- 5 Choi H I, Williams W J. Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels. IEEE Trans on Acoust, Speech, Signal Processing, 1989, 37: 862~871
- 6 Diethorn E J. The generalized exponential time-frequency distribution. AT&T BELL Laboratories Tech Memo, 1992

Improvement on Kernel Used in Joint Time-frequency Distribution

Zhang Xiaodong Wang Xi Jia Baofu

(Inst. of Applied Physics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, a new algorithm is presented to decrease the cross-terms in the Wigner distribution resulted from the bilinear character. The separation between auto-term and cross-term is performed by using Hough transform, forming a dynamic kernel varying as signal changes. By using such a kernel, energy of the detected signal can be retained at quite a high level, thus the final time-frequency distribution can reflect the energy distribution of original signals, which is irregular in traditional Choi-Williams distribution or its improved form. Experimental results prove the effectiveness of new algorithm.

Key words joint time-frequency distribution; kernel; Choi-Williams kernel; Hough transform;